Metoda niezmienników i półniezmienników

Paulina Domagalska

1. Metoda niezmienników.

"Niezmiennikiem nazywamy pewną własność, która nie ulega zmianie podczas wykonywania procesu." Definicja ta, pomimo że bardzo ogólna, jest mało zrozumiała dla kogoś, kto styka się z metodą niezmienników po raz pierwszy. Tymczasem pojęcie jest bardzo intuicyjne, ale należy poprzedzić je najpierw przykładem.

Zadanie 1. Na tablicy zapisano dziesięć znaków "+" i piętnaście znaków "-". W jednym ruchu ścieramy dwa dowlone znaki i zapisujemy na tablicy "+", gdy znaki były takie same, oraz "-", jeśli były różne. Po 24 ruchach zostaje jeden znak, jaki?

Rozwiązanie I. Zamiast "+" napiszmy 1, zamiast "-" napiszmy -1. Wówczas jeden ruch polega na tym, że w miejsce dwóch startych liczb wpisujemy ich iloczyn. Wobec tego iloczyn wszystkich liczb zapisanych na tablicy nie zmienia się. Ponieważ na początku iloczyn wszystkich liczb jest równy -1, więc po 24 ruchach na tablicy zostanie -1, czyli znak "-".

Rozwiązanie II. Podstawmy za "+" liczbę 0, a za "-" liczbę 1. Gdy ścieramy dwa znaki, wpisujemy ich sumę. Zauważmy, że podana operacja nie zmienia sumy wszystkich liczb zapisanych na tablicy, oraz że liczbą parzystym odpowiada znak "+", a liczbą nieparzystym odpowiada znak "-". Ponieważ na początku suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy była równa 15, zatem po 24 ruchach zostanie liczba, która daje resztę 1 przy dzieleniu przez 2. Wobec tego ostatnią liczbą na tablicy będzie 1, która odpowiada znakowi "-".

Rozwiązanie III. Przyjrzyjmy się liczbie minusów na tablicy. Jeśli zetrzemy dwa znaki "+", to liczba znaków "-" nie zmienia się. Jeśli wybierzemy znaki "+" i "-", to również liczba znaków "-" nie zmieni się. W przypadku gdy zetrzemy dwa znaki "-", wówczas liczba minusów zmniejszy się o 2. Zatem parzystośc liczby znaków "-" pozostaje stała. Ponieważ na początku było nieparzyście wiele minusów, więc ostatnim znakiem na tablicy będzie "-".

W pierwszym rozwiązaniu skorzystalismy z tego, że podczas każdego ruchu iloczyn wszystkich liczb na tablicy nie zmienia się. Drugie podejście do zadania opierało się na tym, że nie zmieniała się parzystość sumy liczb zapisanych na tablicy. Trzeci sposób wykorzystywał to, że nie zmieniała się parzystość liczby minusów. We wszystkich rozwiązaniach istniało *coś, co się nie zmienia* - była to własość, którą nazywa się *niezmiennikiem*.

Zadanie 2. Okrąg podzielono średnicami na 10 sektorów. W każdym sektorze został położony żeton. W jednym ruchu przesuwamy jeden (dowolnie wybrany) żeton do następnego sektora zgodnie z ruchem wskazówek zegara, oraz jeden (dowolnie wybrany) żeton do nastepnego sektora przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Czy istnieje skończona liczba ruchów po których wszystkie żetony znajdą się w jednym sektorze?

Rozwiązanie. Pokolorujmy co drugi sektor na czarno, a pozostałe pozostawmy białe. Przyjrzyjmy się czarnym sektorom - jest ich pięć, na początku znajduje się w nich w sumie 5 żetonów. Jeśli przesuwamy żeton z białego sektora i żeton z czarnego sektora, to liczba żetonów znajdujących się w czarnych sektorach nie zmienia się. Jeśli przesuwamy żetony z dwóch białych sektorów, to liczba żetonów znajdującyh się w czarnych sektorach zwiększy się o 2, a jeśli przesuwamy żetony z dwóch czarnych sektorów, to liczba żetonów znajdującyh się w czarnych sektorach zmniejszy się o 2. Wobec tego podczas każdego ruchu parzystość liczby żetonów leżących na czarnych sektorach nie zmienia się. Ponieważ na początku było ich nieparzyście wiele, więc po każdym ruchu również będzie ich nieparzyście wiele. Zatem wszystkie żetony nigdy nie będą mogły znajdować się w pewnym białym lub w pewnym czarnym sektorze (w obu przypadkach w czarnych sektorach znajdowałoby się parzyście wiele żetonów).

Metoda niezmienników może być z powodzeniem stosowana nie tylko do problemów czysto kombinatorycznych. Przykładem mogą być poniższe zadania, jedno z nich jest teorioliczbowe, drugie algebraiczne.

Zadanie 3. Dana jest liczba 2009!. Najpierw obliczamy sumę jej cyfr, następnie obliczamy sumę cyfr tak otrzymanej liczby i tak dalej, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?

Rozwiązanie. Ponieważ liczba 2009! jest podzielna przez 9, więc również suma jej cyfr jest podzielna przez 9, czyli także suma cyfr nowej liczby jest podzielna przez 9, i tak dalej. Ostatnia, jednocyfrowa liczba równiez musi być podzielna przez 9, a jedyną taką jednocyfrową liczbą jest 9.

Zadanie 4. Na tablicy zostały zapisane liczby: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{2009}$. W jednym ruchu wybieramy dowolne dwie liczby - oznaczmy je przez a i b, ścieramy je i zamiast nich wpisujemy liczbę równą $a + b + ab$. Jaka liczbę możemy otrzymać po 2008 ruchach?

Rozwiązanie. Niech $a \star b = a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. Wówczas

$$1 \star \frac{1}{2} \star \frac{1}{3} \star \dots \star \frac{1}{2009} = (1 + 1)(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{3} + 1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2009} + 1) - 1$$

Zatem operacja opisana w zadaniu nie zmienia "gwiazdkowego" iloczynu zapisanych na tablicy liczb. Po 2008 ruchach otrzymamy więc liczbę równą

$$(1+1)(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{3}+1)\cdot \dots \cdot(\frac{1}{2009}+1)-1 = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot \dots \cdot\frac{2010}{2009}-1 = 2010-1 = 2009.$$

2. Metoda półniezmienników.

Jest to sposób rozwiązywania zadań polegający na tym, że znajdujemy pewną własność, która zmienia się w ściśle określony sposób (na przykład stale rośnie lub stale maleje) podczas wykonywania pewnego procesu. Tak jak poprzednio, najwygodniej jest wprowadzać tą metodę podając najpierw przykład.

Zadanie 5. W każdym polu szachownicy $m \times n$ zapisano jedną liczbę rzeczywistą. Możemy wykonać następującą operację: zmieniamy znaki wszystkich liczb stojących w jednym, wybranym przez nas wierszu lub w wybranej przez nas kolumnie. Czy zawsze można, przy pomocy skończonej liczby operacji, doprowadzić do sytuacji, w której suma liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest nieujemna?

Rozwiązanie. Tak.

Rozważmy sumę wszystkich liczb stojących na szachownicy. Do wykonania operacji opisanej w zadaniu wybieramy ten wiersz (kolumnę), w której suma liczb jest ujemna. Po dokonaniu zmiany znaków w wybranym wierszu (kolumnie) suma liczb zmieniła się na dodatnią - zatem zwiekszyła się suma wszystkich liczb stojących na szachownicy. Wobec tego po pewnej, skończonej liczbie operacji suma liczb we wszystkich wierszach i kolumnach jest nieujemna, gdyż w przeciwnym przypadku moglibyśmy zwiększać sumę wszystkich liczb stojących na szachownicy nieskończenie wiele razy - a tymczasem istnieje tylko skończona liczba możliwych wartości liczb na szachownicy (nie więcej niż 2^{mn}).

Rozwiązanie opiera się na takim sposobie wykonywania opisanej w treści zadania operacji, aby za każdym razem suma wszystkich liczb znajdujących się na szachownicy rosła. *Półniezmiennikiem* jest w tym przypadku suma liczb zapisanych na szachownicy. Ważny jest również wykonywany *proces* - musieliśmy dobrać sposób wykonywania dozwolonej operacji tak, aby można było wogóle mówić o półniezmienniku (zauważmy, że gdybyśmy wybierali wiersz lub kolumnę do zmiany znaków w sposób dowolny, to wówczas suma wszystkich liczb mogłaby raz maleć, raz rosnąć).

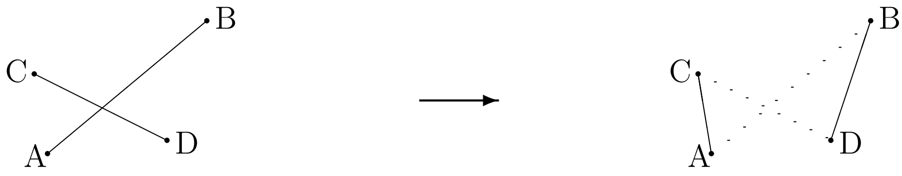
Zadanie 6. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej zapisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnić, że po pewnej, skończonej liczbie takich operacji wszystkie liczby na okręgu będą równe.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dopóki wszystkie liczby na okregu nie są równe, to ich suma po każdej operacji zmniejsza się. Istotnie, jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami zapisanymi na okręgu przed operacją, a $b_1, b_2, \ldots b_n$ po operacji (przy czym b_i leży pomiędzy a_i oraz a_{i+1} dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, a b_n leży pomiędzy a_n oraz a_1), to wówczas dla każdego i mamy $a_i \geq b_i$ oraz $a_{i+1} \geq b_i$ (przyjmujemy, że $a_{n+1} = a_1$). Jeśli więc $\Sigma_{i=1}^{n} a_i = \Sigma_{i=1}^{n} b_i$, to dla każdego i mamy $a_i = b_i = a_{i+1}$, skąd dostajemy, że wszystkie liczby a_i musiały być równe. Ponieważ suma wszystkich liczb na okręgu musi być większa od zera i zawsze jest liczbą naturalną, która po każdej operacji nie zwiększa się, więc po pewnej, skończonej liczbie operacji wszystkie liczby na okręgu będą równe.

Może zaskoczyć fakt, że poniższe zadanie można rozwiązać opisywanym w tej części sposobem. Jest ono geometryczne (a nie kombinatoryczne), co więcej, nie ma w nim opisanego żadnego procesu, a jednak również i w tym przypadku znakomicie sprawdza się metoda półniezmienników.

Zadanie 7. Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów. Udowodnić, że można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka oraz by odcinki nie przecinały się.

Rozwiązanie. Narysujmy n odcinków tak, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka. Jeśli żadne 2 odcinki się nie przecinają, to zadanie zostało wykonane. Załóżmy więc, że niektóre odcinki przecianają się. Wybierzmy dowolne dwa odcinki które się przecinają, oznaczmy je odpowiednio przez AB i CD, a ich punkt przecięcia się przez X. Możemy wykonać teraz następujacą operację: odcinki AB i CD zastępujemy przez odcinki AC oraz BD.



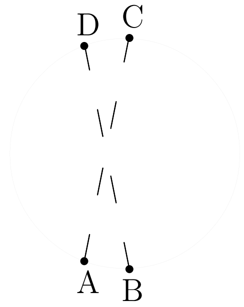
Rys.1

Zauważmy, że odcinki AC i BD nie przecinają się oraz $AC + BD < AB + CD$, gdyż na mocy nierówności trójkąta mamy $AX + CX > AC$ oraz $BX + DX > BD$. Wobec tego wykonywanie opisanej operacji powoduje zmniejszenie się sumy długości wszystkich n odcinków. Ponieważ suma ta nie może zmniejszać się w nieskończoność (przy danych n punktach istnieje tylko skończona liczba układów n odcinków), więc po pewnej, skończonej liczbie operacji musimy dojść do układu, w którym żadne dwa odcinki się nie przecinają.

Zadanie 8. Na dworze króla Artura przebywa $2n$ rycerzy, z których każdy ma co najwyżej $n - 1$ wrogów. Udowodnić, że można ich usadzić wokół okrągłego stołu tak, aby żaden nie siedział obok swojego wroga.

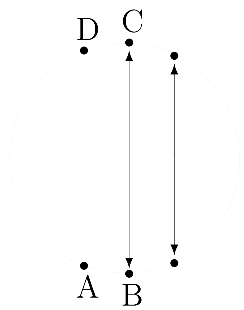
Rozwiązanie. W tym rozwiązaniu półniezmiennikiem, który będziemy badać jest liczba "wrogich" sąsiedztw, czyli liczba par rycerzy, któzy siedzą obok siebie i są wrogami. Jeśli dwaj sąsiadujący ze sobą rycerze nie są wrogami, będziemy nazywać ich przyjaciółmi (to oczywiście daleko idące uproszczenie, w życiu bowiem często zdarza się, że osoby które nie są wrogami nie są również przyjaciółmi).

Usadźmy rycerzy dowolnie. Jeśli żaden nie siedzi obok swojego wroga, to mamy żądane usadzenie. Załóżmy więc, że istnieje co najmniej jeden rycerz, nazwijmy go A, który siedzi obok swojego wroga, rycerza B. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że rycerz B siedzi po prawej stronie A. Wśród pozostałych $2n - 2$ rycerzy A posiada co najmniej n przyjaciół. Ponieważ B posiada co najwyżej $n-1$ wrogów, więc istnieje co najmniej jeden rycerz, nazwijmy go C, będący przyjacielem rycerza A i mający za sąsiada (siedzącego po jego prawej stronie) rycerza D, będącego przyjacielem rycerza B. Opisana sytuacja jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys.2. Rycerz C jest przyjacielem rycerza A, rycerz D jest przyjacielem rycerza B

Przesadzamy rycerzy następująco: wszystkich rycerzy siedzących na prawo od cięciwy AD zamieniamy miejscami symetrycznie względem średnicy prostopadłej do cięciwy AD. (Rycerzy A i D, oraz rycerzy siedzących po lewej stronie cięciwy AD pozostawiamy na swoich miejscach.)



Rys.3. Przesadzanie rycerzy

W wyniku przesadzenia zmniejszyliśmy liczbę "wrogich" sąsiedztw co najmniej o 1. Wobec tego po pewnej, skończonej liczbie przesadzeń, uzyskamy takie usadzenie rycerzy wokół stołu, przy którym żaden z rycerzy nie siedzi obok swojego wroga.

Literatura

[1] I. Jonin, L. Kourliandtchik, "Poszukiwanie niezmienników", Kwant 2/1976, str. 32-35.

[2] L. Kourliandtchik, D. Fomin, "Etiudy o półniezmiennikach", Kwant 7/1989, str. 63-68.

[3] Daniar CH. Musztari, "Przygotowanie do olimpiad matematycznych", wyd. Adam, 2005.