Maciej Bryński

Kongruencje i ich dziwne zastosowania

Określenie: $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m) \iff m|(a-b)$. To jest relacja równoważności w $\boldsymbol{Z}$.

Kongruencje o tym samym module można dodawać stronami, odejmować stronami i mnożyć stronami.

Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb a, b, m oraz $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, to $\dfrac{a}{d} \equiv \dfrac{b}{d}\Big(\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{d}\Big)$.

Dni tygodnia

Zajmiemy się odpowiedzią na pytanie, w jakim dniu tygodnia miało miejsce pewne wydarzenie.

Ponumerujmy dni tygodnia:

1 – poniedziałek
2 – wtorek
3 – środa
4 – czwartek
5 – piątek
6 – sobota
$0 \equiv 7$ – niedziela

Po upływie n dni od danej daty wypada dzień tygodnia, którego numer przystaje do $d+n$ modulo 7.

Przykład 1. O tym, co powiedzieć w tym wystąpieniu, zacząłem myśleć w czwartek 17 września br. Tego dnia przypadała 70-ta rocznica wkroczenia wojsk sowieckich do Polski. W jakim dniu tygodnia miało miejsce to wydarzenie ?

Rok zwykły ma 365 dni, przy czym $365 = 350 + 14 + 1$, więc $365 \equiv 1$ (mod 7). Wynika stąd, że po upływie roku zwykłego wypada dzień tygodnia o 1 (modulo 7) dalszy, niż przed rokiem. Rok przestępny ma o jeden dzień więcej, niż rok zwykły, więc po upływie roku przestępnego numer dnia tygodnia wzrasta o 2 (modulo 7). Od tragicznej daty 17 września 1939 do czwartku 17 września 2009 r. minęło 70 lat, w tym 18 lat przestępnych (przed 10 laty była 60 - ta rocznica, $60 : 4 = 15$, więc do 1999 minęło 15 lat przestępnych, a potem jeszcze były lata przestępne 2000, 2004, 2008). Zatem numer n interesującego nas dnia spełnia kongruencję

$$n \equiv 4 - 70 - 18(\mathrm{mod}\ 7).$$

Stąd $n \equiv -14$ (mod 7). Ta tragiczna data wypadała w niedzielę.

Przy sięganiu do dat znacznie wcześniejszych trzeba uwzględnić fakt, że w roku 1582 obowiązujący wcześniej kalendarz juliański został zastąpiony przez papieża Grzegorza XIII kalendarzem, który od jego imienia nosi nazwę gregoriańskiego. W kalendarzu juliańskim każdy rok o numerze podzielnym przez 4 był przestępny i miał 366 dni, pozostałe lata były zwykłe i miały po 365 dni. Kalendarz gregoriański wprowadził następujące wyjątki od tej zasady: rok o numerze podzielnym przez 100, ale nie przez 400 jest rokiem zwykłym. Dotychczas spośród lat o numerach podzielnych przez 4 latami zwykłymi były następujące trzy: 1700, 1800, 1900. Ponadto pominięto w kalendarzu 10 dat od 5 do 14 października 1582 r.

Przykład 2. W jakim dniu tygodnia odbyła się bitwa pod Grunwaldem? Było to 15 lipca 1410 r. Można sprawdzić w kalendarzu, że 15 lipca 2009 r. wypadł w środę. W przyszłym roku dzień ten wypadnie więc w czwartek i będzie to okrągła 600 - tna rocznica bitwy. Gdyby nie poprawki gregoriańskie, moglibyśmy napisać kongruencję

$$n \equiv 4 - 600 - 150 \pmod 7.$$

Po uwzględnieniu 10 usuniętych dat i istnieniu trzech numerów 1700, 1800, 1900 lat, które nie są przestępne, mamy jednak

$$n \equiv 4 - 600 - 150 + 10 + 3 \pmod 7,$$

tj. $n \equiv -733 \pmod 7$. Ponieważ $-733 = -700 - 35 + 2$, więc $n \equiv 2 \pmod 7$, a zatem bitwa pod Grunwaldem rozpoczęła się we wtorek.

Przykład 3. W każdym roku 13-ty dzień pewnego miesiąca (co najmniej jednego) wypada w piątek (dzień feralny). Oczywiście to, w jakim dniu tygodnia wypadnie 13-ty dzień miesiąca zależy od tego, w jakim dniu był początek tego miesiąca. Wystarczy więc stwierdzić, że numery dni tygodnia pierwszych dni kolejnych miesięcy wyczerpują wszystkie liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Przyjmijmy dla uproszczenia, że 1 stycznia wypadł w poniedziałek. Jeśli rozważamy rok zwykły, to

$1 + 31 \equiv 4 \pmod 7$, więc 1 lutego jest w czwartek,
$4 + 28 \equiv 4 \pmod 7$, więc 1 marca jest w czwartek,
$4 + 31 \equiv 7 \pmod 7$, więc 1 kwietnia jest w niedzielę,
$7 + 30 \equiv 2 \pmod 7$, więc 1 maja jest we wtorek,
$2 + 31 \equiv 5 \pmod 7$, więc 1 czerwca jest w piątek,
$5 + 30 \equiv 7 \pmod 7$, więc 1 lipca jest w niedzielę,
$7 + 31 \equiv 3 \pmod 7$, więc 1 sierpnia jest w środę,
$3 + 31 \equiv 6 \pmod 7$, więc 1 września jest w sobotę,
$6 + 30 \equiv 1 \pmod 7$, więc 1 października jest w poniedziałek
i w ten sposób poszczególne miesiące zaczynają się od każdego z dni tygodnia.

Jeśli natomiast rok jest przestępny, to przyjmując, że 1 stycznia jest w poniedziałek, mamy podobnie

$1 + 31 \equiv 4 \pmod 7$, więc 1 lutego jest w czwartek,
$4 + 29 \equiv 5 \pmod 7$, więc 1 marca jest w piątek,
$5 + 31 \equiv 1 \pmod 7$, więc 1 kwietnia jest w poniedziałek,
$1 + 30 \equiv 3 \pmod 7$, więc 1 maja jest w środę,
$3 + 31 \equiv 6 \pmod 7$, więc 1 czerwca jest w sobotę,
$6 + 30 \equiv 1 \pmod 7$, więc 1 lipca jest w poniedziałek,
$1 + 31 \equiv 4 \pmod 7$, więc 1 sierpnia jest w czwartek,
$4 + 31 \equiv 7 \pmod 7$, więc 1 września jest w niedzielę,
$7 + 30 \equiv 2 \pmod 7$, więc 1 października jest we wtorek
i znów otrzymaliśmy wszystkie dni tygodnia.

Cechy podzielności

Twierdzenie. Jesli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz $a \equiv b \pmod m$, to $f(a) \equiv f(b) \pmod m$.

Dowćd wynika wprost z własności kongruencji.

Każdą liczbę całkowitą możemy zapisać w dziesiętnym sysytemie pozycyjnym w postaci

$$c_0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \ldots + c_n \cdot 10^n.$$

Cecha podzielności przez 9 Liczba jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Dowód. $10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$, więc $f(10) \equiv f(1) (\mathrm{mod}\ 9)$.

Każdą z kongruencji

$1 \equiv 1 \pmod 9$, $10 \equiv 1 \pmod 9$, $10^2 \equiv 1 \pmod 9$, $\ldots$, $10^n \equiv 1 \pmod 9$ mnożymy odpowiednio przez c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_n i dodajemy stronami. Dostajemy stąd przystawanie danej liczby do sumy jej cyfr modulo 9. Stąd reszta z dzielenia tej liczby przez 9 jest równa reszcie z dzielenia sumy cyfr przez 9.

Cecha podzielności przez 11 Liczba jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy naprzemienna suma jej cyfr jest podzielna przez 11.

Dowód. $10 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 11)$, więc $f(10) \equiv f(-1) (\mathrm{mod}\ 11)$.

Każdą z kongruencji

$1 \equiv 1 \pmod{11}$, $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, $\ldots$, $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ mnożymy odpowiednio przez c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_n i dodajemy stronami. Dostajemy stąd przystawanie danej liczby do naprzemiennej sumy jej cyfr modulo 11. Zatem reszta z dzielenia tej liczby przez 11 jest równa reszcie z dzielenia naprzemiennej sumy cyfr przez 11.

Cecha podzielności przez 7. Liczba $c_0 + c_1 \cdot 10^1 + \ldots$ jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $c_0 + 3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 - c_3 - 3 \cdot c_4 - 2 \cdot c_5 + \ldots$ (dalej cyklicznie) jest podzielna przez 7.

Dowód. Postępując analogicznie z kongruencjami $1 \equiv 1 \pmod 7$, $10 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$, $10^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$, $10^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 7)$, $10^4 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 7)$, $10^5 \equiv -2 (\mathrm{mod}\ 7)$, $10^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ dostajemy

$c_0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + c_3 \cdot 10^3 + c_4 \cdot 10^4 + c_5 \cdot 10^5 + c_6 \cdot 10^6 \equiv c_0 + 3 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 - c_3 - 3 \cdot c_4 - 2 \cdot c_5 + c_6 (\mathrm{mod}\ 7)$ i dalej cyklicznie.