4 zadania

1. Udowodnij tożsamość:

$$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}.$$

2. Udowodnij tożsamość:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}.$$

W jaki sposób można znaleźć prawą stronę takiej tożsamości?

Zrób to samo z następującymi tożsamościami Ramanujana:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{1/9}-\sqrt[3]{2/9}+\sqrt[3]{4/9},$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=(1/3)\big(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\big),$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}}=(1/3)\big(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1\big),$$

$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19}=\sqrt[3]{5/3}-\sqrt[3]{2/3}.$$

3. Udowodnij, że:

$$\sqrt{589}+\sqrt{818}+\sqrt{883}<\sqrt{331}+\sqrt{503}+\sqrt{1761}.$$

Dla „ułatwienia” podam rozwinięcia dziesiętne liczb po obu stronach nierówności z dokładnością do 14 miejsc po przecinku:

82,58533740738062.

4. Zadanie maturalne z 2005 roku:

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

A czy ktoś potrafi udowodnić **za pomocą kalkulatora** (lub tablic), że ta liczba jest całkowita?

Życzę powodzenia!