Wojciech Martys
XIV LO im. S. Staszica
Warszawa

Środek ciężkości układu punktów z masami.

Definicja.
Punkt O jest środkiem ciężkości układu punktów z masami (X_i, m_i), wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

Oznaczenie. Fakt, że punkt O jest środkiem ciężkości powyższego układu punktów, będziemy oznaczać

$$O = S((X_1, m_1), (X_2, m_2), \ldots, (X_n, m_n))$$

Twierdzenie 1.
Jeżeli suma mas $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \neq 0$, to środek ciężkości układu (X_i, m_i) istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony.

Dowód.
Rozpatrzmy dowolne punkty O, Y spełniające równanie:

$$\overrightarrow{YO} = \frac{m_1\overrightarrow{YX_1} + m_2\overrightarrow{YX_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{YX_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{1}$$

Punkty takie istnieją, ponieważ możemy wziąć dowolny punkt Y, a punkt O uzyskamy przesuwając punkt Y o wektor, otrzymany po prawej stronie równania (1). Równanie to możemy przekształcić kolejno do postaci:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{OY} + m_1\overrightarrow{YX_1} + m_2\overrightarrow{YX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{YX_n} = \vec{0}$$
$$m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$$

Zatem punkt O jest poszukiwanym środkiem ciężkości. Jeżeli jakiś punkt Y jest również środkiem ciężkości rozpatrywanego układu punktów, to z równania (1) wynika, że $Y = O$, co dowodzi jednoznaczności środka ciężkości.

Twierdzenie 2. (o przegrupowywaniu).
Środek ciężkości się nie zmieni jeśli dowolny podzbiór punktów, z rozpatrywanego układu, zastąpimy ich środkiem ciężkości z masą równą sumie mas zastępowanych punktów. Tzn.

$$S((X_1, m_1), \ldots, (X_n, m_n)) = S((X_1, m_1), \ldots, (X_k, m_k), (S((X_{k+1}, m_{k+1}), \ldots, (X_n, m_n)), m_{k+1}, \ldots, m_n)).$$

Dowód.
Niech punkt O będzie środkiem ciężkości wszystkich punktów, zaś punkt O_1 środkiem ciężkości pewnego podzbioru tych punktów. Zachodzą równości:

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$$

oraz

$$m_1\overrightarrow{O_1X_1} + m_2\overrightarrow{O_1X_2} + \cdots + m_k\overrightarrow{O_1X_k} = \vec{0}.$$

Chcemy udowodnić, że zachodzi równość:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\overrightarrow{OO_1} + m_{k+1}\overrightarrow{OX_{k+1}} + m_{k+2}\overrightarrow{OX_{k+2}} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\overrightarrow{OO_1} + (m_{k+1}\overrightarrow{OX_{k+1}} + m_{k+2}\overrightarrow{OX_{k+2}} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n}) =$$
$$= (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)\overrightarrow{OO_1} + (m_1\overrightarrow{O_1X_1} + m_2\overrightarrow{O_1X_2} + \cdots + m_k\overrightarrow{O_1X_k}) +$$
$$+ (m_{k+1}\overrightarrow{OX_{k+1}} + m_{k+2}\overrightarrow{OX_{k+2}} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n}) =$$
$$= m_1(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1X_1}) + m_2(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1X_2}) + \cdots + m_k(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1X_k}) +$$
$$+ m_{k+1}\overrightarrow{OX_{k+1}} + m_{k+2}\overrightarrow{OX_{k+2}} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} =$$
$$m_1\overrightarrow{OX_1} + m_2\overrightarrow{OX_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$$

Zadania.

1. Wykazać, że $S = S((A, a), (B, b))$ należy do odcinka AB i dzieli go w stosunku $AS : BS = b : a$.
2. Udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie.
3. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$, zaś punkty P i Q są środkami jego przekątnych. Pokazać, że odcinki KM, LN i PQ mają wspólny środek.
4. Punkty $A_1, B_1, \ldots, F_1$ są odpowiednio środkami boków $AB, BC, \ldots, FA$ sześciokąta $ABCDEF$. Udowodnić, że środki ciężkości trójkątów $A_1C_1E_1$ i $B_1D_1F_1$ pokrywają się.
5. Pokazać, że jeśli wielokąt ma kilka osi symetrii, to przecinają się one w jednym punkcie.
6. Udowodnić twierdzenie *Cevy*.
7. Punkty K, L, M, N należą odpowiednio do boków AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$. Wiadomo, że
$$\frac{AK}{KB} = \frac{DM}{MC} = \alpha \quad \text{oraz} \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AN}{ND} = \beta.$$
Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że
$$\frac{NP}{PL} = \alpha \quad \text{i} \quad \frac{KP}{PM} = \beta.$$
8. Trzy muchy chodzą po obwodzie trójkąta w taki sposób, że ich środek ciężkości nie porusza się. Wiadomo, że jedna z much przeszła cały obwód. Udowodnić, że środek ciężkości much pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta. Przyjmujemy, że muchy mają równe masy i pomijalne rozmiary.
9. Na okręgu znajduje się n punktów z jednakowymi masami. Punkt M jest środkiem ciężkości pewnych $n-2$ spośród tych punktów. Prosta k przechodzi przez M i jest prostopadła do prostej wyznaczonej przez pozostałe dwa punkty. Udowodnić, że wszystkie takie proste k mają wspólny punkt.

Rozwiązania zadań.

1. Środek ciężkości S spełnia równie

$$a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} = \vec{0}, \quad \text{czyli} \quad a\overrightarrow{SA} = b\overrightarrow{BS}.$$

Stąd wynika, że punkty A, S, B są współliniowe oraz $a|\overrightarrow{SA}| = b|\overrightarrow{BS}|$. Przekształcając otrzymujemy

$$\frac{SA}{SB} = \frac{b}{a}.$$

2. Rozpatrzmy układ wierzchołków trójkąta (punkty A, B, C) z jednakowymi masami. Niech punkt $M = S((A, m), (B, m))$. Punkt M jest środkiem boku AB. Zgodnie z twierdzeniem o przegrupowywaniu

$$S((A, m), (B, m), (C, m)) = S((C, m), (M, 2m)).$$

Wynika stąd, że środek ciężkości leży na środkowej CM i dzieli ją w stosunku $2:1$ licząc od punktu C. Analogicznie dowodzimy, że środek ciężkości leży na pozostałych środkowych trójkąta i dzieli każdą z nich w odpowiednim stosunku.

3. Rozpatrzmy układ wierzchołków czworokąta z jednakowymi masami i wyznaczmy środek ciężkości tego układu punktów. Można to zrobić na kilka sposobów, korzystając z twierdzenia o przegrupowywaniu.

$$S((A, m), (B, m), (C, m), (D, m)) = S((K, 2m), (M, 2m) = S((L, 2m), (N, 2m)) = S((P, 2m), (Q, 2m)).$$

Zatem środek ciężkości tego układu jest środkiem każdego z odcinków KM, LN, PQ.

4. Rozpatrzmy układ wierzchołków sześciokąta z jednakowymi masami. Wyznaczmy środek ciężkości tego układu punktów, grupując je na dwa sposoby.

$$S((A, m), (B, m), \ldots, (F, m)) = S((A_1, 2m), (C_1, 2m), (E_1, 2m)) = S((B_1, 2m), (D_1, 2m), (F_1, 2m)).$$

Widzimy, że środek ciężkości układu wszystkich wierzchołków sześciokąta pokrywa się ze środkami ciężkości obu rozpatrywanych trójkątów.

5. Rozpatrzmy układ wierzchołków wielokąta z jednakowymi masami. Oś symetrii wielokąta jest jednocześnie osią symetri figury utworzonej z samych wierzchołków. Zatem obrazem środka ciężkości tego układu musi być ten sam punkt. Stąd każda oś symetrii musi przechodzić przez środek ciężkości tego układu.

6. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Udowodnimy, że proste AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

Niech punkt S będzie środkiem ciężkości następującego układu punktów z masami:

$$S = S((A, \frac{CQ}{QA}), (B, \frac{CP}{PB}), (C, 1)).$$

Zuważmy, że

$$Q = S((A, \frac{CQ}{QA}), (C, 1)), \quad P = S((B, \frac{CP}{PB}), (C, 1)).$$

Z twierdzenia o przegrupowywaniu wynika, że

$$S = S((Q, 1 + \frac{CQ}{QA}), (B, \frac{CP}{PB})) \quad \text{oraz} \quad S = S((P, 1 + \frac{CP}{PB}), (A, \frac{CQ}{QA})).$$

Zatem środek ciężkości S jest punktem przecięcia prostych AP i BQ. S leży także na prostej CR wtedy i tylko wtedy, gdy

$$R = S((A, \frac{CQ}{QA}), (B, \frac{CP}{PB})).$$

To jest z kolei równoważne z równością

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{CP}{PB}}{\frac{CQ}{QA}},$$

a po przekształceniu z

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

7. Rozpatrzy układ punktów z masami:

$$(A, 1), (B, \alpha), (C, \alpha\beta), (D, \beta).$$

Środek ciężkości tego układu oznaczmy przez P'. Wykażemy, że $P' = P$. Zauważmy, że

$$K = S((A, 1), (B, \alpha)), \quad M = S((D, \beta), (C, \alpha\beta)), \quad L = S((B, \alpha), (C, \alpha\beta)), \quad N = S((A, 1), (D, \beta)).$$

Stąd, odpowiednio grupując, widzimy, że:

$$P' = S((K, \alpha + 1), (M, \alpha\beta + \beta)),$$

oraz

$$P' = S((N, 1 + \beta), (L, \alpha + \alpha\beta)).$$

Okazuje się, że punkt P' leży zarówno na prostej KM jak i na prostej NL, czyli $P' = P$. Korzystając z zadania 1 otrzymujemy

$$\frac{KP}{PM} = \frac{\alpha\beta + \beta}{\alpha + 1} = \beta,$$

$$\frac{NP}{PL} = \frac{\alpha + \alpha\beta}{1 + \beta} = \alpha.$$

8. Rozważmy układ punktów z masami $(X, 1), (Y, 2)$, gdzie punkt X jest położeniem muchy, która przeszła cały obwód, zaś punkt Y jest położeniem środka ciężkości pozostałych dwóch much. Punkt $Z = S((X, 1), (Y, 2))$ jest środkiem ciężkości wszystkich much. Zauważmy, że przy dowolnym położeniu much, punkt Y należy do trójkąta ABC, oraz $Z = J_X^{\frac{2}{3}}(Y)$. Jeżeli $X = A$, tzn. wyróżniona mucha znajduje się w wierzchołku A trójkąta ABC, to $Z = J_A^{\frac{2}{3}}(Y)$. Stąd Z należy do trójkąta $AB'C'$ będącego obrazem trójkąta ABC w rozpatrywanej jednokładności. Rozpatrując analogicznie położenia wyróżnionej muchy w wierzchołkach B i C, wykazujemy, że środek ciężkości Z należy także do trójkątów $A'BC'$ i $A'BC'$, będących obrazami trójkąta ABC odpowiednio w jednokładnocich $J_B^{\frac{2}{3}}$ i $J_C^{\frac{2}{3}}$. Jedynym punktem wspólnym trójkątów $AB'C'$,$A'BC'$,$A'B'C$ jest środek ciężkości trójkąta ABC, co kończy dowód.

9. Przyjmijmy następujące oznaczenia: O-środek okręgu, A, B-dwa wyróżnione punkty, K-środek odcinaka AB, N-środek ciężkości wszystkich n punktów. Udowodnimy, że punkt P, będący punktem przecięcia prostej k z prostą ON jest stały (nie zależy o wyboru punktów A, B). Punkt K jest środkiem ciężkości dwóch punktów (A i B), punkt M jest środkiem ciężkości pozostałych $n-2$ punktów. Wynika stąd, że środek ciężkości wszystkich n punktów leży na odcinku NK i zachodzi równość

$$\frac{NK}{NM} = \frac{n-2}{2}.$$

Prosta k i prosta OK są prostopadłe do prostej AB, więc są równoległe. Korzystając z podobieństwa trójkątów MNP i KNO otrzymujemy

$$\frac{NO}{NP} = \frac{NK}{NM} = \frac{n-2}{2}.$$

Ponieważ punkty O i N są stałe, to punkut P również.