Tomasz Szymczyk
V LO w Bielsku-Białej

Środek ciężkości punktów z masami – jeszcze kilka zadań

Proponuję uzupełnienie do wystąpienia Wojciecha Martysa z XIV Liceum Ogólnokształcącego w Warszawie. Przedstawiam serię zadań wraz ze szkicami rozwiązań. Poniżej przypominam kilka przydatnych faktów. Niektóre z nich uzasadniał Wojciech Martys w czasie swojego wystąpienia podczas konferencji.
Do wszystkich zadań odpowiednie rysunki proszę wykonać samodzielnie.

Przydatne fakty

(1) Punkt A_i z umieszczoną w nim masą m_i zapisywać będziemy (A_i, m_i) lub $m_i A_i$.

(2) Punkt O jest środkiem ciężkości układu $\{m_1 A_1, m_2 A_2, ..., m_n A_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$.

(3) Jeżeli $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \neq 0$, to środek ciężkości układu $\{m_1 A_1, m_2 A_2, ..., m_n A_n\}$ istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie.

(4) Jeżeli punkt Z jest środkiem ciężkości układu $\{m_1 A, m_2 B\}$, gdzie $m_1 > 0$ i $m_2 > 0$, to Z należy do odcinka AB oraz $AZ : BZ = m_2 : m_1$.

(5) Niech dany będzie układ $\{m_1 A_1, m_2 A_2, ..., m_n A_n\}$. Jeżeli Z jest środkiem ciężkości tego układu, a M jest środkiem ciężkości układu $\{m_1 A_1, m_2 A_2, ..., m_k A_k\}$, to Z jest środkiem ciężkości układu $\{(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)M, m_{k+1} A_{k+1}, ..., m_n A_n\}$.

Fakt, że Z jest środkiem ciężkości układu $\{m_1 A, m_2 B\}$ będziemy również zapisywać $Z = \dfrac{m_1 A + m_2 B}{m_1 + m_2}$. Analogicznie dla większej liczby punktów; jeżeli Z jest środkiem ciężkości układu $\{m_1 A_1, m_2 A_2, ..., m_n A_n\}$, to $Z = \dfrac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_n A_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$.

Zadanie 1.

Na boku AC trójkąta ABC wybrano taki punkt M, że $CM = 2 \cdot AM$, a na przedłużeniu boku BC poza punkt B wybrano taki punkt N, że $BN = BC$. Wykazać, że prosta MN przechodzi przez środek boku AB trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Umieśćmy w punktach C i N masy równe 1, a w punkcie A masę równą 2. Ponieważ $CM = 2 \cdot AM$, więc punkt M jest środkiem ciężkości układu $\{2A, 1C\}$. Stąd środkiem ciężkości układu $\{3M, 1N\}$ jest punkt leżący na odcinku MN. Jednocześnie środkiem układu $\{2A, 1C, 1N\}$ jest punkt P, który jest jednocześnie środkiem ciężkości układu $\{2A, 2B\}$, czyli środek odcinka AB. Zauważmy, że

$$P = \frac{2A + 2B}{4} = \frac{2A + 1C + 1N}{4} = \frac{3M + 1N}{4},$$

a to oznacza, że odcinki AB i MN przecinają się w punkcie P, czyli prosta MN przechodzi przez środek boku AB trójkąta ABC.

Zadanie 2.

Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty K, L, M, że $AK=2BK$, $BL=3CL$, $CM=4AM$. Odcinki CK i LM przecinają się w punkcie P. Wyznaczyć $\frac{CP}{KP}$.

Rozwiązanie

Weźmy pod uwagę układ $\{4A, 8B, 24C, 1C\}$. Zauważmy, że $L=\frac{8B+24C}{32}$, $M=\frac{4A+1C}{5}$. Niech Z będzie środkiem ciężkości układu $\{4A, 8B, 24C, 1C\}$. Ponieważ

$$Z=\frac{4A+8B+1C+24C}{37}=\frac{(4A+1C)+(8B+24C)}{37}=\frac{5M+32L}{37},$$

więc Z należy do odcinka LM.

Z drugiej strony $K=\frac{4A+8B}{12}$, czyli

$$Z=\frac{4A+8B+1C+24C}{37}=\frac{(4A+8B)+(1C+24C)}{37}=\frac{12K+25C}{37},$$

więc Z należy do odcinka CK. Zatem $Z=P$ i stąd $\frac{CP}{KP}=\frac{12}{25}$.

Zadanie 3.

Czworokąt $ABCD$ opisany jest na okręgu. Punkty M, N, P i Q są punktami styczności boków odpowiednio AB, BC, CD i DA z okręgiem wpisanym w ten czworokąt. Odcinki MP i NQ przecinają się w punkcie S. Wiedząc, że $AM=AQ=a$, $BM=BN=b$, $CN=CP=c$ i $DP=DQ=d$, wyznaczyć $\frac{MS}{PS}$.

Rozwiązanie

Umieśćmy w punktach A, B, C, D masy odpowiednio równe $1/a$, $1/b$, $1/c$, $1/d$. Wtedy

$$M=\frac{\frac{1}{a}A+\frac{1}{b}B}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\quad N=\frac{\frac{1}{b}B+\frac{1}{c}C}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},\quad P=\frac{\frac{1}{c}C+\frac{1}{d}D}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},\quad Q=\frac{\frac{1}{d}D+\frac{1}{d}D}{\frac{1}{d}+\frac{1}{a}}.$$

Niech Z będzie środkiem ciężkości układu $\left\{\frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C, \frac{1}{d}D\right\}$. Stąd

$$Z=\frac{\frac{1}{a}A+\frac{1}{b}B+\frac{1}{c}C+\frac{1}{d}D}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{\left(\frac{1}{a}A+\frac{1}{b}B\right)+\left(\frac{1}{c}C+\frac{1}{d}D\right)}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)M+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)P}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}.$$

To oznacza, że Z należy do odcinka MP. Analogicznie pokazujemy, że Z należy do odcinka NQ, więc $Z=S$. Stąd $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)MS=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)PS$, czyli

$$\frac{MS}{PS}=\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{(c+d)ab}{(a+b)cd}.$$

Zadanie 4.

W trójkąt ABC wpisano okrąg, który jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A', B', C'. Wykazać, że odcinki AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech $AB' = AC' = p$, $BC' = BA' = q$, $CA' = CB' = r$. Umieszczając w wierzchołkach A, B, C trójkąta ABC masy odpowiednio równe $1/p$, $1/q$, $1/r$ stwierdzamy, że C' jest środkiem ciężkości układu $\left\{\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B\right\}$, stąd środek ciężkości układu $\left\{\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B, \frac{1}{r}C\right\}$ leży na odcinku CC'. Analogicznie pokazujemy, że środek ciężkości układu $\left\{\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B, \frac{1}{r}C\right\}$ leży na odcinkach BB' i CC'. Zatem te odcinki przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5.

Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty M i P, że $AM = 4CM$ i $CP = 2BP$. Odcinki AP i BM przecinają się w punkcie Q. Wiadomo, że $[BPQ] = 2$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta o wierzchołach X, Y, Z. Obliczyć pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$[ABC] = 3 \cdot [ABP] = 3 \cdot [BPQ] \cdot \frac{AP}{PQ}.$$

Umieśćmy teraz w wierzchołkach A, B, C trójkąta ABC masy odpowiednio równe 1, 8, 4. Niech punkt Z będzie środkiem ciężkości układu $\{1A, 8B, 4C\}$. Wtedy:

$$Z = \frac{1A + 8B + 4C}{13} = \frac{(1A + 4C) + 8B}{13} = \frac{5M + 8B}{13},$$

zatem Z leży na odcinku BM. Analogicznie

$$Z = \frac{1A + 8B + 4C}{13} = \frac{1A + (4C + 8B)}{13} = \frac{1A + 12P}{13},$$

czyli Z leży na odcinku AP, stąd $Z = Q$.

Ponieważ Q jest środkiem ciężkości układu $\{1A, 12P\}$, więc $AQ = 12PQ$, a stąd

$$AP = AQ + PQ = 12PQ + PQ = 13PQ$$

Dostajemy teraz $\frac{AP}{PQ} = 13$. Możemy teraz wyznaczyć pole trójkąta ABC:

$$[ABC] = 3 \cdot [BPQ] \cdot \frac{AP}{PQ} = 3 \cdot 2 \cdot 13 = 78.$$

Zadanie 6.

W trójkąt ABC wpisano okrąg ω, który jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Na bokach AB i AC danego trójkąta wybrano takie punkty M i N, że prosta MN jest styczna do okręgu ω w punkcie T. Odcinki NP i MQ przecinają się w punkcie R. Rozstrzygnąć, czy punkty A, T, R są współliniowe.

Rozwiązanie

Niech $AP=AQ=a$, $MP=MT=m$, $NQ=NT=n$. Wtedy $AM=a-m$ i $AN=a-n$. Jeżeli umieścimy w punkcie A masę 1, to aby środkiem ciężkości układu $\{1A, xP\}$ był punkt M należy przyjąć $x=\dfrac{a-m}{m}$ (proszę to sprawdzić!). Analogicznie, aby środkiem ciężkości układu $\{1A, yQ\}$ był punkt N należy przyjąć $y=\dfrac{a-n}{n}$. Możemy zatem zapisać

$$(1+x)M=1A+xP, \quad (1+y)N=1A+yQ.$$

Niech Z' będzie środkiem ciężkości układu $\{1A, xP, yQ\}$, więc

$$Z'=\frac{1A+xP+yQ}{1+x+y}=\frac{(1+x)M+yQ}{1+x+y}.$$

Stąd punkt Z' należy do odcinka MQ. Analogicznie pokazuje się, że Z' należy do odcinka NP. Oznacza to, że $Z'=R$. Można więc zapisać

$$(1+x+y)R=1A+xP+yQ.$$

Oznaczmy teraz przez Z środek ciężkości układu $\{1A, xP, 1A, yQ\}$. Wtedy:

$$Z=\frac{1A+xP+1A+yQ}{2+x+y}=\frac{(1+x)M+(1+y)N}{(1+x)+(1+y)}=\frac{\frac{1}{m}M+\frac{1}{n}N}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}.$$

Oznacza to, że Z jest środkiem ciężkości układu $\left\{\frac{1}{m}M, \frac{1}{n}N\right\}$. Jak łatwo sprawdzić środkiem ciężkości układu $\left\{\frac{1}{m}M, \frac{1}{n}N\right\}$ jest punkt T, więc $Z=T$. Stąd

$$T=Z=\frac{(1A+xP+yQ)+1A}{2+x+y}=\frac{(1+x+y)R+1A}{2+x+y},$$

więc T leży na odcinku AR co oznacza, że punkty A, T, R są współliniowe.

Zadanie 7.

Podstawą ostrosłupa $SABCD$ jest równoległobok $ABCD$. Płaszczyzna α przecina krawędzie boczne SA, SB, SC i SD tego ostrosłupa odpowiednio w punktach A', B', C' i D'. Wiedząc, że $SA'=\frac{1}{3}SA$, $\quad SB'=\frac{1}{5}SB \quad$ i $\quad SC'=\frac{1}{4}SC$, obliczyć $\dfrac{SD'}{SD}$.

Rozwiązanie

Na początku pokażemy, że w równoległoboku $ABCD$ środkiem ciężkości układu $\{1A, -1B, 1C\}$ jest punkt D. Rzeczywiście, jeżeli środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$ jest punkt O, a punkt Z – środkiem ciężkości układu $\{1A, -1B, 1C\}$, to

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+(-1)\cdot\overrightarrow{OB}+1\cdot\overrightarrow{OC}}{1-1+1}=1\cdot\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OD}-1\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}.$$

Oznacza to, że $Z=D$.

Środkiem ciężkości układu $\{1A, 2S\}$ jest punkt A', czyli $3A'=1A+2S$. Analogicznie: $-5B'=-1B-4S$ i $4C'=1C+3S$. Weźmy teraz układ $\{1A, 2S, -1B, -4S, 1C, 3S\}$, którego środkiem ciężkości jest punkt Z. Wtedy

$$Z=\frac{(1A+2S)+(-1B-4S)+(1C+3S)}{1+2-1-4+1+3}=\frac{3A'-5B'+4C'}{2},$$

co oznacza, że punkt Z leży na płaszczyźnie α.

Z drugiej strony

$$Z=\frac{(1A+(-1)B+1C)+(2S+(-4)S+3S)}{2}=\frac{1D+1S}{2},$$

więc punkt Z leży na odcinku SD, czyli $Z=D'$. Z ostatniej równości wynika zaś, że punkt D' jest środkiem odcinka SD, czyli $\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{1}{2}$.

Zadanie 8.

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$, którego podstawą jest trójkąt ABC. Na krawędziach bocznych SA, SB, SC wybrano odpowiednio punkty A', B', C' takie, że $SA'=\frac{2}{5}SA$, $SB'=\frac{3}{5}SB$, $SC'=\frac{4}{5}SC$. Płaszczyzna α, wyznaczona przez punkty A', B', C', przecina wysokość SM tego ostrosłupa w punkcie Q. Wyznaczyć $\dfrac{SQ}{SM}$.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy układy: $\left\{1A, \frac{3}{2}S\right\}$, $\left\{1B, \frac{2}{3}S\right\}$, $\left\{1C, \frac{1}{4}S\right\}$. Łatwo sprawdzić, że środkami ciężkości tych układów są odpowiednio punkty: A', B', C', więc możemy zapisać równości:

$$A'=\frac{1A+\frac{3}{2}S}{\frac{5}{2}},\quad B'=\frac{1B+\frac{2}{3}S}{\frac{5}{3}},\quad C'=\frac{1C+\frac{1}{4}S}{\frac{5}{4}},$$

albo

$$\frac{5}{2}A'=1A+\frac{3}{2}S,\quad \frac{5}{3}B'=1B+\frac{2}{3}S,\quad \frac{5}{4}C'=1C+\frac{1}{4}S.$$

Ponieważ M jest spodkiem wysokości danego ostrosłupa (środek ciężkości trójkąta równobocznego ABC), więc $1A+1B+1C=3M$. Niech teraz Z będzie środkiem ciężkości układu $\left\{1A, \frac{3}{2}S, 1B, \frac{2}{3}S, 1C, \frac{1}{4}S\right\}$. Zatem

$$\frac{65}{12}Z=\left(1A+\frac{3}{2}S\right)+\left(1B+\frac{2}{3}S\right)+\left(1C+\frac{1}{4}S\right)=\frac{5}{2}A'+\frac{5}{3}B'+\frac{5}{4}C',$$

stąd punkt Z leży na płaszczyźnie α.
Z drugiej strony

$$\frac{65}{12}Z=(1A+1B+1C)+\left(\frac{3}{2}S+\frac{2}{3}S+\frac{1}{4}S\right)=3M+\frac{29}{12}S,$$

czyli punkt Z należy do odcinka SM. Oznacza to, że $Z=Q$, więc $\frac{29}{12}SQ=3QM$. Ponieważ $SM=SQ+QM=SQ+\frac{29}{36}SQ=\frac{65}{36}SQ$, więc $\dfrac{SQ}{SM}=\dfrac{36}{65}$.

* * * * *

Literatura

1. Bałk M., Bołtiański B., *Geometria mas.* „Nauka”, Moskwa 1987 (po rosyjsku).