Kłopoty z kwantyfikatorami

Joanna Jaszuńska

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

- *Wykaż, że dla dowolnej liczby n...* — „skoro dowolna, to **weźmy** $n = 1$”

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

- *Wykaż, że dla dowolnej liczby n...* — „skoro dowolna, to **weźmy** $n = 1$"
- *Wykaż, że dla każdego trójkąta...* — „**najlepiej**, jak jest równoboczny"

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

- *Wykaż, że dla dowolnej liczby n...* — „skoro dowolna, to **weźmy** $n = 1$”
- *Wykaż, że dla każdego trójkąta...* — „**najlepiej**, jak jest równoboczny”
- *W trójkącie danych jest 5 punktów...* — „**rozważmy** punkty ułożone tak...”

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

- *Wykaż, że dla dowolnej liczby n...* — „skoro dowolna, to **weźmy** $n = 1$”

- *Wykaż, że dla każdego trójkąta...* — „**najlepiej**, jak jest równoboczny”

- *W trójkącie danych jest 5 punktów...* — „**rozważmy** punkty ułożone tak...”

- *Wykaż, że gracz A ma strategię wygrywającą* — „wystarczy zagrać tak, wtedy przeciwnik **powinien** zagrać tak, na co gracz A odpowie tak i wygra”

Niektóre z licznych kłopotów z kwantyfikatorami

- *Wykaż, że dla dowolnej liczby n...* — „skoro dowolna, to **weźmy** $n = 1$”

- *Wykaż, że dla każdego trójkąta...* — „**najlepiej**, jak jest równoboczny”

- *W trójkącie danych jest 5 punktów...* — „**rozważmy** punkty ułożone tak...”

- *Wykaż, że gracz A ma strategię wygrywającą* — „wystarczy zagrać tak, wtedy przeciwnik **powinien** zagrać tak, na co gracz A odpowie tak i wygra”

- *Czy możliwe jest...?* — „spróbujmy tak... **nie wyszło**, więc nie da się”

Niektóre z licznych metod radzenia sobie z nimi

Niektóre z licznych metod radzenia sobie z nimi

- Metoda ekstremum

Niektóre z licznych metod radzenia sobie z nimi

- Metoda ekstremum

- Suma wszystkich elementów lub wybranej części

Niektóre z licznych metod radzenia sobie z nimi

- Metoda ekstremum
- Suma wszystkich elementów lub wybranej części
- Zasada szufladkowa Dirichleta

Niektóre z licznych metod radzenia sobie z nimi

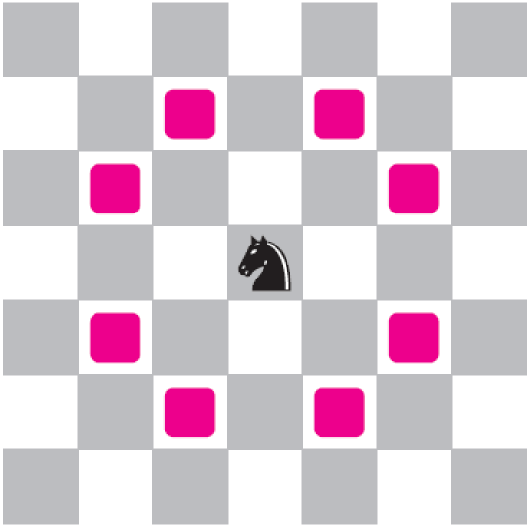
- Metoda ekstremum
- Suma wszystkich elementów lub wybranej części
- Zasada szufladkowa Dirichleta
- Metoda niezmienników

Zadanie

Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

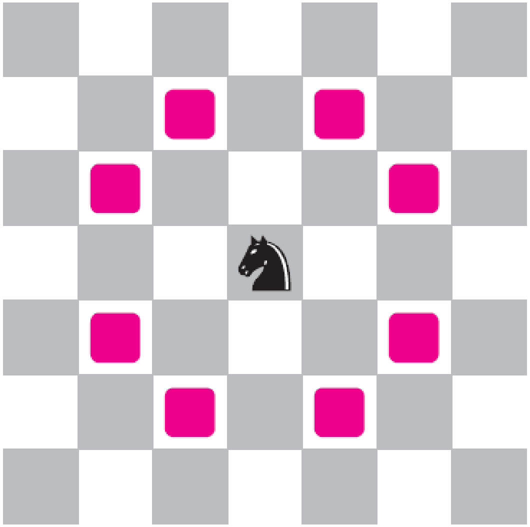
Zadanie

Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.



Zadanie

Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

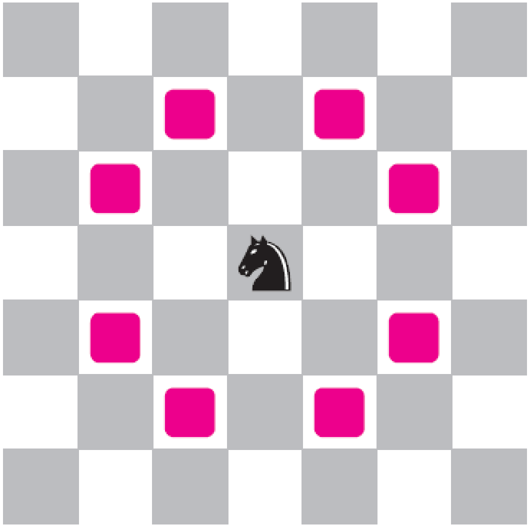


Rozwiązanie

Na polach któregoś koloru stoi więcej koników.

Zadanie

Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.



Rozwiązanie

Na polach któregoś koloru stoi więcej koników.
Jest ich co najmniej 1000 i żadne dwa z nich się nie atakują.

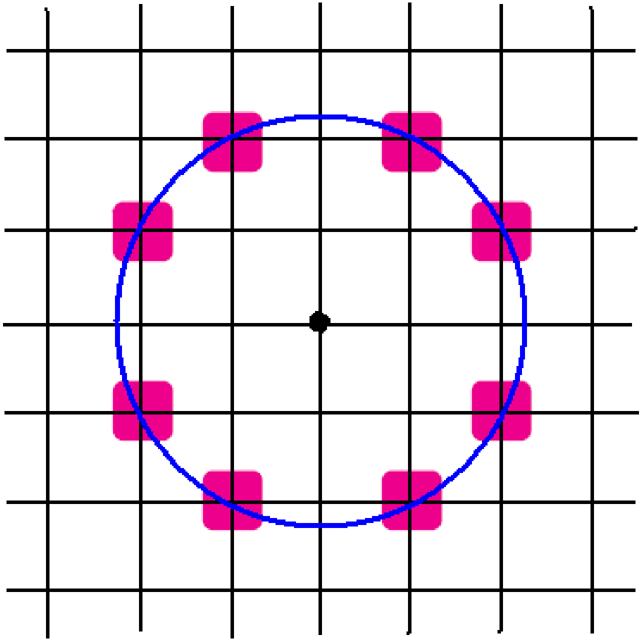
Zadanie

Na płaszczyźnie narysowanych jest 1999 okręgów o promieniu $\sqrt{5}$ i o środkach w punktach kratowych. Wykaż, że można wybrać 1000 spośród tych okręgów tak, aby żaden nie przechodził przez środek żadnego innego.

Zadanie

Na płaszczyźnie narysowanych jest 1999 okręgów o promieniu $\sqrt{5}$ i o środkach w punktach kratowych. Wykaż, że można wybrać 1000 spośród tych okręgów tak, aby żaden nie przechodził przez środek żadnego innego.

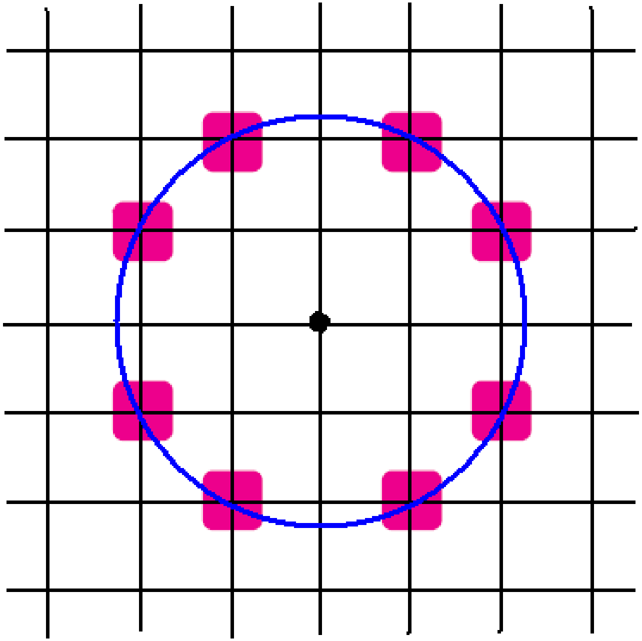
Rozwiązanie

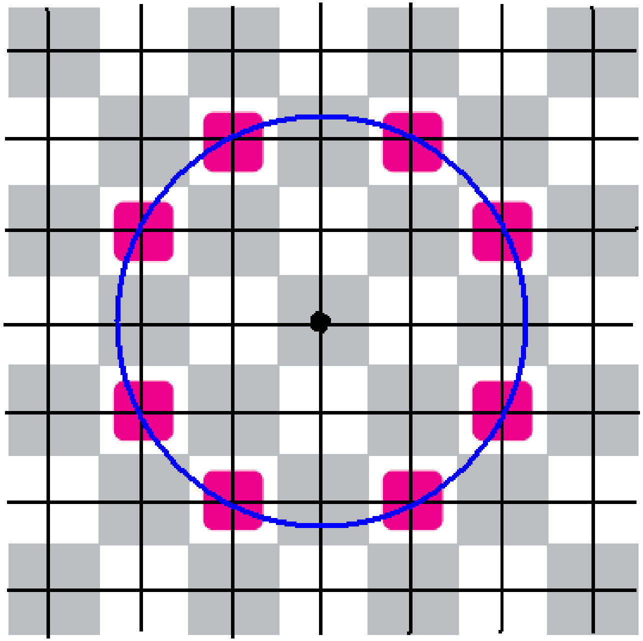


Zadanie

Na płaszczyźnie narysowanych jest 1999 okręgów o promieniu $\sqrt{5}$ i o środkach w punktach kratowych. Wykaż, że można wybrać 1000 spośród tych okręgów tak, aby żaden nie przechodził przez środek żadnego innego.

Rozwiązanie





Tak samo, jak w poprzednim zadaniu!

Zadanie

Na każdym polu szachownicy 101×101 siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

Zadanie

Na każdym polu szachownicy 101×101 siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

Rozwiązanie

Każda żaba, skacząc, zmienia kolor pola.

Zadanie

Na każdym polu szachownicy 101×101 siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

Rozwiązanie

Każda żaba, skacząc, zmienia kolor pola.
Jest więcej pól czarnych niż białych.

Zadanie

Na każdym polu szachownicy 101×101 siedzi żaba. Nagle wszystkie żaby skaczą, każda na pole sąsiadujące bokiem ze swoim dotychczasowym. Udowodnij, że w rezultacie na któreś pole trafią przynajmniej dwie żaby.

Rozwiązanie

Każda żaba, skacząc, zmienia kolor pola.
Jest więcej pól czarnych niż białych.
Żaby z pól czarnych muszą po skoku zmieścić się na polach białych.

Zadanie

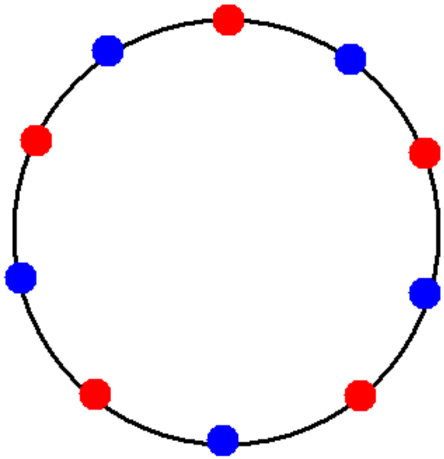
Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?

Zadanie

Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?

Rozwiązanie

Na drzewach o numerach parzystych początkowo siedzi w sumie 5 małp.

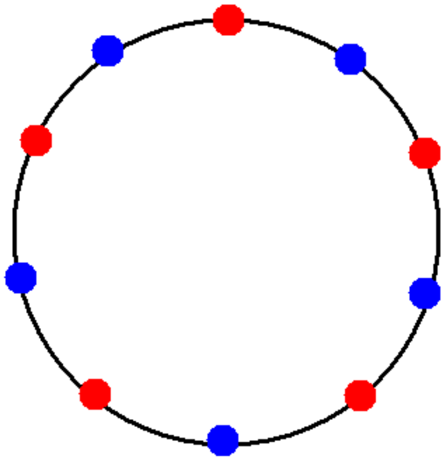


Zadanie

Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?

Rozwiązanie

Na drzewach o numerach parzystych początkowo siedzi w sumie 5 małp.



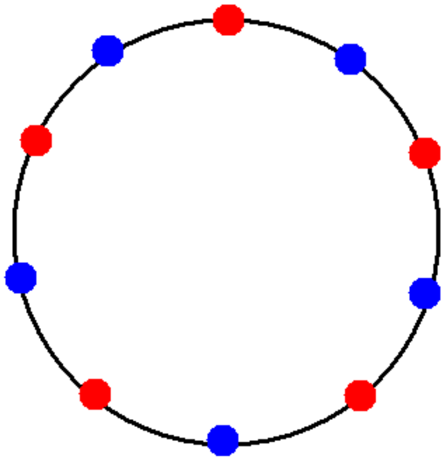
Po każdym skoku liczba ta zmienia się: -2, $+2$ lub 0.

Zadanie

Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?

Rozwiązanie

Na drzewach o numerach parzystych początkowo siedzi w sumie 5 małp.



Po każdym skoku liczba ta zmienia się: -2, $+2$ lub 0.
Zatem nigdy nie będzie równa 10 ani 0.

Zadanie

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2000. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 201?

Zadanie

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2000. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 201?

Rozwiązanie

Suma wszystkich liczb zmienia się:
$S - a - b + (a - b)$

Zadanie

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2000. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 201?

Rozwiązanie

Suma wszystkich liczb zmienia się:
$S - a - b + (a - b) = S - 2b$

Zadanie

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2000. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 201?

Rozwiązanie

Suma wszystkich liczb zmienia się:
$S - a - b + (a - b) = S - 2b$,
ale nie zmienia się jej parzystość.

Zadanie

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2000. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 201?

Rozwiązanie

Suma wszystkich liczb zmienia się:
$S - a - b + (a - b) = S - 2b$,
ale nie zmienia się jej parzystość.

Początkowa suma jest parzysta, więc końcowa liczba też.

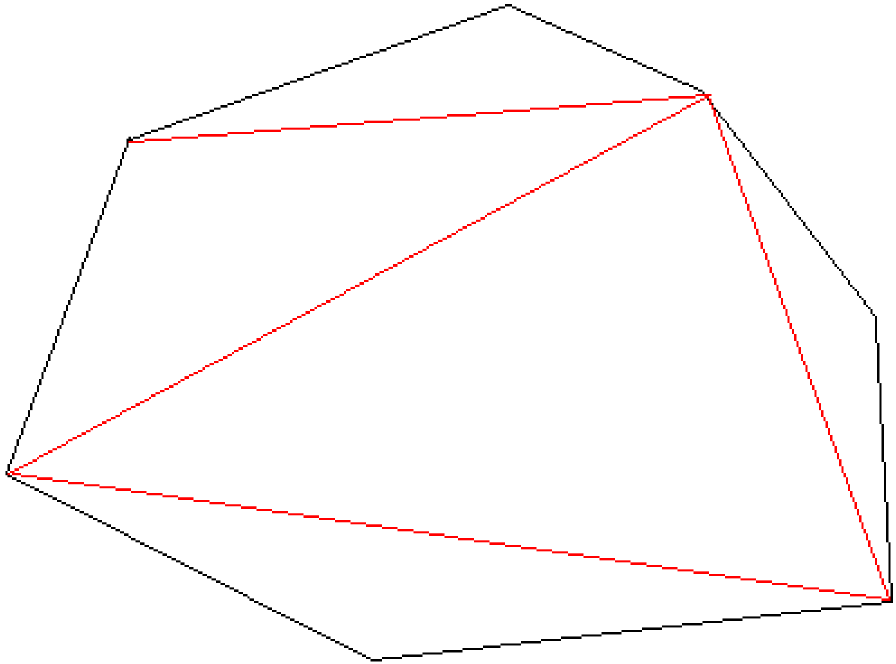
Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

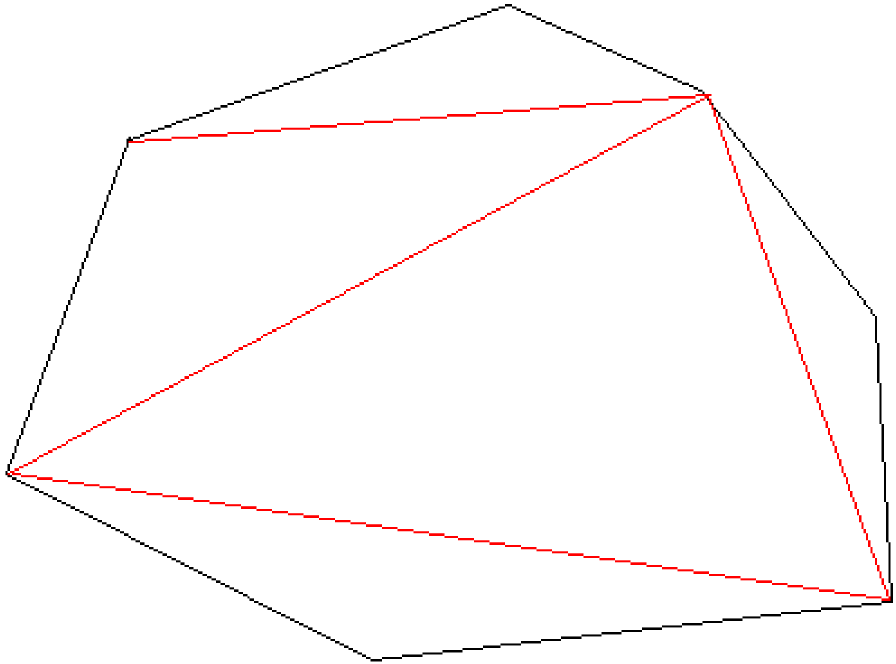
Rozwiązanie



Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

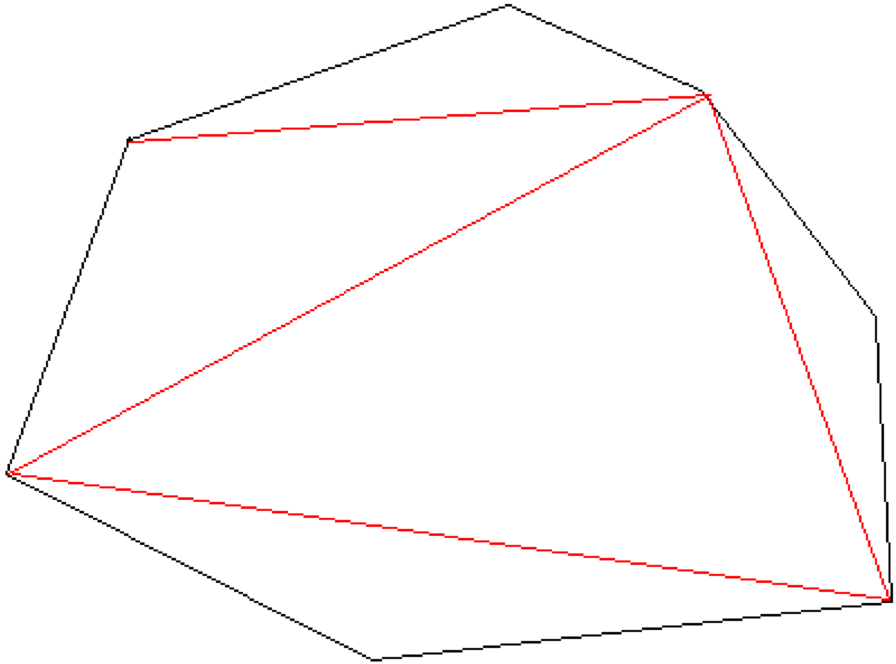


liczba trójkątów $\cdot\ 180^\circ =$ suma kątów danego n-kąta

Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie



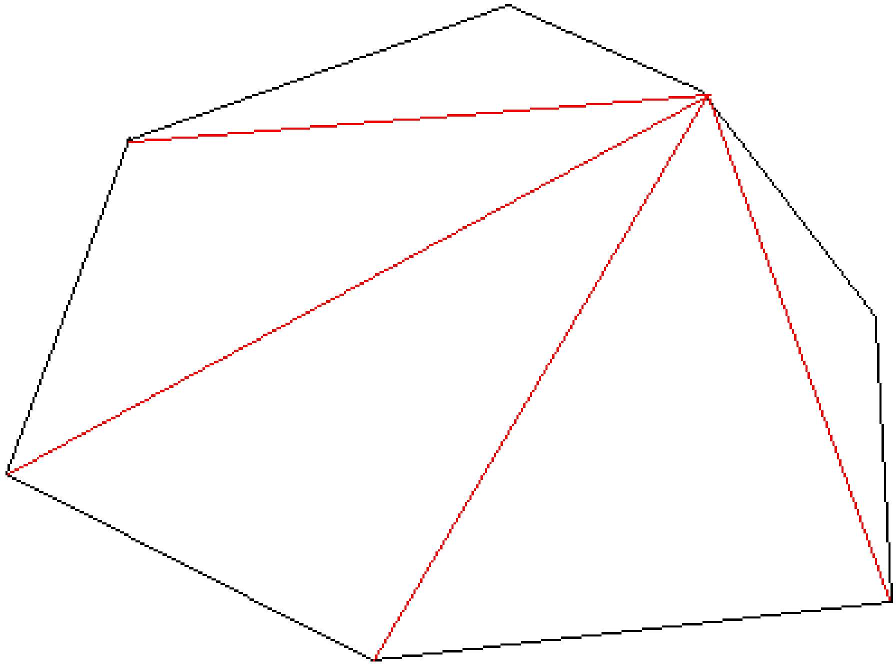
liczba trójkątów $\cdot\, 180^\circ =$ suma kątów danego n-kąta

Liczba trójkątów nie zależy od podziału.

Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

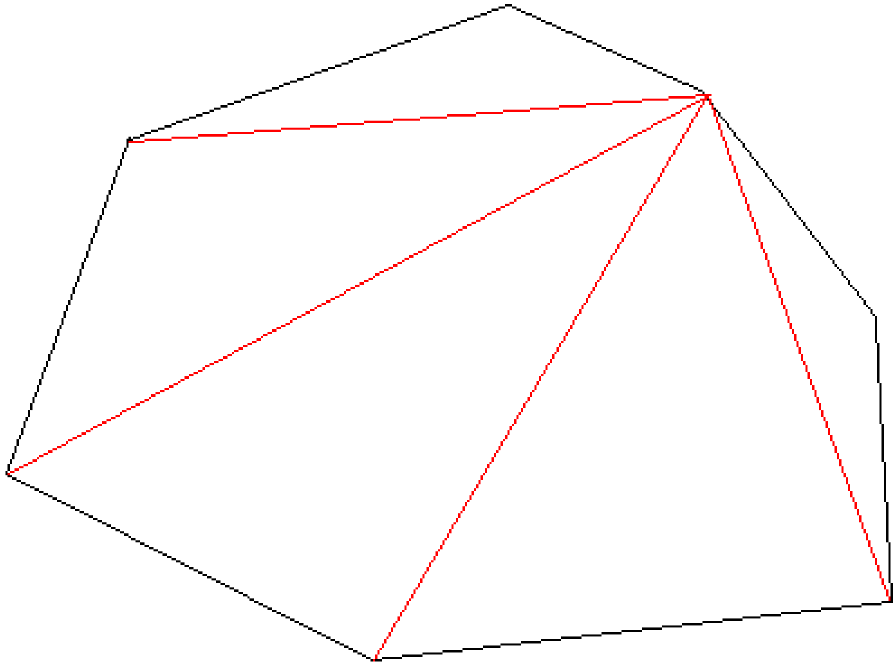


Można więc wziąć swój ulubiony podział.

Zadanie

Pewien n-kąt wypukły podzielono na trójkąty, rysując takie jego przekątne, które się nie przecinają (ale mogą mieć wspólne końce). Ile trójkątów można w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie



Można więc wziąć swój ulubiony podział.
Liczba trójkątów $= n - 2$.

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \qquad \vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$$

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad \vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$$

$$+ \quad \overline{}$$

$$4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) \leqslant \; 20 \cdot 42$$

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$$

$$+ \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) \leqslant 20 \cdot 42$$
$$4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) \leqslant 840$$

 Joanna Jaszuńska, 26 X 2012

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$

$$+ \quad \overline{\phantom{a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42}}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) &\leqslant \; 20 \cdot 42 \\ 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) &\leqslant \; 840 \\ 4 \cdot 210 &\leqslant \; 840 \end{aligned}$$

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$

$$+ \quad \overline{\phantom{a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42}}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) &\leqslant 20 \cdot 42 \\ 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) &\leqslant 840 \\ 4 \cdot 210 &\leqslant 840 \end{aligned}$$

Zatem we wszystkich nierównościach zachodzi równość.

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$

$$+ \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) &\leqslant 20 \cdot 42 \\ 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) &\leqslant 840 \\ 4 \cdot 210 &\leqslant 840 \end{aligned}$$

Zatem we wszystkich nierównościach zachodzi równość.
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 42 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wiercholków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$$

$$+ \quad \overline{\hphantom{a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42}}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) &\leqslant 20 \cdot 42 \\ 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) &\leqslant 840 \\ 4 \cdot 210 &\leqslant 840 \end{aligned}$$

Zatem we wszystkich nierównościach zachodzi równość.
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 42 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, czyli $a_1 = a_5$.

Zadanie (finał III OMG)
Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierchołków suma ich numerów była $\leqslant 42$?

Rozwiązanie

Załóżmy, że można. Wtedy
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqslant 42 \\ \quad\vdots \\ a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42 \end{cases}$$
$$+ \quad \overline{\phantom{a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 42}}$$
$$\begin{aligned} 4 \cdot (a_1 + \ldots + a_{20}) &\leqslant \; 20 \cdot 42 \\ 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 20) &\leqslant \; 840 \\ 4 \cdot 210 &\leqslant \; 840 \end{aligned}$$

Zatem we wszystkich nierównościach zachodzi równość.
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 42 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, czyli $a_1 = a_5$.
Sprzeczność, bo a_i to różne liczby.

Zadanie (test VIII OMG)

Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty, dzieląc go na cztery części.
(a) Czy któraś z nich musi mieć długość $> 1/5$?
(b) Czy suma długości pewnych dwóch z nich musi być $\geqslant 1/2$?

Zadanie (test VIII OMG)

Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty, dzieląc go na cztery części.
(a) Czy któraś z nich musi mieć długość $> 1/5$?
(b) Czy suma długości pewnych dwóch z nich musi być $\geqslant 1/2$?

Rozwiązanie

(a) Gdyby wszystkie $\leqslant 1/5$, to ich suma $\leqslant 4/5 < 1$.

Zadanie (test VIII OMG)

Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty, dzieląc go na cztery części.
(a) Czy któraś z nich musi mieć długość $> 1/5$?
(b) Czy suma długości pewnych dwóch z nich musi być $\geqslant 1/2$?

Rozwiązanie

(a) Gdyby wszystkie $\leqslant 1/5$, to ich suma $\leqslant 4/5 < 1$.

(b) Gdyby $a + b < 1/2$ oraz $c + d < 1/2$, to ich suma < 1.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 1

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 1

Jeden kolega — OK.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 1

Jeden kolega — OK.

Więcej niż jeden kolega:

Istnieje kolega K_i, który ma tyle paliwa, że wystarczy na podróż do kolegi K_{i+1}.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 1

Jeden kolega — OK.

Więcej niż jeden kolega:

Istnieje kolega K_i, który ma tyle paliwa, że wystarczy na podróż do kolegi K_{i+1}. Niech K_{i+1} przeprowadzi się, wraz ze swoim paliwem, do K_i.

Z założenia indukcyjnego Fredek może teraz wszystkich odwiedzić.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 1

Jeden kolega — OK.

Więcej niż jeden kolega:

Istnieje kolega K_i, który ma tyle paliwa, że wystarczy na podróż do kolegi K_{i+1}. Niech K_{i+1} przeprowadzi się, wraz ze swoim paliwem, do K_i.

Z założenia indukcyjnego Fredek może teraz wszystkich odwiedzić. Gdy K_{i+1} wróci do siebie, podróż nadal będzie możliwa (dzięki wyborowi K_i).

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

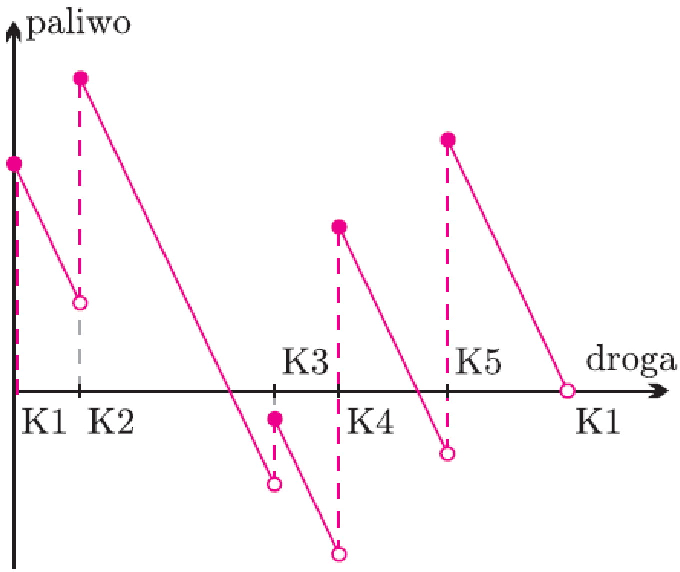
Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 2

Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 2

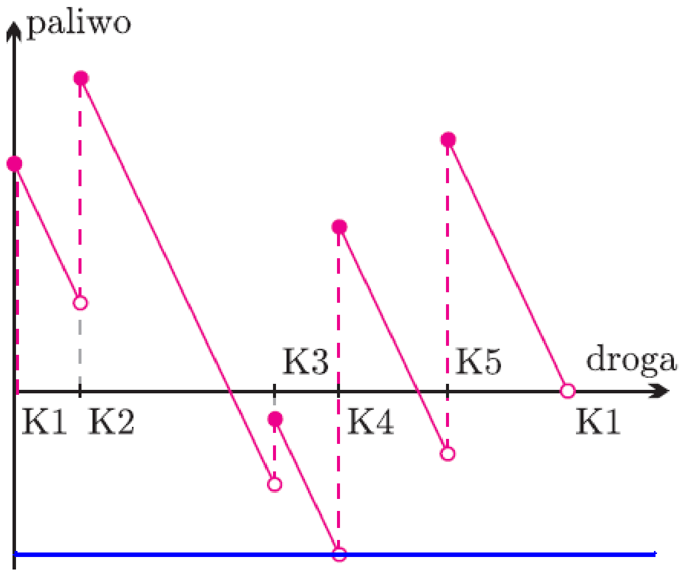


rysunek z *Delty*

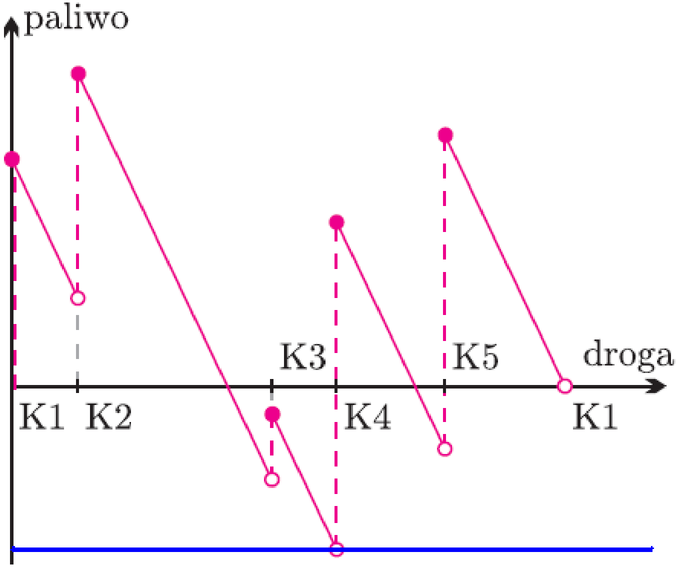
Zadanie (obóz naukowy OM 1999)

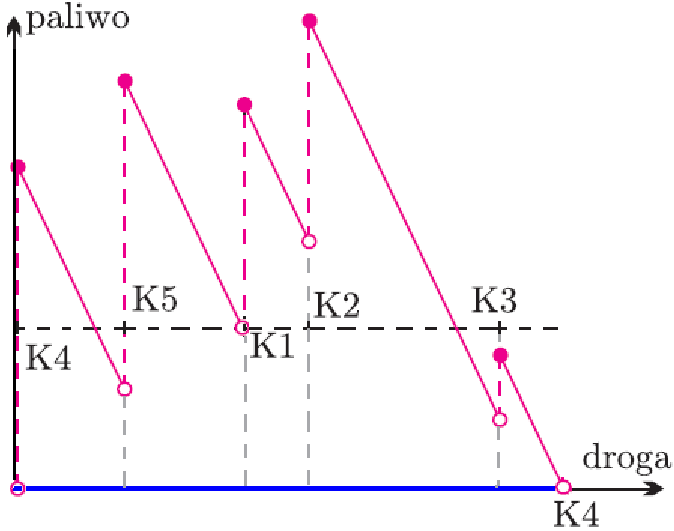
Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Udowodnij, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie 2



rysunek z *Delty*


paliwo
droga
K1
K2
K3
K4
K5
K1


paliwo
droga
K4
K5
K1
K2
K3
K4

Zadanie

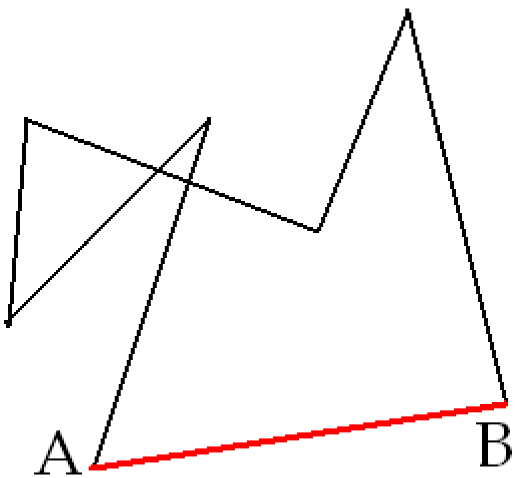
Na płaszczyźnie danych jest n punktów, przy czym odległości pomiędzy nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?

Zadanie

Na płaszczyźnie danych jest n punktów, przy czym odległości pomiędzy nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?

Rozwiązanie

Załóżmy, że tak. Niech AB będzie jej najdłuższym odcinkiem.

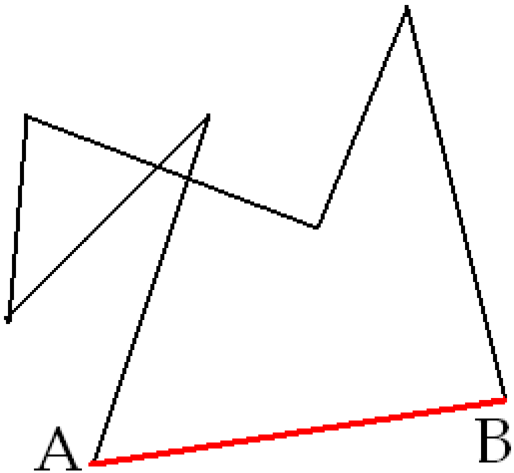


Zadanie

Na płaszczyźnie danych jest n punktów, przy czym odległości pomiędzy nimi są różne dla różnych par punktów. Każdy punkt łączymy odcinkiem z jego najbliższym sąsiadem. Czy można otrzymać w ten sposób łamaną zamkniętą?

Rozwiązanie

Załóżmy, że tak. Niech AB będzie jej najdłuższym odcinkiem.



Ani A nie został połączony z B, ani B nie został połączony z A.

Zadanie

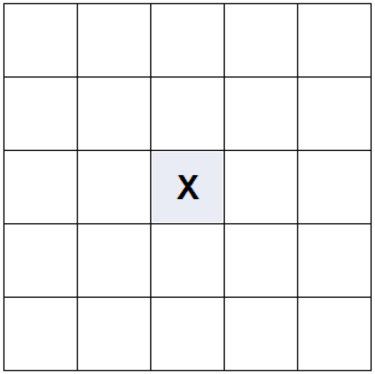
Pola nieskończonej szachownicy wypełniono liczbami naturalnymi tak, że liczba na każdym polu jest średnią arytmetyczną liczb z czterech sąsiednich pól. Udowodnij, że liczby na wszystkich polach są równe.

Zadanie

Pola nieskończonej szachownicy wypełniono liczbami naturalnymi tak, że liczba na każdym polu jest średnią arytmetyczną liczb z czterech sąsiednich pól. Udowodnij, że liczby na wszystkich polach są równe.

Rozwiązanie

Rozważmy pole z najmniejszą liczbą.

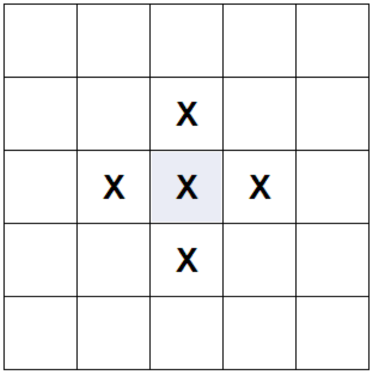


Zadanie

Pola nieskończonej szachownicy wypełniono liczbami naturalnymi tak, że liczba na każdym polu jest średnią arytmetyczną liczb z czterech sąsiednich pól. Udowodnij, że liczby na wszystkich polach są równe.

Rozwiązanie

Rozważmy pole z najmniejszą liczbą.



Sąsiednie pola muszą mieć te same liczby.

Zadanie

Pola nieskończonej szachownicy wypełniono liczbami naturalnymi tak, że liczba na każdym polu jest średnią arytmetyczną liczb z czterech sąsiednich pól. Udowodnij, że liczby na wszystkich polach są równe.

Rozwiązanie

Rozważmy pole z najmniejszą liczbą.

		X		
	X	X	X	
		X		

Sąsiednie pola muszą mieć te same liczby.
Sąsiadujące z nimi też...

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Rozwiązanie

Podzielmy ich na dwie podgrupy tak, by liczba antypatii pomiędzy podgrupami była największa możliwa.

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Rozwiązanie

Podzielmy ich na dwie podgrupy tak, by liczba antypatii pomiędzy podgrupami była największa możliwa.

Załóżmy, że istnieje osoba, która ma w swojej podgrupie ponad połowę swych wrogów.

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Rozwiązanie

Podzielmy ich na dwie podgrupy tak, by liczba antypatii pomiędzy podgrupami była największa możliwa.

Załóżmy, że istnieje osoba, która ma w swojej podgrupie ponad połowę swych wrogów. Przenieśmy tę osobę do drugiej podgrupy.

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Rozwiązanie

Podzielmy ich na dwie podgrupy tak, by liczba antypatii pomiędzy podgrupami była największa możliwa.

Załóżmy, że istnieje osoba, która ma w swojej podgrupie ponad połowę swych wrogów. Przenieśmy tę osobę do drugiej podgrupy.

Liczba antypatii pomiędzy podgrupami rośnie

Zadanie

W pewnej grupie osób niektórzy się wzajemnie nie lubią. Wykaż, że można te osoby podzielić na dwie podgrupy tak, aby każdy miał w swojej podgrupie najwyżej połowę swych wrogów.

Rozwiązanie

Podzielmy ich na dwie podgrupy tak, by liczba antypatii pomiędzy podgrupami była największa możliwa.

Załóżmy, że istnieje osoba, która ma w swojej podgrupie ponad połowę swych wrogów. Przenieśmy tę osobę do drugiej podgrupy.

Liczba antypatii pomiędzy podgrupami rośnie, sprzecznie z założeniem o jej maksymalności.

Zadanie

Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wierzchołkach jednego koloru.

Zadanie

Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wierzchołkach jednego koloru.

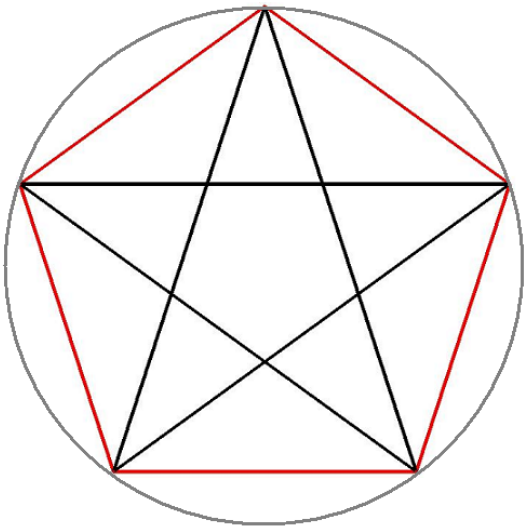
Rozwiązanie

Zadanie

Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wierzchołkach jednego koloru.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny pięciokąt foremny wpisany w dany okrąg.

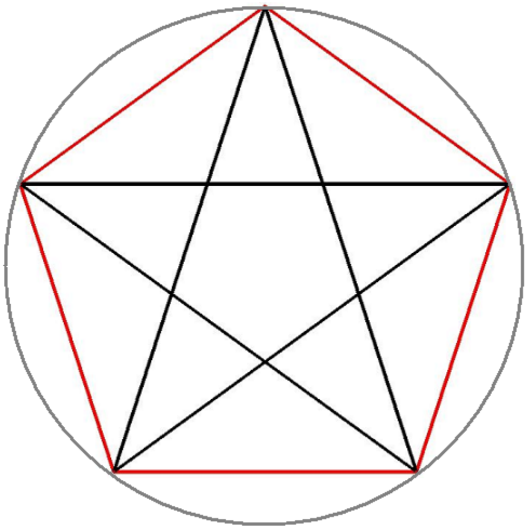


Zadanie

Każdy punkt okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wierzchołkach jednego koloru.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny pięciokąt foremny wpisany w dany okrąg.



Pewne trzy jego wierzchołki są tego samego koloru.

Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

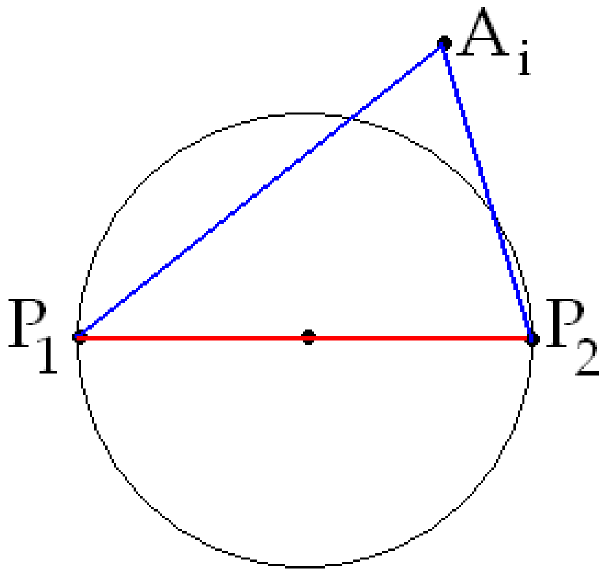
Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Rozwiązanie

P_1, P_2 — końce dowolnej średnicy.



Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

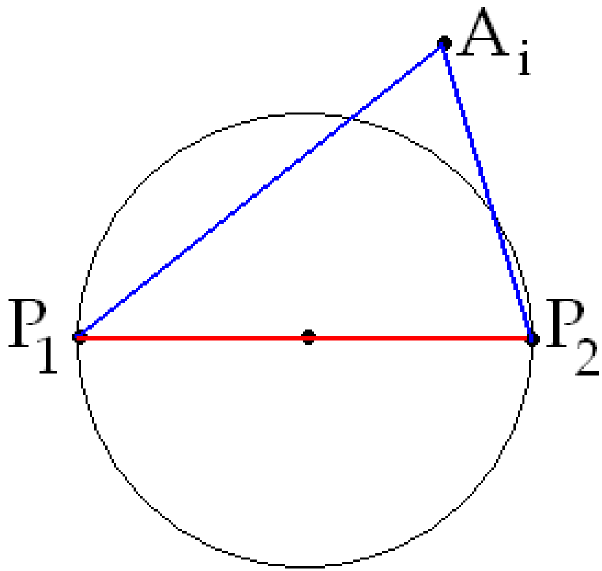
$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Rozwiązanie

P_1, P_2 — końce dowolnej średnicy.

Wtedy

$$(P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_{100}) +$$
$$+ (P_2A_1 + P_2A_2 + \ldots + P_2A_{100})$$



Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

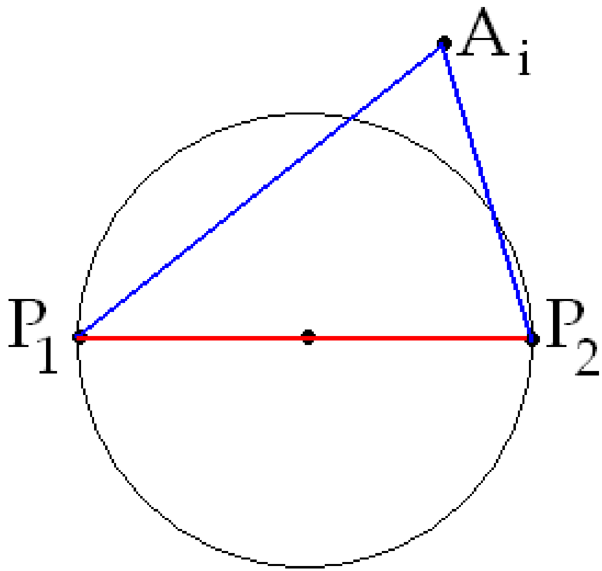
$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Rozwiązanie

P_1, P_2 — końce dowolnej średnicy.

Wtedy

$$\begin{aligned} &(P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_{100}) + \\ &+ (P_2A_1 + P_2A_2 + \ldots + P_2A_{100}) \geqslant \\ &\geqslant P_1P_2 + P_1P_2 + \ldots + P_1P_2 \end{aligned}$$



Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

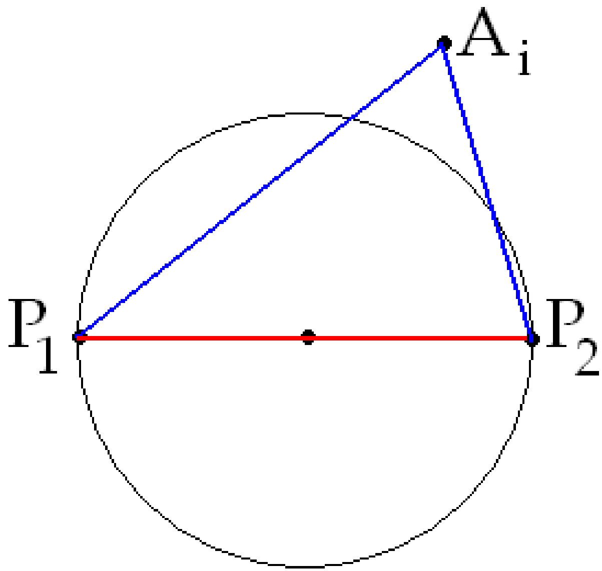
$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Rozwiązanie

P_1, P_2 — końce dowolnej średnicy.

Wtedy

$$\begin{aligned} &(P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_{100}) + \\ &+ (P_2A_1 + P_2A_2 + \ldots + P_2A_{100}) \geqslant \\ &\geqslant P_1P_2 + P_1P_2 + \ldots + P_1P_2 = 200. \end{aligned}$$



Zadanie

Na płaszczyźnie dany jest okrąg o promieniu 1 i punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, dla którego

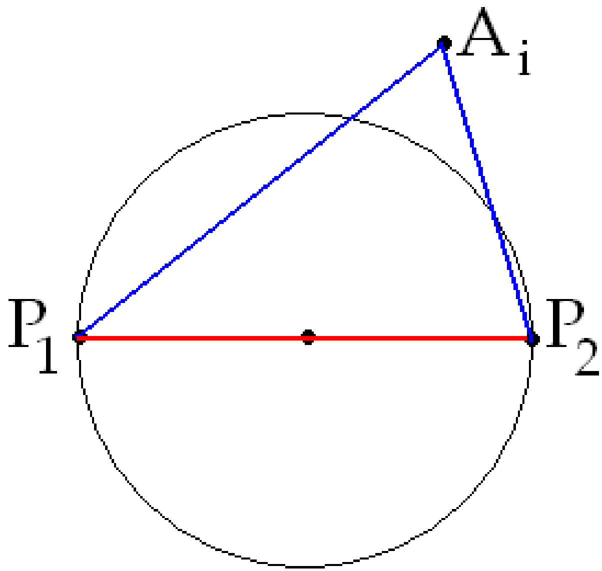
$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Rozwiązanie

P_1, P_2 — końce dowolnej średnicy.

Wtedy

$$\begin{aligned}&(P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_{100}) + \\ &+ (P_2A_1 + P_2A_2 + \ldots + P_2A_{100}) \geqslant \\ &\geqslant P_1P_2 + P_1P_2 + \ldots + P_1P_2 = 200.\end{aligned}$$



W którymś z nawiasów suma $\geqslant 100$.

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich.

- Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby mogą wszystkie przedostać się przez most?

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich.

- Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby mogą wszystkie przedostać się przez most?

„Rozwiązanie”

„Najlepiej, jak najszybszy będzie kolejno przeprowadzał pozostałych.”

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich.

- Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby mogą wszystkie przedostać się przez most?

„Rozwiązanie”

„Najlepiej, jak najszybszy będzie kolejno przeprowadzał pozostałych.”

Da się szybciej!

Zaproszenie

Szczegóły: `www.csz.pw.edu.pl`, `J.Jaszunska@csz.pw.edu.pl`.