Nierówności między średnimi liczbowymi i ich zastosowanie

Renata Jurasińska

Instytut Matematyki Uniwersytetu Rzeszowskiego
III LO w Rzeszowie

I. Średnie liczbowe i zależności między nimi

Średnie liczbowe (może jedynie bez średniej kwadratowej) i nierówności między nimi uczniowie znają już od pierwszej klasy szkoły średniej (a czasem nawet od gimnazjum).
Przypomnę definicje tych średnich, podam twierdzenie o nierównościach między nimi, szkice dowodów, a także przykłady zastosowań nierówności między średnimi do rozwiązywania różnorodnych zadań, prostych, trudniejszych, a nawet olimpijskich.

Definicja 1.

ŚREDNIA liczb $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ - to dowolna funkcja

$$\mu(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

spełniająca warunek

$$min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mu(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq max(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

i jednocześnie niemalejąca ze względu na każdą zmienną a_i, $i = 1,2 \dots, n$.

Najbardziej znane średnie, to średnia arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna i kwadratowa.

Definicja 2.

ŚREDNIĄ ARYTMETYCZNĄ liczb rzeczywistych $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ nazywamy liczbę

$$S_A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \,.$$

Definicja 3.

ŚREDNIĄ GEOMETRYCZNĄ liczb nieujemnych $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ nazywamy liczbę

$$S_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Definicja 4.

ŚREDNIĄ HARMONICZNĄ różnych od zera liczb rzeczywistych $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ nazywamy liczbę

$$S_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

Definicja 5.

ŚREDNIĄ KWADRATOWĄ liczb rzeczywistych $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ nazywamy liczbę

$$S_K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zależności pomiędzy średnimi S_A, S_G, S_H i S_K można zapisać w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 1.
Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzą nierówności

$$\underbrace{S_K \geq S_A}_{(2)} \geq \underbrace{S_G \geq S_H}_{(3)}, \quad \text{gdzie } \overbrace{S_A \geq S_G}^{(1)}.$$

W każdej z nierówności (1), (2) i (3) równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Środkowa nierówność (1) w Twierdzeniu 1. to słynna nierówność Cauchy'ego między średnią geometryczną i arytmetyczną. Nierówność ta dla dwóch liczb nieujemnych

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

znana była już w czasach Euklidesa, lecz jej ogólna postać pojawiła się znacznie później. Pierwsza znana wzmianka pochodzi z roku 1729, kiedy to szkocki matematyk Colin Maclaurin sformułował następujące twierdzenie geometryczne

Twierdzenie 2.
Jeżeli dany odcinek podzielimy na kilka odcinków, to iloczyn długości tych odcinków będzie największy, jeśli wszystkie z tych odcinków będą równej długości.

Oznaczmy przez $a_1, a_2, \dots, a_n$ długości odcinków, na jakie został podzielony dany odcinek. Gdyby odcinki te były równej długości, to każdy z nich miałby długość

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

a więc Twierdzenie 2. możemy zapisać w postaci nierówności

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n ,$$

która jest równoważna nierówności (1).
Dowód Maclaurina nie był jednakże ścisły i zawierał lukę.

Po raz pierwszy w jawnej postaci i ze ścisłym dowodem nierówność (1) została opublikowana przez francuskiego matematyka Augustina Cauchy'ego w „*Wykładach z analizy algebraicznej*" (1821 r.), dlatego też nazywana jest zazwyczaj nierównością Cauchy'ego. Obecnie znanych jest ponad 50 różnych dowodów nierówności (1).

Zacznę od pokazania prostych dowodów tych nierówności dla n = 2, czyli dla dwóch dodatnich liczb a i b.

Twierdzenie 1. dla n = 2 można zapisać w postaci

Twierdzenie 1'.
Dla dodatnich liczb a i b zachodzą nierówności

$$\underbrace{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}}_{(2')} \overbrace{\geq \sqrt{ab}}^{(1')} \underbrace{\geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{(3')} .$$

W każdej z tych nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Dowody algebraiczne nierówności (1'), (2') i (3') polegają na równoważnym przekształcaniu tych nierówności do oczywistych postaci i chyba nie wymagają specjalnych komentarzy.
Niech więc a, b będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

Mamy kolejno dla (1')

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab,$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Dla (2') otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} \geq \frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Z kolei dla (3') dostajemy

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b},$$

$$(a+b)\sqrt{ab} \geq 2ab,$$

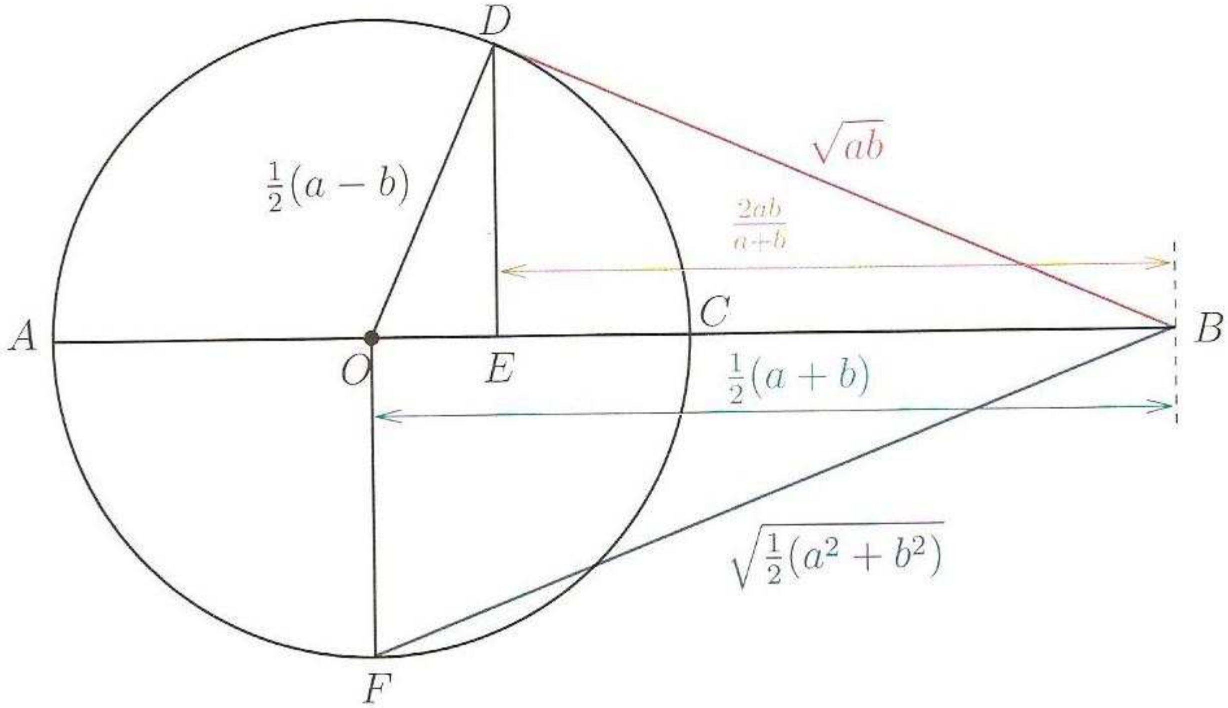
$$a + b \geq 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,,$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Znacznie ciekawsze są <u>dowody geometryczne</u>, przytoczę jeden z nich, inne można znaleźć np. w [9].

Niech a i b będą liczbami dodatnimi i niech $a > b$. Na odcinku AB o długości a obieramy taki punkt C, że $|BC| = b$ (jak na rysunku)

Kreślimy okrąg o średnicy AC i jego środek oznaczamy przez O.



Wówczas mamy

$$|AO| = |OC| = \frac{a-b}{2},$$

zaś

$$|OB| = |BC| + |OC| = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Z punktu B prowadzimy styczną do górnego półokręgu i oznaczamy przez D punkt styczności. Przez E oznaczamy rzut prostokątny punktu D na odcinek AB, zaś przez F - punkt wspólny okręgu i odcinka o początku w punkcie O, prostopadłego do odcinka AB.

Wyrazimy długości odcinków DB, EB i FB przez a i b.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego OBD mamy

$$|BD|^2 = |BO|^2 - |OD|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

a stąd

$$|BD| = \sqrt{ab}.$$

Z podobieństwa trójkątów OBDi EBD mamy z kolei, że

$$\frac{|OB|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|EB|},$$

a więc

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{|EB|}$$

i po łatwych przekształceniach otrzymujemy, że

$$|EB| = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Z trójkąta prostokątnego OFB mamy z kolei

$$|FB|^2 = |OF|^2 + |OB|^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

a tym samym

$$|FB| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Pokazaliśmy więc, że długości odcinków EB, DB, OB i FB są odpowiednimi średnimi liczb a i b. Korzystając w trójkątach prostokątnych EBD, OBD i OFB z własności, że przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej, otrzymujemy nierówności

$$|FB| > |OB| > |DB| > |EB|,$$

a stąd

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Można również zauważyć, że pomiędzy średnimi dwóch liczb dodatnich a i b zachodzą również następujące ciekawe (i proste do wykazania) związki, mianowicie

$$\frac{1}{S_A(a,b)} = S_H\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right),$$

czyli **odwrotność średniej arytmetycznej liczb dodatnich a i b jest średnią harmoniczną odwrotności tych liczb**;

$$\frac{1}{S_H(a,b)} = S_A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right),$$

czyli **odwrotność średniej harmonicznej liczb dodatnich a i b jest średnią arytmetyczną odwrotności tych liczb**;

$$\frac{1}{S_G(a,b)} = S_G\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right),$$

czyli **odwrotność średniej geometrycznej liczb dodatnich a i b jest średnią geometryczną odwrotności tych liczb**.

Dowody nierówności (1), (2) i (3) dla n liczb dodatnich są bardziej skomplikowane, podam tylko ich szkice, a zainteresowanych odsyłam np. do [3].

<u>Dowód Cauchy'ego nierówności (1)</u>

Jeśli $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, to oczywiście $S_A = S_G$. Należy pokazać, że jeśli nie wszystkie spośród liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ są równe, to zachodzi nierówność ostra.

Dla $n = 2$ mamy

$$a_1 \cdot a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2, \text{ gdy } a_1 \neq a_2,$$

a stąd

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Dalej, dla $n = 4$ mamy

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4) < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 =$$

$$\left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 < \left[\left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)^2\right]^2 =$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4,$$

jeśli nie wszystkie a_1, a_2, a_3, a_4 są równe.

Powtarzając to rozumowanie *m* razy otrzymujemy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^m} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m},$$

gdy nie wszystkie a_i są równe. W ten sposób nierówność (1) została udowodniona dla *n* będących potęgami dwójki.

Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną i niech *m* będzie liczbą naturalną taką, że $2^m > n$. Podstawmy

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2, \ldots , b_n = a_n, b_{n+1} = \cdots = b_{2^m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = c\ .$$

Mamy wówczas

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_n \cdot c^{2^m - n} = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2^m} \ <$$

$$\left(\frac{(b_1 + \cdots + b_n) + (b_{n+1} + \cdots + b_{2^m})}{2^m}\right)^{2^m} =$$

$$\left(\frac{n \cdot c + (2^m - n) \cdot c}{2^m}\right)^{2^m} = c^{2^m},$$

gdy nie wszystkie b_i są równe. Ale b_i są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy a_i są sobie równe.

Stąd ostatecznie, jeśli nie wszystkie a_i są sobie równe dostajemy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < c^n,$$

czyli

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n,$$

lub równoważnie

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\ ,$$

co kończy dowód.

Dowód nierówności (2), wiążącej średnią arytmetyczną i kwadratową, był również zawarty w „*Wykładach z analizy algebraicznej*” Cauchy'ego i oparty był na następującym rozumowaniu.

Dowód Cauchy'ego nierówności (2)

Indukcyjnie można wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i - a_j\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 .$$

Stąd mamy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 ,$$

czyli równoważnie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

co kończy dowód.

Nierówność (3) między średnią harmoniczną i geometryczną można udowodnić następująco

<u>Dowód nierówności (3).</u>

Zauważmy, że

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \ge$$

$$\frac{n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},$$

co kończy dowód.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na dwie nierówności, które są równoważnymi zapisami nierówności między średnimi i które są często wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań. Są to nierówności

(4)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 ,$$

czyli

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

wynikająca z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową;

oraz

(5)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

czyli

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

wynikająca z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną.

Należy również zauważyć, że średnie: arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna i kwadratowa są szczególnymi przypadkami tzw. średniej potęgowej.

Definicja 6.

ŚREDNIĄ POTĘGOWĄ stopnia $\boldsymbol{t}$ liczb dodatnich $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ nazywamy liczbę

$$M_t(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}.$$

Definicję tę można uzupełnić dla $t = \pm\infty$ następująco

$$M_{-\infty}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$M_{\infty}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Zauważmy, że mamy

$$M_2 = S_k, \ \ M_1 = S_A, \ \ M_0 = S_G, \ \ M_{-1} = S_H$$

i nierówności między średnimi przyjmują postać

$$M_2 \geq M_1 \geq M_0 \geq M_{-1}.$$

Nierówności te można udowodnić wykorzystując fakt, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \to M_t(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

jest niemalejąca

II. Zastosowanie nierówności między średnimi liczbowymi do rozwiązywania zadań

1. Dowodzenie nierówności

Zad. 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

(6) $$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$$

Rozwiązanie.
Z nierówności (1') między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \qquad \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2},$$

a więc

$$2\sqrt{ab} \leq a+b, \qquad 2\sqrt{bc} \leq b+c, \qquad 2\sqrt{ca} \leq c+a.$$

Mnożąc stronami te nierówności otrzymujemy (6).

Zad. 2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

(7)

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a+b+c.$$

Rozwiązanie.
Wykorzystując nierówność (1) dla trzech liczb nieujemnych a, a, b otrzymujemy

$$\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot b} \leq \frac{a+a+b}{3} = \frac{2a+b}{3}.$$

Analogicznie otrzymujemy nierówności

$$\sqrt[3]{b^2c} \leq \frac{2b+c}{3} \quad \text{oraz} \quad \sqrt[3]{c^2a} \leq \frac{2c+a}{3}.$$

Dodając stronami otrzymane trzy nierówności otrzymujemy (7).

Zad. 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
(8)

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Rozwiązanie.
Przekształcając lewą stronę nierówności (8) i stosując nierówność (1) otrzymujemy

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$$

$$a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right)+\left(\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{b}\right)+\left(\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{c}\right)=$$

$$a^2+b^2+c^2+2\left(\frac{\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}}{2}\right)+2\left(\frac{\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{b}}{2}\right)+2\left(\frac{\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{c}}{2}\right)\geq$$

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{a}}+2\sqrt{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{b}}+2\sqrt{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{c}}=$$

$$a^2+b^2+c^2+\ 2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2\,.$$

Zad. 4. (OM Leningrad 1988) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c,d zachodzi nierówność

(9)
$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)\geq 64\,.$$

<u>Rozwiązanie.</u>
Wykorzystując nierówność (5) otrzymujemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{c}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}+\frac{4}{d}\geq$$

$$\frac{8^2}{a+b+2\cdot\frac{c}{2}+4\cdot\frac{d}{4}}=\frac{64}{a+b+c+d}\,,$$

co po prostych przekształceniach daje (9).

Zad. 5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c takich, że $a+b+c=1$, zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leq\sqrt{15}\,.$$

<u>Rozwiązanie.</u>
Wykorzystując nierówność (4) i warunki zadania otrzymujemy

$$\left(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\right)^2\leq$$

$$3\left[\left(\sqrt{2a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2b+1}\right)^2+\left(\sqrt{2c+1}\right)^2\right]=$$

$$3\left[2\underbrace{(a+b+c)}_{=1}+3\right]=15\,.$$

Po spierwiastkowaniu stronami dostajemy żądaną nierówność.

Zad. 6. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzą nierówności

(10)
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} < \prod_{i=1}^{n} i^i < \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

<u>Rozwiązanie.</u>

Udowodnimy najpierw prawą nierówność. Rozważmy $\frac{n(n+1)}{2}$ liczb postaci $1,2,2,3,3,3,\dots,\underbrace{n,n,\dots,n}_{n}$.

Wykorzystując nierówność (1) otrzymujemy

$$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n} < \frac{1+2+2+\cdots+n+\cdots+n}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

czyli równoważnie

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n < \left(\frac{1+2+2+\cdots+n+\cdots+n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Wykorzystując znaną tożsamość

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mamy dalej

$$\left(\frac{1+2+2+\cdots+n+\cdots+n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} =$$

$$\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} =$$

$$\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

co kończy dowód prawej nierówności (10). Dowód lewej nierówności jest podobny (należy odpowiednio dobrać liczby).

Zad. 7. (XLI MOM, Korea Południowa, 2000). Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $a \cdot b \cdot c = 1$. Udowodnić, że

(11)
$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1 .$$

Rozwiązanie.
Ponieważ z założenia mamy, że $a \cdot b \cdot c = 1$, możemy nierówność (11) uzależnić od dwóch zmiennych, wykorzystując na przykład zależność
$$c = \frac{1}{ab} .$$
Nierówność (11) możemy wtedy zapisać w postaci

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)(b - 1 + ab)\left(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1$$

i dalej równoważnie w postaci

(12)
$$\left(\underbrace{ab - b + 1}_{u}\right)\left(\underbrace{b - 1 + ab}_{v}\right)\left(\underbrace{1 - ab + b}_{w}\right) \le ab^2 .$$

Suma dowolnych dwóch spośród liczb u, v, w jest dodatnia, mamy bowiem $u + v = 2ab,\ \ v + w = 2b,\ \ w + u = 2$, zatem co najwyżej jedna z nich może być ujemna. Jeśli któraś z tych liczb jest faktycznie ujemna lub równa zero, to nierówność (12) jest oczywista. Jeśli zaś u, v, w są dodatnie, to możemy – korzystając z (1) – zamiast szacować iloczyn liczb u, v, w oszacować ich sumy, które – jak pokazaliśmy – są bardzo proste!

Otrzymujemy nierówności

$$\sqrt{(ab - b + 1)(b - 1 + ab)} = \sqrt{u \cdot v} \le \frac{u + v}{2} = \frac{2ab}{2} = ab ,$$

$$\sqrt{(b - 1 + ab)(1 - ab + b)} = \sqrt{v \cdot w} \le \frac{v + w}{2} = \frac{2b}{2} = b ,$$

$$\sqrt{(1 - ab + b)(ab - b + 1)} = \sqrt{w \cdot u} \le \frac{w + u}{2} = \frac{2}{2} = 1 ,$$

które pomnożone stronami dają nierówność (12).

Zad. 8. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P odległy od prostych BC, CA i AB odpowiednio o x, y, z. Wykazać, że

$$xyz \le \frac{2S^2}{27R} ,$$

gdzie S jest polem trójkąta ABC, zaś R długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie.
Łatwo zauważyć, że
$$S = S_{BPC} + S_{APC} + S_{APB} \,,$$
a stąd
$$S = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz \,,$$
czyli
$$2S = ax + by + cz \,.$$

Ponieważ mamy oszacować iloczyn xyz, zastosujemy nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb ax, by, cz.
Otrzymujemy
$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \leq \frac{ax + by + cz}{3} \,,$$
a stąd
$$xyz \leq \frac{(ax + by + cz)^3}{27abc} = \frac{(2S)^3}{27abc} = \frac{8S^3}{27abc} \,.$$

Wykorzystując znany wzór na pole trójkąta
$$S = \frac{abc}{4R} \,,$$
z którego wyznaczamy
$$abc = 4SR \,,$$
otrzymujemy ostatecznie
$$xyz \leq \frac{8S^3}{27abc} = \frac{8S^3}{27 \cdot 4SR} = \frac{2S^2}{27R} \,,$$
co kończy dowód.

2. Zadania optymalizacyjne

W matematyce termin optymalizacja odnosi się do problemu znalezienia minimum lub maksimum zadanej funkcji. Praktyczne wyznaczanie optimum nie jest proste; z reguły zadania optymalizacyjne rozwiązuje się z wykorzystaniem rachunku różniczkowego. Pokażę kilka zadań, do rozwiązania których wystarczy znajomość nierówności między średnimi liczbowymi.

Zad. 9. Wśród prostokątów o przekątnej długości 10 wskaż ten, który ma największe pole.

Rozwiązanie.
Oznaczmy długości boków prostokąta przez a i b. Z warunków zadania i twierdzenia Pitagorasa mamy wtedy $a^2 + b^2 = 100$. Pole prostokąta jest równe $P = ab = \sqrt{a^2 \cdot b^2}$. Stosując nierówność (1) otrzymujemy

$$P = \sqrt{a^2 \cdot b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{100}{2} = 50\,,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 = b^2$, czyli gdy $a = b$. Tak więc największe pole ma kwadrat o boku $a = 5\sqrt{2}$.

Zad. 10. Wśród prostopadłościanów, w których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 wskaż ten, który ma największą objętość.

Rozwiązanie.
Niech a, b, c będą długościami boków prostopadłościanu, zaś V jego objętością. Z warunków zadania mamy

$$4(a + b + c) = 12 \quad \text{czyli} \quad a + b + c = 3 \quad \text{oraz} \quad V = abc.$$

Z nierówności (1) otrzymujemy

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3},$$

a stąd

$$abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3,$$

czyli

$$V \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = 1\,,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = 1$. Zatem największą objętość ma sześcian o krawędzi długości 1.

Zad. 11. Jak dobrać oporności trzech oporników połączonych równolegle o łącznym oporze 10 Ω, aby opór zastępczy był największy?

Rozwiązanie.
Jak wiadomo opór zastępczy R oporów R_1, R_2, R_3 połączonych równolegle wyraża się wzorem

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Stąd mamy

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

Stosując nierówność między średnią harmoniczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$R = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{10}{9},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{10}{3}$. Tak więc największy opór zastępczy otrzymamy, gdy oporniki będą jednakowej oporności.

3. Równania, układy równań i nierówności

Zad. 12. **(OM Wielka Brytania 1975)** Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych równania

(13)

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Rozwiązanie.
Rozważmy liczby $(1-x_1), (x_1-x_2), \dots, (x_{n-1}-x_n), \ \ x_n$. Zauważmy, że

$$(1-x_1) + (x_1-x_2) + \cdots + (x_{n-1}-x_n) + x_n = 1\,,$$

a więc średnia arytmetyczna tych liczb wynosi $\frac{1}{n+1}$. Ta obserwacja oraz postać równania (13) sugerują zastosowanie nierówności (2) między średnią arytmetyczną i kwadratową. Otrzymujemy wtedy

$$\sqrt{\frac{(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2}{n+1}} \geq$$

$$\frac{(1-x_1) + (x_1-x_2) + \cdots + (x_{n-1}-x_n) + x_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 \geq \frac{1}{n+1},$$

przy czym równość zachodzi (a tym samym spełnione jest równanie (13)) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1-x_1) = (x_1-x_2) = \cdots = (x_{n-1}-x_n) = \ x_n.$$

Oznaczając $(1-x_1) = (x_1-x_2) = \cdots = (x_{n-1}-x_n) = \ x_n = a$ otrzymujemy z (13)

$$(n+1)a^2 = \frac{1}{n+1},$$

a stąd

$$|a| = \frac{1}{n+1},$$

czyli

$$a = \pm\frac{1}{n+1}.$$

Mamy więc

(14)

$$(1-x_1)=(x_1-x_2)=\cdots=(x_{n-1}-x_n)=\ \ x_n=\frac{1}{n+1}$$

lub

(15)

$$(1-x_1)=(x_1-x_2)=\cdots=(x_{n-1}-x_n)=\ \ x_n=-\frac{1}{n+1}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy, że w przypadku (14)

$$x_i=1-\frac{i}{n+1}\quad \text{dla}\ \ i=1,2,\dots,n\,,$$

czyli

$$x_1=\frac{n}{n+1},\ \ x_2=\frac{n-1}{n+1},\dots,x_n=\frac{1}{n+1}.$$

W przypadku (15) otrzymujemy sprzeczność.

Istnieje zatem dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych równania (13).

Zad. 13. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases}\dfrac{64}{a}+\dfrac{81}{b}+\dfrac{100}{c} & = & 54\\ a+b+c & = & 13{,}5\end{cases}.$$

<u>Rozwiązanie.</u>
Załóżmy, że liczby dodatnie a,b,c spełniają podany układ. Wtedy mnożąc drugie równanie przez 4 i dodając równania stronami otrzymujemy

(16)

$$\left(\frac{64}{a}+\frac{81}{b}+\frac{100}{c}\right)+4(a+b+c)=108.$$

Ale stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

(17)

$$\left(\frac{64}{a}+\frac{81}{b}+\frac{100}{c}\right)+4(a+b+c)=$$

$$\left(\frac{64}{a}+4a\right)+\left(\frac{81}{b}+4b\right)+\left(\frac{100}{c}+4c\right)=$$

$$2\left(\frac{\frac{64}{a}+4a}{2}\right)+2\left(\frac{\frac{81}{b}+4b}{2}\right)+2\left(\frac{\frac{100}{c}+4c}{2}\right)\geq$$

$$2\left(\sqrt{\frac{64}{a}\cdot 4a}+\sqrt{\frac{81}{b}\cdot 4b}+\sqrt{\frac{100}{c}\cdot 4c}\right)=108\,,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

(18)

$$\frac{64}{a}=4a,\qquad \frac{81}{b}=4b,\qquad \frac{100}{c}=4c.$$

Z (16), (17) i (18) otrzymujemy, że $a=4, b=4{,}5$ i $c=5$. Nietrudno sprawdzić, że otrzymana trójka $(4;4{,}5;5)$ spełnia podany układ, jest więc jedynym jego rozwiązaniem w liczbach dodatnich.

Zad. 14. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ

(19)

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} & = & 3\\ x+y+z & \leq & 12\end{cases}.$$

Rozwiązanie.
Załóżmy, że liczby dodatnie x, y, z spełniają podany układ. Z nierówności (5) dostajemy

$$3=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{3}{z}+\frac{3}{z}\geq$$

$$\frac{6^2}{x+2\cdot\frac{y}{2}+3\cdot\frac{y}{3}}=\frac{36}{x+y+z}\geq\frac{36}{12}=3\,.$$

Stąd wynika, że w przytoczonej nierówności mamy równość, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

(20)

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{z}.$$

Z (19) i (20) dostajemy $x=2, y=4, z=6$. Nietrudno sprawdzić, że otrzymana trójka $(2,4,6)$ spełnia podany układ, jest więc jedynym jego rozwiązaniem w liczbach dodatnich.

Zad. 15. (OM Bułgaria 1968) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których układ równań

(21)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} & = & 1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla każdej znalezionej wartości n podać rozwiązanie.

Rozwiązanie.

Niech liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają układ (21). Wtedy po pomnożeniu stronami obu równań otrzymujemy

(22)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = 9\,.$$

Wyrażenia w nawiasach występują odpowiednio w średniej arytmetycznej i harmonicznej liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, co sugeruje zastosowanie nierówności między tymi średnimi. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\,,$$

czyli
(23)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Z (22) i (23) wnioskujemy, że $n^2 \leq 9$, czyli $n \leq 3$.

Rozwiążemy teraz układ dla $n = 1,2,3$.

1. Dla $n = 1$ otrzymujemy układ

$$\begin{cases} x_1 & = & 9 \\ \dfrac{1}{x_1} & = & 1 \end{cases},$$

który jest oczywiście sprzeczny.

2. Dla $n = 2$ otrzymujemy układ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} & = & 1 \end{cases},$$

który można zapisać w równoważnej postaci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 9 \\ x_1 x_2 & = & 9 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu (można np. zastosować wzory Viete'a lub sprowadzić układ do równania dwukwadratowego) są pary

$$\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}, \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}, \frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right).$$

Są to jedyne rozwiązania układu (21) dla $n = 2$.

3. Dla $n = 3$ otrzymujemy układ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} & = & 1 \end{cases}.$$

Po pomnożeniu stronami równań otrzymamy

(24)
$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 9\,.$$

Z (23) mamy, że

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geq 3^2 = 9\,,$$

przy czym równość (a więc (24)) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = x_3$. Po prostych rachunkach otrzymujemy, że

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3,$$

czyli jedynym rozwiązaniem układu (21) dla $n = 3$ jest trójka $(3, 3, 3)$.

Polecana literatura

1. Witold Bednarek, *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wyd. Oświatowe, Gdańsk 1995
2. Mirosław Grabowski, Karol Szymański, *Zbiór zadań dla uczniów szkół średnich o zainteresowaniach matematycznych*, WSiP, Warszawa 1991
3. Lev Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2000
4. Lev Kourliandtchik, *Powrót do krainy nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2001
5. Aleksander Kubica, Tomasz Szymczyk, *Nierówności*, Perspektiv, Bielsko-Biała 2007
6. Henryk Pawłowski, *Olimpiady i konkursy matematyczne*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń 2006
7. Henryk Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń 2005
8. Henryk Pawłowski, Wojciech Tomalczyk, *Zadania z matematyki dla olimpijczyków*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń 1997
9. *Miniatury matematyczne nr 22 dla szkół gimnazjalnych*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2007