

Geometria według Szarygina: symetria względem okręgu

Michał Miśkiewicz

Ameliówka, 26 X 2013



Definicje

- Rozważamy płaszczyznę domkniętą, to znaczy płaszczyznę z dołączonym *nieskończenie dalekim* punktem ∞ (w istocie jest to sfera).
- Przyjmujemy, że punkt ∞ leży na każdej z prostych. Takie rozszerzone proste oraz okręgi obejmujemy wspólną nazwą bloków (inaczej okręgów uogólnionych).
- Inwersja (inaczej symetria) względem okręgu $o = o(S, r)$ przekształca punkt A na punkt A' leżący na półprostej SA i spełniający $SA \cdot SA' = r^2$. Dodatkowo określamy $S' = \infty$, $\infty' = S$. Tak zadane przekształcenie jest inwolucją płaszczyzny domkniętej.



Podstawowe własności

- Obrazem dowolnego bloku jest blok.
- Symetria względem bloku zachowuje kąty między krzywymi.
- Blok a zachowuje się w symetrii względem bloku b wtedy i tylko wtedy, gdy bloki a, b są prostopadłe.
- Symetria względem bloku zachowuje symetrie względem wszystkich bloków.



Zadania

Ćwiczenie 1

Proste k, l są styczne do okręgu o w punktach K, L i przecinają się w punkcie A . Punkt B jest środkiem odcinka PQ . Wykazać, że punkty A, B są symetryczne względem okręgu o .

Ćwiczenie 2

Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B . Prosta k jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q . Punkt C jest środkiem odcinka PQ . Wykazać, że punkty A, B, C są współliniowe.



Zadania

Zadanie 1

Okręgi σ_1 i σ_2 przecinają się w punktach A i B . Prosta k jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q . Punkt H jest symetryczny do punktu B względem prostej k . Okrąg o jest opisany na trójkącie APQ . Proste p i q styczne do o w punktach odpowiednio P i Q przecinają się w punkcie S . Wykazać, że punkty A , H , S są współliniowe.



Zadania

Ćwiczenie 3

Na bokach BC , CA , AB trójkąta ABC obrano punkty A' , B' , C' . Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 4

Sprawdzić, że inwersja względem sfery, zdefiniowana podobnie jak w przypadku okręgu, ma analogiczne własności: w szczególności obrazami sfer i płaszczyzn są sfery i płaszczyzny.



Zadanie 2

Wykazać, że jeśli siedem wierzchołków sześciścianu (to jest wielościanu o sześciu czworokątnych ścianach) leży na pewnej sferze, to ósmy też.

