Henryk Pawłowski – IV LO, Toruń

Od wzorów skróconego mnożenia do klasycznych nierówności

Ucząc w szkole wzorów skróconego mnożenia, zaczynamy od dowodzenia dwóch tożsamości:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Następnie używamy ich do przekształcania wyrażeń. Tym razem zróbmy z nich inny użytek. Dodajmy je stronami, a otrzymamy równość $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$, a stąd nierówność $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ (bo $(a-b)^2 \geq 0$), czyli kolejno nierówności:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \left(\text{bo } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \left|\frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{a+b}{2}\right).$$

Lewa i prawa strona ostatniej nierówności to odpowiednio średnia kwadratowa i średnia arytmetyczna dwóch liczb a i b. Warto przy tym zauważyć, że średnie te są równe, gdy $(a-b)^2 = 0$, czyli gdy $a = b$.

Zatrzymajmy się przy tej nierówności, zakładając o liczbach a i b, że są one dodatnie. Skoro już wiemy, że średnia kwadratowa dwóch liczb rzeczywistych a i b (a więc w szczególności dodatnich) jest co najmniej równa ich średniej arytmetycznej, więc dla dowolnych czterech liczb dodatnich a, b, c i d dostajemy:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}}{2}} \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}{2}} \geq \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

czyli podobną zależność między średnią kwadratową czterech liczb dodatnich a, b, c i d.

Stosując ją do czterech liczb dodatnich a, b, c i $\frac{a+b+c}{3}$, otrzymujemy kolejno nierówności:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{4}} \geq \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4},$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{4}} \geq \frac{3\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{3},$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{4} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq 4\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

czyli ostatecznie nierówność $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$, wyrażającą zależność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną trzech liczb dodatnich *a*, *b* i *c*.

Korzystając z zależności między rozważanymi średnimi dwóch i czterech liczb dodatnich, otrzymujemy dla dowolnych ośmiu liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ co następuje:

$$\sqrt{\frac{\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_8^2\right)}{8}} = \sqrt{\frac{\frac{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)}{4}+\frac{\left(a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2\right)}{4}}{2}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2+\left(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\right)^2}{2}} \geq \frac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}+\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}}{2} =$$

$= \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$, czyli nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną ośmiu liczb dodatnich. Z kolei stosując ją do ośmiu liczb dodatnich

$a_1, a_2, a_3, a_4\ a_5, \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}, \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}, \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$

dostajemy kolejno nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+3\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2}{8}} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+3\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}}{8},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+3\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2}{8}} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5},$$

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+3\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2}{8}\geq\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2,$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+3\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2\geq 8\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2,$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+\geq 5\cdot\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2,$$

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}{5}\geq\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2,$$

czyli ostatecznie zależność $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}{5}}\geq\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$

między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną pięciu liczb dodatnich.

Powtarzając to rozumowanie dla 8 liczb dodatnich:

1) $a_1, a_2, a_3, a_4\ a_5, a_6, \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}, \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6},$

2) $a_1, a_2, a_3, a_4\ a_5, a_6, a_{7,}\ \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}{7},$

otrzymamy nierówności między rozważanymi średnimi dla sześciu i siedmiu dowolnych liczb dodatnich.

Zauważmy teraz, że dla każdej liczby naturalnej *n*, jeśli średnia kwadratowa dowolnych *n* liczb dodatnich jest co najmniej równa ich średniej arytmetycznej, to średnia kwadratowa dowolnych 2*n* liczb dodatnich jest co najmniej równa ich średniej arytmetycznej. W samej rzeczy:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2n}^2}{2n}}=\sqrt{\frac{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}+\frac{a_{n+1}^2+\ldots+a_{2n}^2}{n}}{2}}\geq\sqrt{\frac{\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\left(\frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}\right)^2}{2}}\geq$$

$$\geq\frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}.$$

Wobec tego nierówność między średnią arytmetyczną dowolnych *n* liczb dodatnich mamy w przypadku, gdy *n* jest potęgą dwójki. Niech więc *n* będzie liczbą naturalną zawartą między dwiema kolejnymi potęgami dwójki, tzn. niech $2^{k-1}<n<2^k$ dla pewnego naturalnego *k*. Stosując udowodnioną przed chwilą nierówność dla 2^k liczb dodatnich

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n,}\ \underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}_{2^k - n},$$

otrzymujemy kolejno nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \left(2^k - n\right)\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2}{2^k}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n + \left(2^k - n\right) \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}{2^k},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \left(2^k - n\right)\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2}{2^k}} \geq \frac{n \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \left(2^k - n\right) \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}{2^k},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \left(2^k - n\right)\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2}{2^k}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \left(2^k - n\right)\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2}{2^k} \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2,$$

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \left(2^k - n\right)\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 \geq 2^k \cdot \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2,$$

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq n \cdot \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2,$$

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zatem nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną dowolnych *n* liczb dodatnich mamy udowodnioną dla każdej liczby naturalnej *n*.

Powróćmy do zacytowanych na początku tego artykułu tożsamości (1) i (2). Tym razem odejmijmy je stronami (od (1) odejmujemy (2)). Dostaniemy równość $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, a z niej nierówność $4ab \leq (a+b)^2$, która jest równoważna nierówności $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, a ta dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nierówności $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, wyrażającej zależność między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dwóch liczb nieujemnych *a* i *b*. Nierówność ta oczywiście staje się równością, gdy $(a-b)^2=0$, czyli gdy $a=b$.

Stosując dwukrotnie tę nierówność otrzymujemy dla dowolnych czterech liczb nieujemnych *a*, *b*, *c* i *d*., co następuje:

$$\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}\leq\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\leq\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}=\frac{a+b+c+d}{4},$$

czyli zależność między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną czterech liczb nieujemnych *a*, *b*, *c* i *d*.

Z nierówności tej, zastosowanej do liczb dodatnich *a*, *b*, *c* i $\frac{a+b+c}{3}$, otrzymujemy nierówność $\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}}\leq\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$, a niej równoważne jej nierówności:

$$\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}}\leq\frac{3\cdot\frac{a+b+c}{3}+\frac{a+b+c}{3}}{4},$$

$$\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}}\leq\frac{4\cdot\frac{a+b+c}{3}}{4},$$

$$\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}}\leq\frac{a+b+c}{3},$$

$$a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4,$$

$$a\cdot b\cdot c\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

$$\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\leq\frac{a+b+c}{3}.$$

Ostatnia nierówność wyraża zależność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dowolnych trzech liczb dodatnich. Dowód tej nierówności w ogólnym przypadku dostajemy tak, jak nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną.

Mamy więc już zależności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

między średnimi: kwadratową, arytmetyczną i geometryczną dowolnych *n* liczb dodatnich.

Powróćmy do nierówności $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dzieląc obie jej strony przez ab otrzymujemy nierówność $\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{\sqrt{ab}}{ab}$, a stąd kolejno równoważne jej nierówności:

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b},$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Ostatnia z nich wyraża zależność między średnią geometryczną i średnią harmoniczną dowolnych dwóch liczb dodatnich a i b. Korzystając z niej dwukrotnie, otrzymujemy dla dowolnych czterech liczb dodatnich a, b, c, d, co następuje:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \geq \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}} \geq \frac{2}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

a więc nierówność między średnią geometryczną i średnią harmoniczną czterech liczb dodatnich. Stosując ją do liczb dodatnich $a, b, c, \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ dostajemy kolejno nierówności:

$$\sqrt[4]{abc \cdot \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},$$

$$\sqrt[4]{abc \cdot \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},$$

$$\sqrt[4]{abc \cdot \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}} \geq \frac{4}{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

$$abc \cdot \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^4,$$

$$abc\cdot \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^3,$$

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Ostatnia nierówność wyraża zależność między średnią geometryczną i średnią harmoniczną trzech liczb dodatnich. Uogólnienie jej dla dowolnych *n* liczb dodatnich uzyskujemy tak jak zależność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną.

Tak więc dla dowolnych n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Rozpatrzmy na koniec jeszcze jedną, łatwą do sprawdzenia, tożsamość:

(3) $\quad (a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

Z niej wynika nierówność:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2), \text{ gdyż } (a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0,$$

czyli nierówność

$$a_1b_1+a_2b_2 \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2)}\cdot\sqrt{(b_1^2+b_2^2)}.$$

Zachodzi ona oczywiście dla dowolnych dwóch par (a_1, a_2) i (b_1, b_2) liczb rzeczywistych.

Korzystając z niej, otrzymujemy dla dowolnych dwóch trójek (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3),

co następuje:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=(a_1b_1+a_2b_2)+a_3b_3 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}+a_3b_3 \leq$$
$$\leq \sqrt{\sqrt{a_1^2+a_2^2}^{\,2}+a_3^2}\cdot\sqrt{\sqrt{b_1^2+b_2^2}^{\,2}+b_3^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

a więc nierówność:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}\cdot\sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}.$$

Analogicznie dla dowolnych dwóch czwórek (a_1, a_2, a_3, a_4) i (b_1, b_2, b_3, b_4) mamy nierówności:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} + a_4b_4 \le$$

$$\le \sqrt{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^{\,2} + a_4^2} \cdot \sqrt{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}^{\,2} + b_4^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

a stąd nierówność:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}.$$

I ogólnie: dla dowolnych dwóch n-ek $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ liczb rzeczywistych zachodzi nierówność:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

znana jako nierówność Cauchy'ego – Buniakowskiego – Schwarza (lub przez „niektórych" jako C – B – S.)