KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ameliówka, październik 2013

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odbijanie piłeczki

Konferencja Stowarzyszenia
na Rzecz Edukacji Matematycznej
Ameliówka, październik 2013

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Inny styl uczenia matematyki ?

- **Traktujmy sklejanie brył z piłeczek jako a) zabawę, b) środek dydaktyczny, pomagający w nauce stereometrii, c) źródło zadań. Okaże się, że odpowiednie sklejenie wyeksponuje stosowne własności brył.**

d) czy można inaczej?
Brawo inżynierowie!

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zrób sobie bryłkę

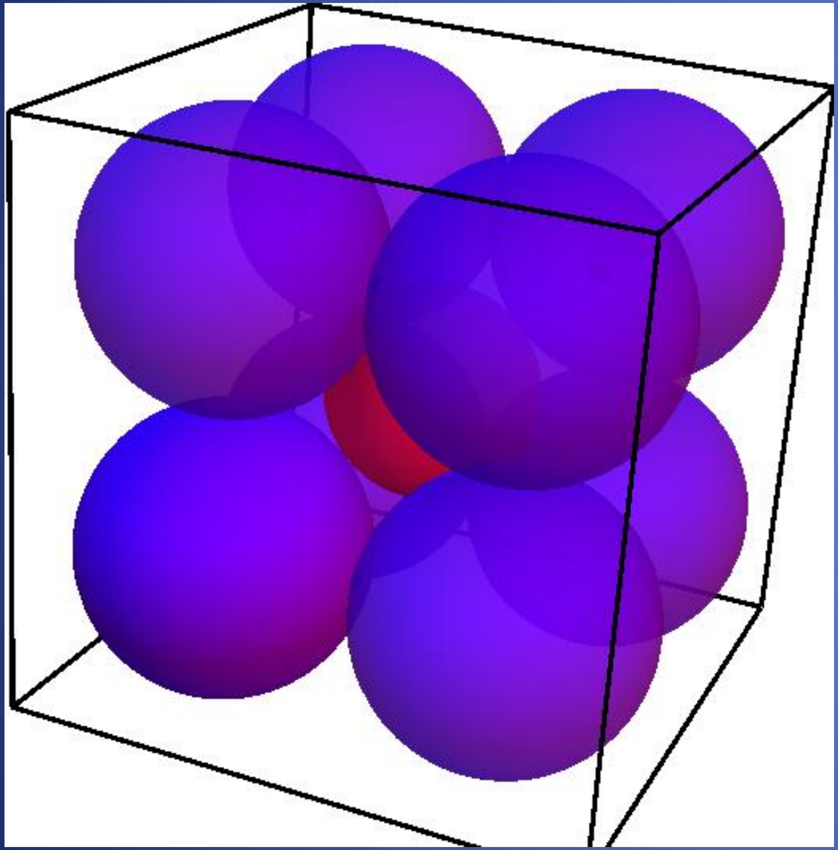
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadania dla uczniów

- Ile jest kul wewnętrznych (gdy sześcian sklejony jest z n^3 piłeczek) ; z iloma kulami styka się kula wewnętrzna?
- Pokaż kulki tworzące sześciokąt foremny, czworościan foremny. Ile *ich* jest?
- (liceum) Oblicz, jaką część sześcianu obejmującego kule zajmują właśnie te kule.
- **Gdzie kapnąć klejem?**
- **Ile razem jest sklejeń ?**
- Dla sześcianu z ośmiu piłeczek ….

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Obliczyć promień kuli wewnętrznej

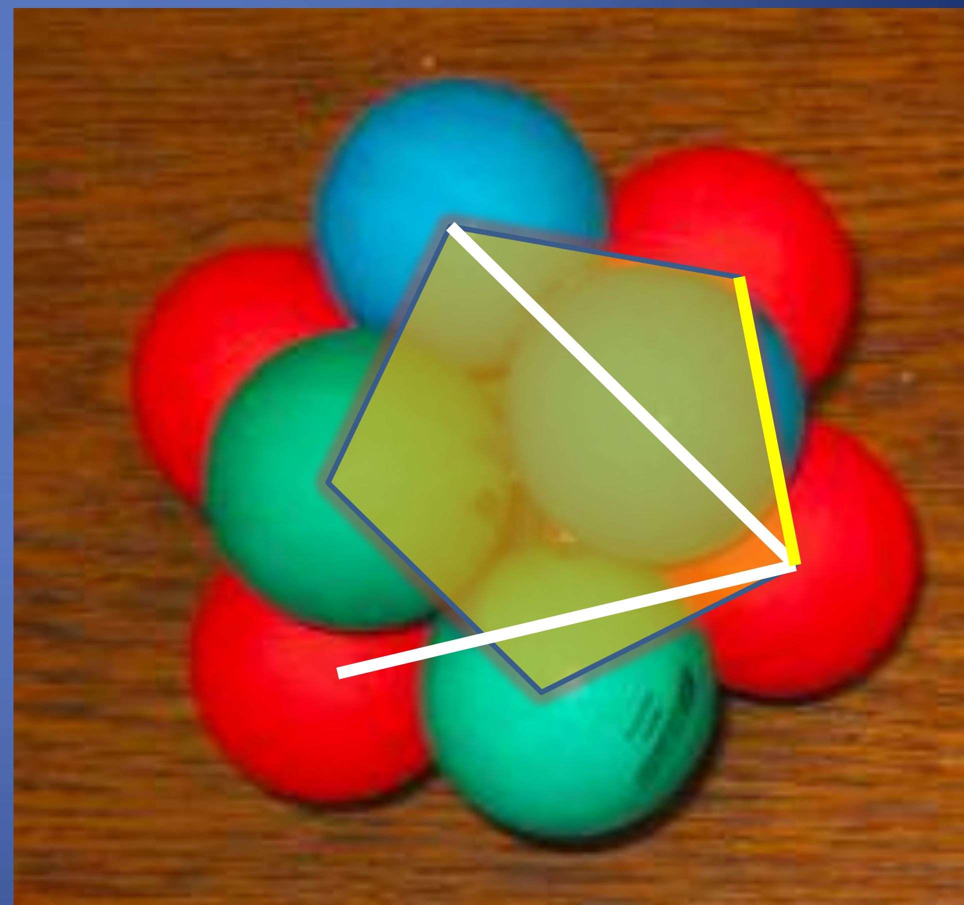


Odpowiedź
(w dowolnym wymiarze):

$$\rho = (\sqrt{n} - 1)/4$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

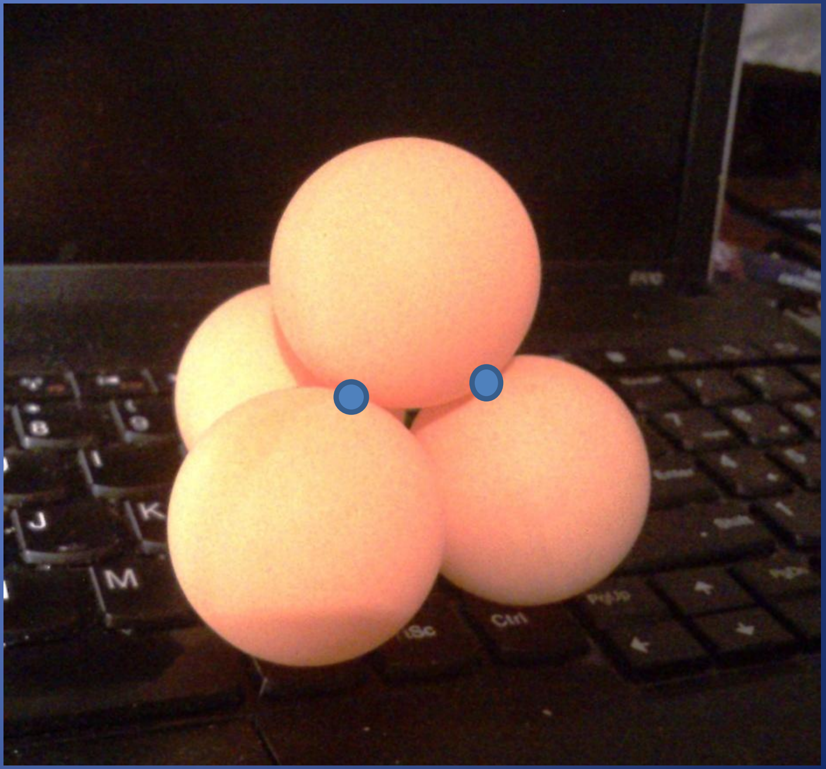
Czworościan i ośmiościan. Prostokąty w dwudziestościanie.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uroki klejenia

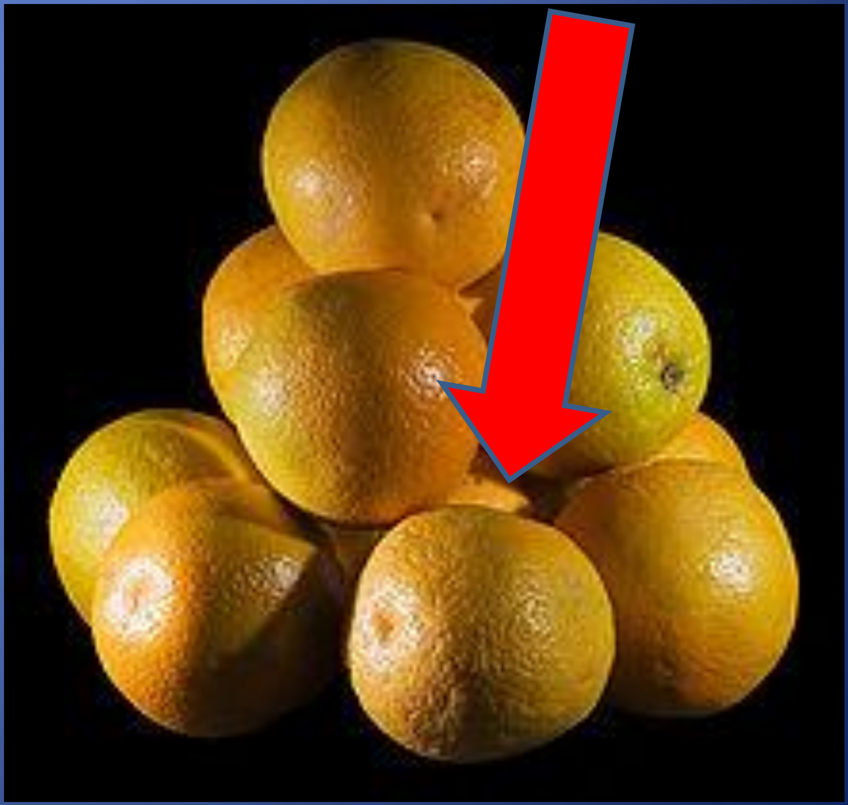
- Najłatwiej czworościan. Cztery kulki w piramidkę !
- Zadanie:
- Gdzie kapnąć klejem?
- Jakie to zadanie
- geometryczne?
- Początek rozwiązania:
- szerokość
- geograficzna 0, 120, 240^0



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie: na kulce wewnętrznej wyznaczyć jej punkty styczności z otaczającymi.

Odp. Sześć punktów na równiku , λ = 0, 60, 120,180, 240, 300 °
Pączki/pomarańcze północne: w punktach λ = 30, 150, 270°
albo 90, 210, 330, natomiast φ = arccos(1/√3) , ok. 55 °

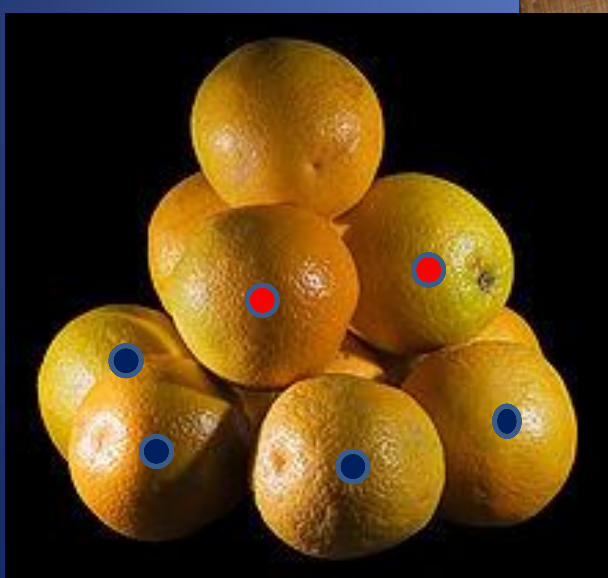


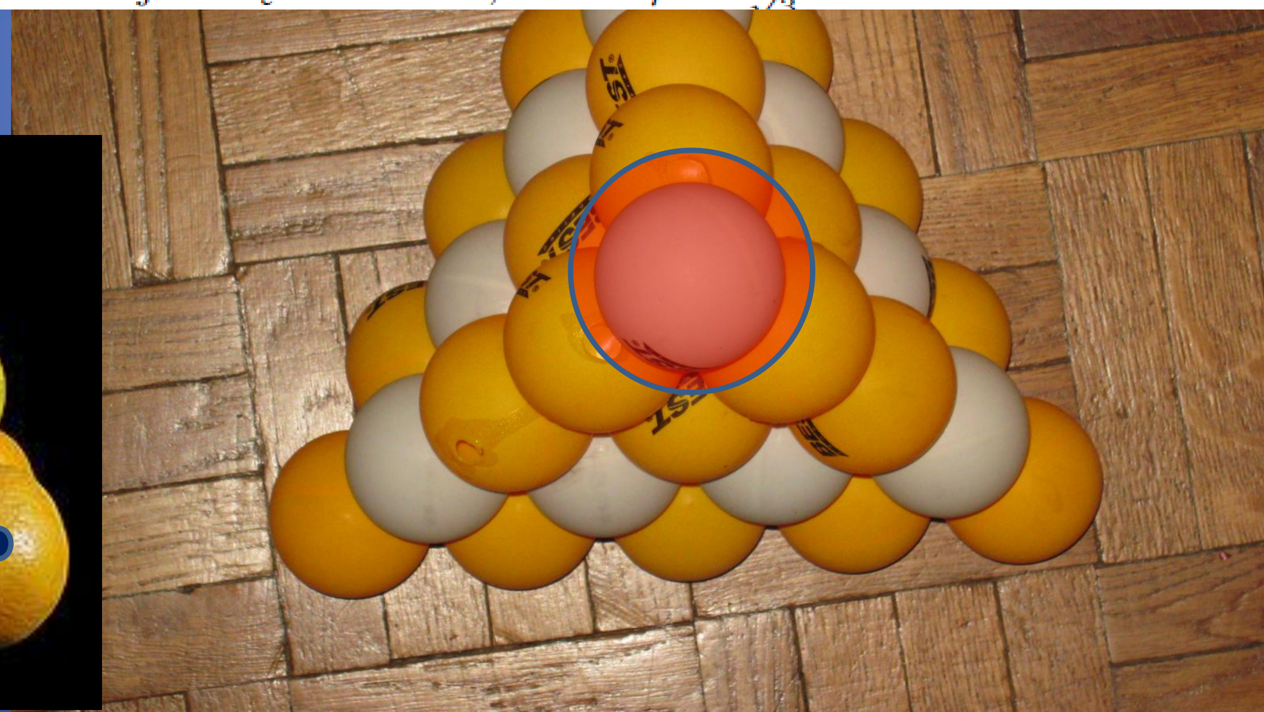
Rozpatrzmy konfigurację kul K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 , K_6 oraz leżące „na nich” K_7, K_8, K_9. Okrąg $\mathcal{O}_1$, zawierający środki kul K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 ma środek w środku kuli K_0 (czyli w początku układu współrzędnych) i promień 2 - za jednostkę przyjęliśmy promień pojedynczej kuli , zatem obwód tego okręgu to 4π . Obliczymy obwód okręgu $\mathcal{O}_2$ zawierającego środki kul K_7, K_8, K_9. Jest on (fot.) równy obwodowi okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 2, a zatem $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Potraktujmy teraz okrąg O_2 jako równoleżnik kuli o równiku $\mathcal{O}_1$ jako równoleżnik. Stosunek ich długości wynosi $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Musimy rozwiązać proste zadanie „geograficzne”:

Jaka jest długość rownoleżnika o szerokości geograficznej φ .

Bez trudu wyznaczamy, że długością rownoleżnika na kuli o promieniu R jest $2\pi R\cos\varphi$. Wracając do naszego głównego zadania widzimy, że szukana szerokość geograficzna jest kątem takim, że $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



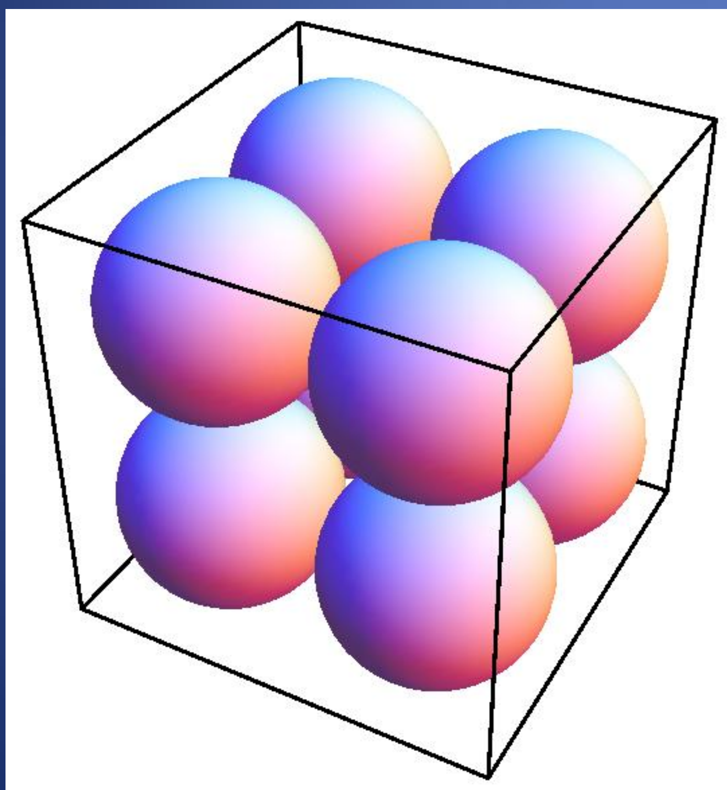


Łatwo skleić coś w rodzaju torusa…*pyzościan*

Możemy zbudować siedmiokąt foremny

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kulki – Sklejenia + Dziury = 8-12+6=2



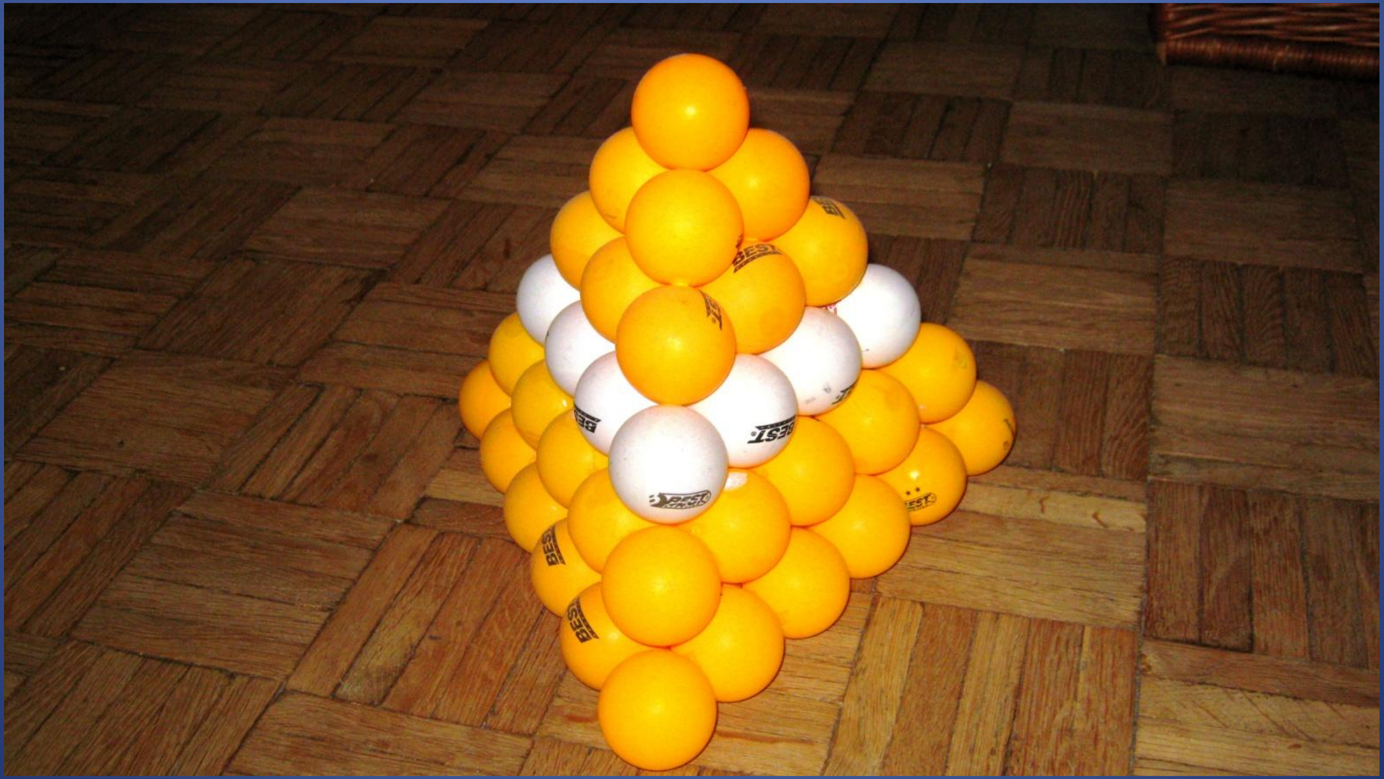
Najpierw zgromadzić literaturę fachową

Nie zrażać się niepowodzeniami !

Końcowe obliczenia…

Gęstość upakowania kul w przestrzeni

Piramidka *n-warstwowa. Liczba kul =* ,
każda ma objętość 4/3 π r^3



Hipoteza Keplera o najlepszym upakowaniu kul w przestrzeni, 1611, i rozwiązanie (Hales, Fergusson, 1998)

$$C_n = \binom{n+2}{3}$$

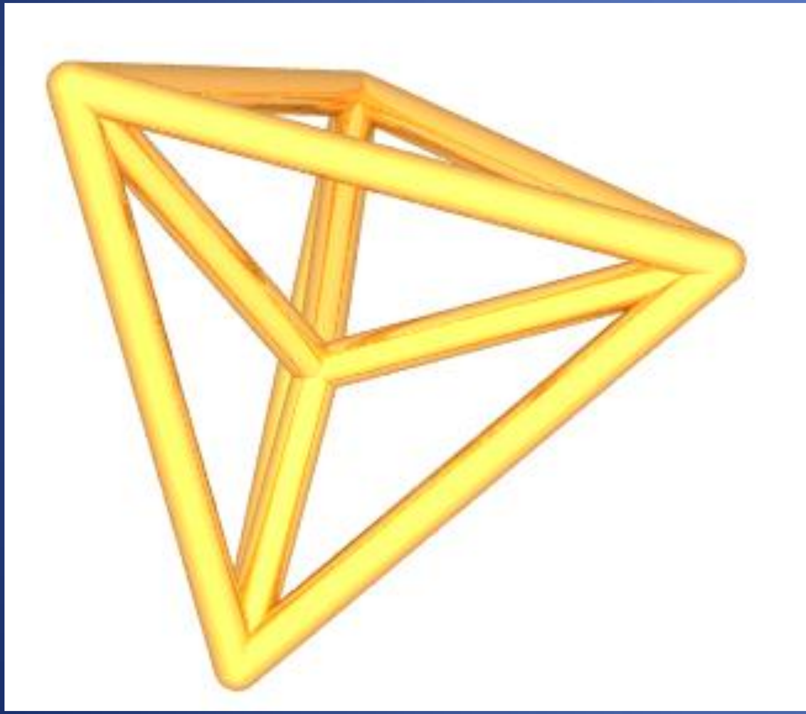
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

$$\text{Łączna objętość kul} = \frac{\pi(n+1)(n+2)(n+3)}{3\sqrt{2}n^3}$$

$$\text{Objętość piramidki} = \frac{2\sqrt{2}}{3}n^3$$

$$\text{Granica ilorazu} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74,048$$

4-sympleks



- Na jednym z następnych slajdów – 20-ścian sklejony tak, by stanowiło to pomoc do zadania:
- **Do przeciwległych wierzchołków 20-ścianu podłączono prąd. Wyliczyć opór zastępczy całego układu**.
- Odległość elektryczna: …. Opór zastępczy ….

Twierdzenie. Odległość elektryczna między wierzchołkami i, j grafu G jest równa

$$L^+_{ii} + L^+_{jj} - L^+_{ij} - L^+_{ji} \,,$$

gdzie L^+ jest macierzą pseudoodwrotną do laplasjanu grafu G.

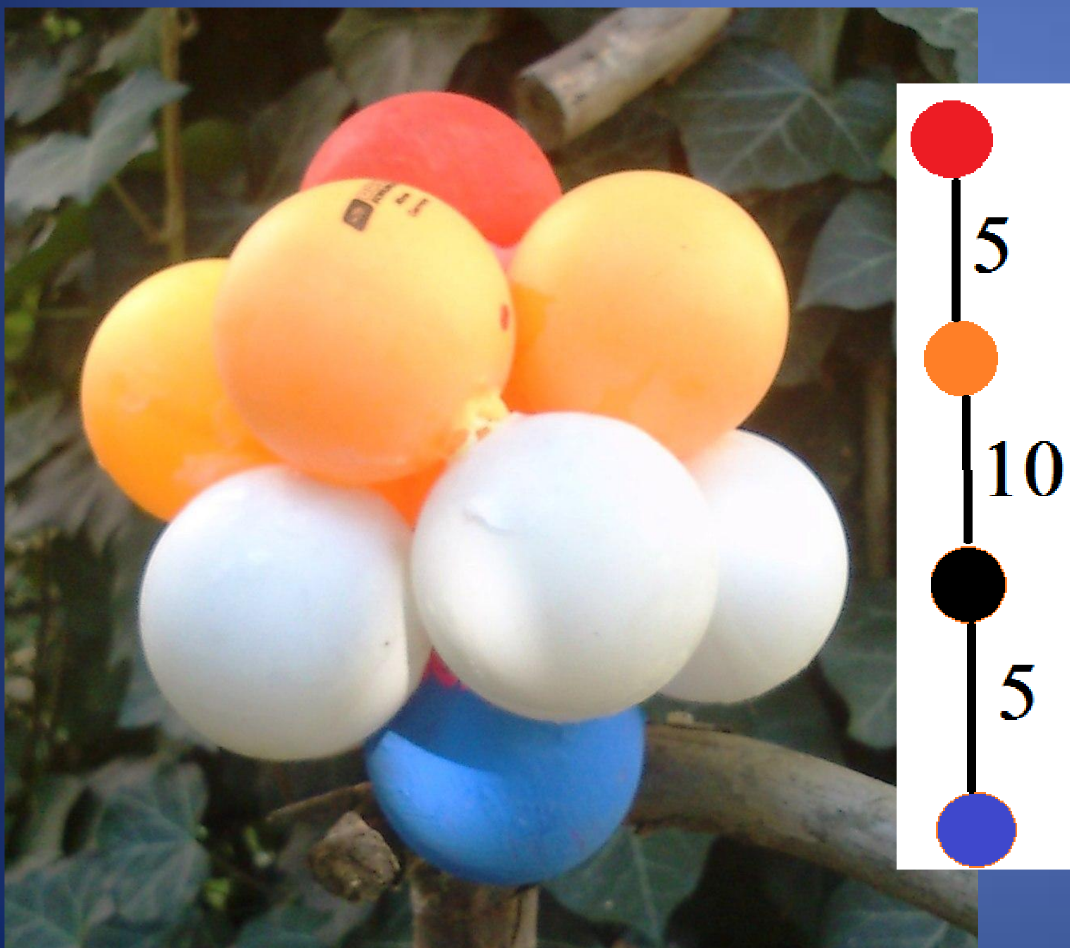
Laplasjan dla piramidki z 10 kulek

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3
\end{pmatrix}$$

…. i macierz pseudoodwrotna…

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2217}{7280} & -\frac{3}{910} & -\frac{513}{7280} & \frac{123}{14560} & -\frac{787}{14560} & -\frac{57}{910} & \frac{123}{14560} & -\frac{787}{14560} & -\frac{11}{260} & -\frac{57}{910} \\
\frac{2}{455} & \frac{493}{3640} & \frac{2}{455} & -\frac{81}{7280} & -\frac{81}{7280} & -\frac{47}{910} & -\frac{81}{7280} & -\frac{81}{7280} & -\frac{17}{520} & -\frac{47}{910} \\
-\frac{513}{7280} & -\frac{3}{910} & \frac{2217}{7280} & -\frac{787}{14560} & \frac{123}{14560} & -\frac{57}{910} & -\frac{787}{14560} & \frac{123}{14560} & -\frac{11}{260} & -\frac{57}{910} \\
\frac{1377}{116480} & -\frac{327}{58240} & -\frac{5903}{116480} & \frac{34633}{232960} & -\frac{1767}{232960} & \frac{153}{14560} & -\frac{1767}{232960} & -\frac{9047}{232960} & -\frac{159}{16640} & -\frac{757}{14560} \\
-\frac{5903}{116480} & -\frac{327}{58240} & \frac{1377}{116480} & -\frac{1767}{232960} & \frac{34633}{232960} & \frac{153}{14560} & -\frac{9047}{232960} & -\frac{1767}{232960} & -\frac{159}{16640} & -\frac{757}{14560} \\
-\frac{2589}{58240} & \frac{139}{29120} & -\frac{2589}{58240} & \frac{1419}{116480} & \frac{1419}{116480} & \frac{2139}{7280} & -\frac{5861}{116480} & -\frac{5861}{116480} & -\frac{357}{8320} & -\frac{591}{7280} \\
\frac{1007}{116480} & -\frac{937}{58240} & -\frac{6273}{116480} & -\frac{1657}{232960} & -\frac{8937}{232960} & -\frac{697}{14560} & \frac{34743}{232960} & -\frac{1657}{232960} & \frac{31}{16640} & \frac{213}{14560} \\
-\frac{13}{280} & -\frac{9}{280} & -\frac{13}{280} & -\frac{1}{280} & -\frac{1}{280} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{280} & -\frac{1}{280} & \frac{3}{20} & \frac{1}{70} \\
-\frac{6273}{116480} & -\frac{937}{58240} & \frac{1007}{116480} & -\frac{8937}{232960} & -\frac{1657}{232960} & -\frac{697}{14560} & -\frac{1657}{232960} & \frac{34743}{232960} & \frac{31}{16640} & \frac{213}{14560} \\
-\frac{3699}{58240} & -\frac{1691}{29120} & -\frac{3699}{58240} & -\frac{5531}{116480} & -\frac{5531}{116480} & -\frac{411}{7280} & \frac{1749}{116480} & \frac{1749}{116480} & \frac{213}{8320} & \frac{2319}{7280}
\end{pmatrix}
$$

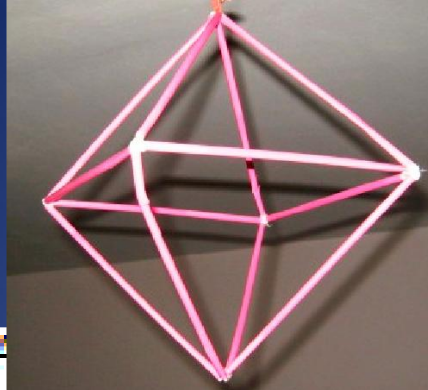
Dwudziestościan przygotowany do zadania o oporze elektrycznym



Przepustowość: 5, 10, 5.
10 wagonów do wysłania ze stacji dolnej do górnej.
Na pierwszym odcinku jadą w czasie 2 (np. minuty), na drugim 1, na trzecim 2 (minuty).
10 wagonów przesłane jest w czasie 4.
Przepustowość 10/4, opór 4/10, czyli 2/5.

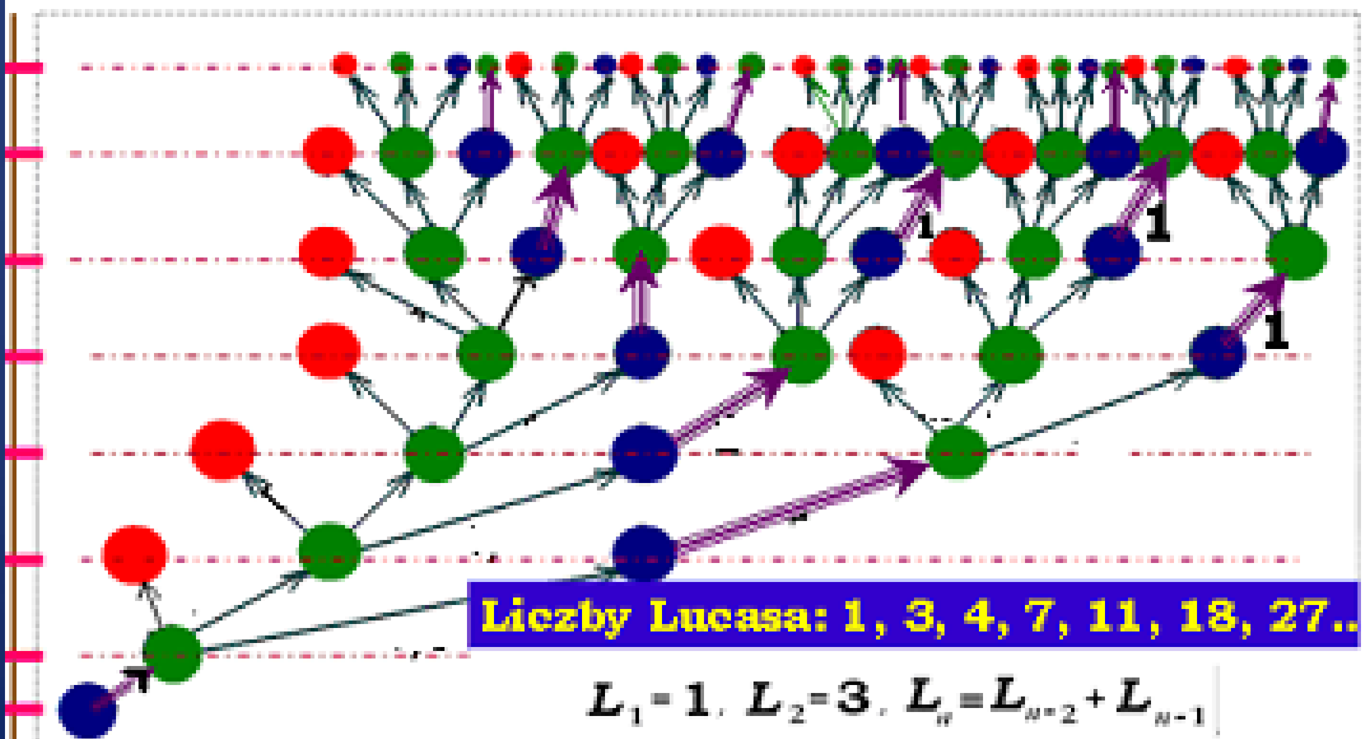
Co widzisz na obrazku?

- Poprzedni slajd może służyć do ilustracji twierdzenia Eulera:
- **Liczba kulek (12) – liczba sklejeń (30) + liczba „dziur” (20) = 2**
- **A także do ilustracji**
- **zadania**
- **o musze i pająku**



Druciki kreatywne

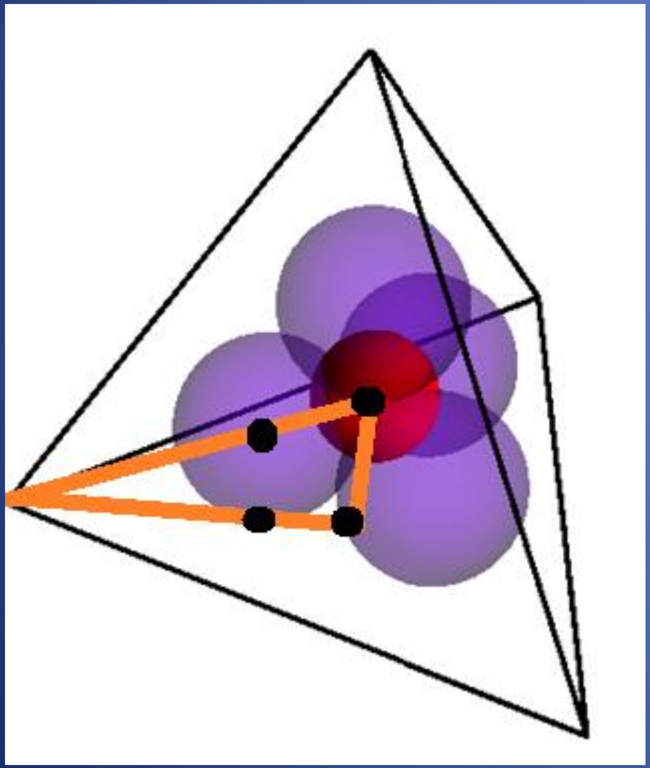
A … zadanie. W przeciwległych wierzchołkach ośmiościanu foremnego siedzą pająk i mucha. Pająk rozpiął już pajęczynę, czeka na obiad. Mucha łazi bezmyślnie po ośmiościanie. Trzyma w łapkach kostkę czworościenną i po dojściu do kolejnego wierzchołka (co zajmuje jej minutę) rzuca tą kostką i idzie tam, ona pokazała. Realistyczne, prawda? Jak długo pożyje?

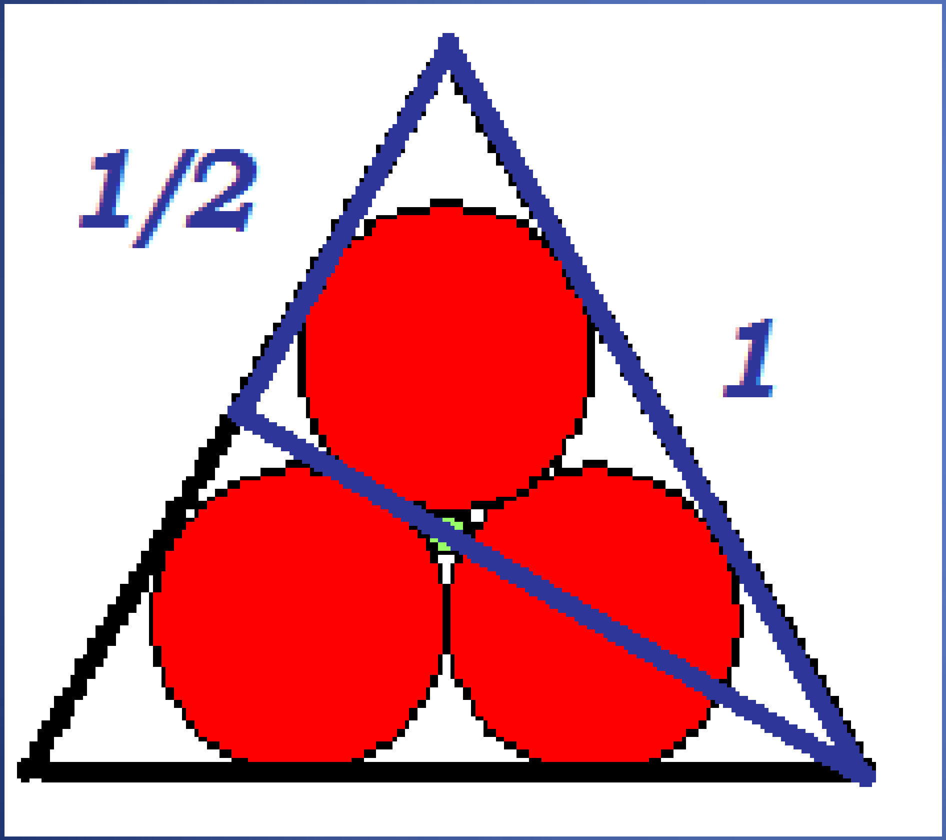


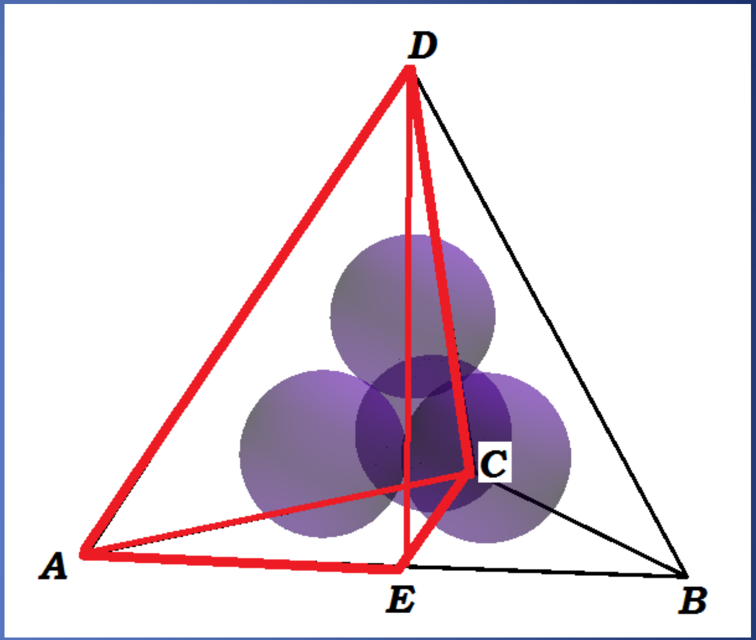
$L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$

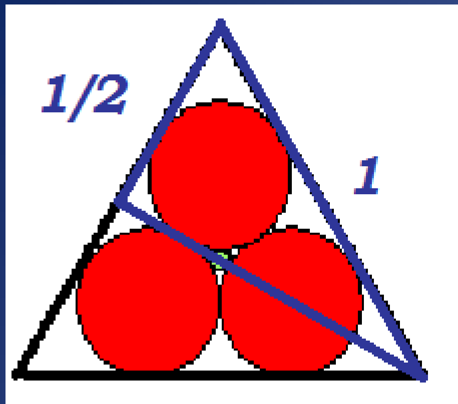
Promień małej kulki (wewnętrznej)

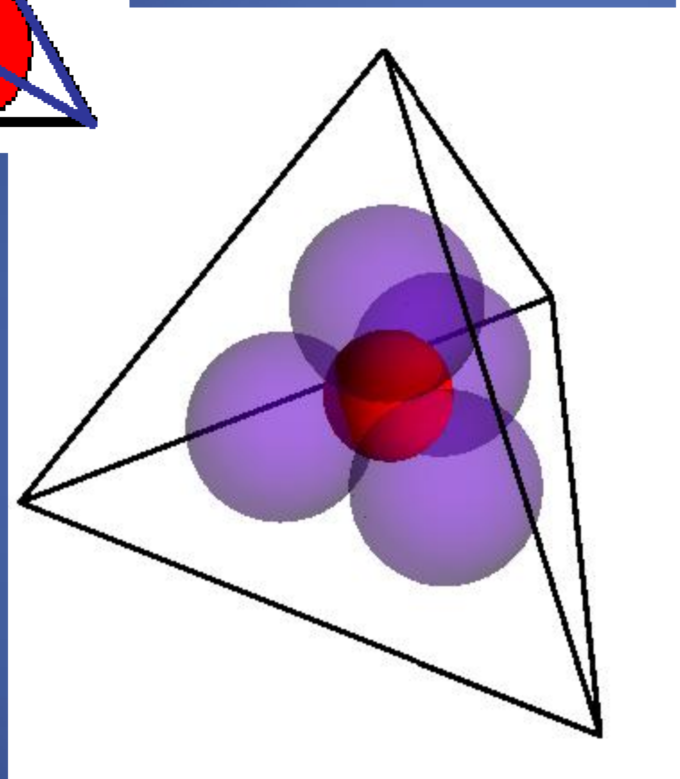
- Pokombinujmy i na pewno wyjdzie ….

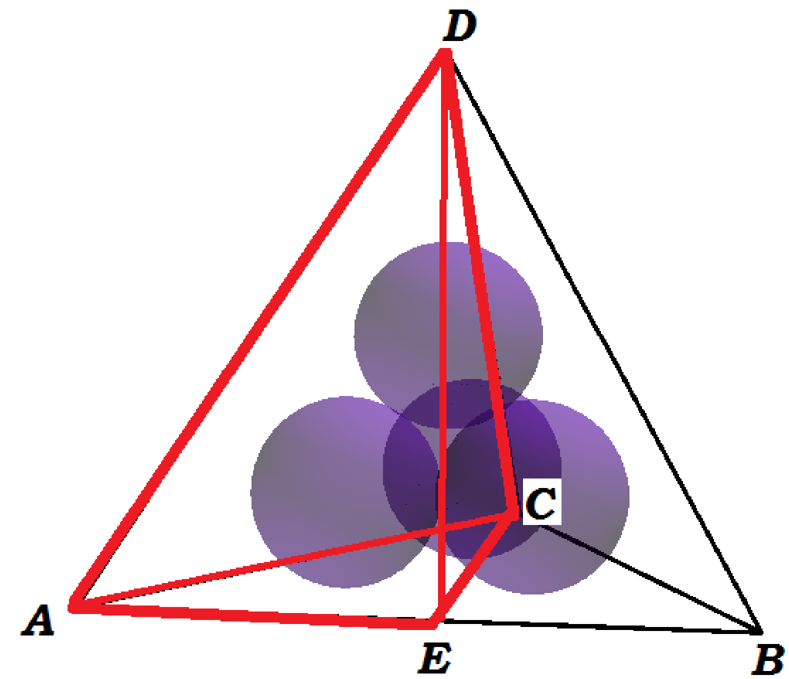


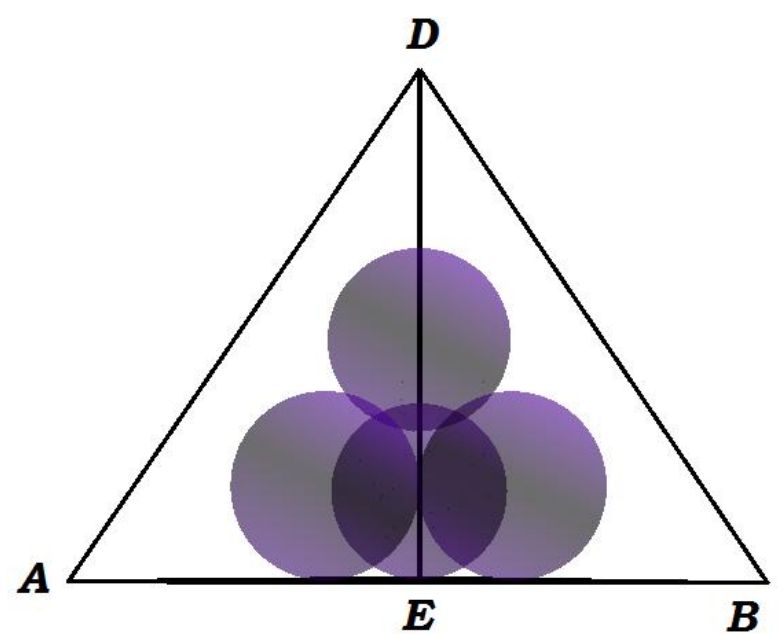

1/2
1


D
C
A
E
B


1/2
1



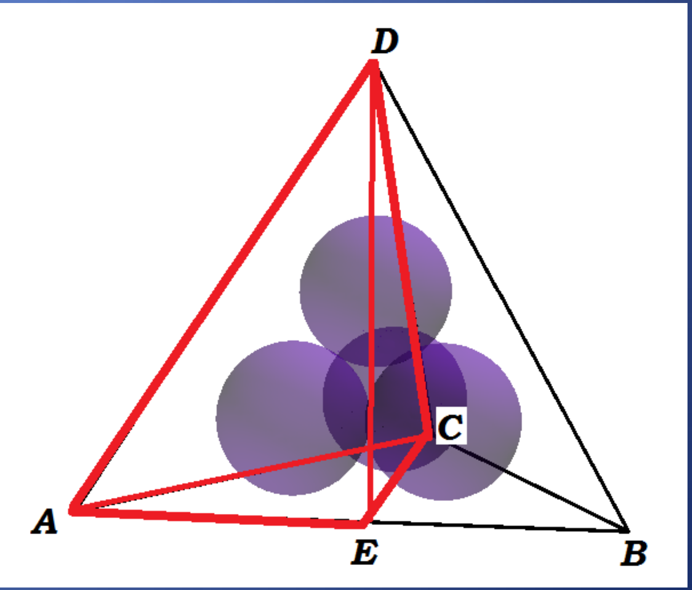

D
C
A
E
B


D
A
E
B

Promień kul stycznych do naroży

$$r = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{a^3}{8}}{\frac{a^2}{4}\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} =$$

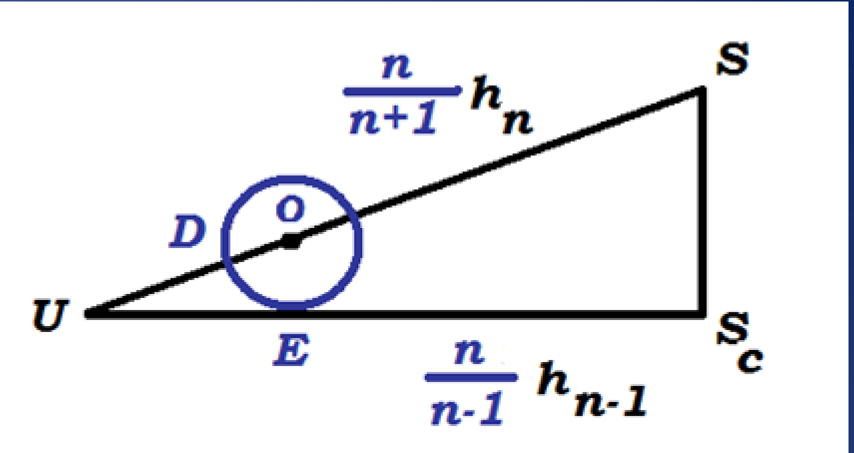
$$= a\frac{\sqrt{6}-1}{10}$$



W wymiarze *n* …

Skorzystamy ze wzoru na promień kuli wpisanej

$$r = \frac{n \cdot V_n}{S_n}.$$



$$\text{WPISANA} \quad i_n = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}$$

$$\text{WEWNĘTRZNA} \quad \rho_n = \frac{(n+1)^2 - (n+3)\sqrt{T_n}}{(n+1)(n-1)(n+2)}$$

$$\text{NAROŻNA} \quad s_n = \frac{\sqrt{T_n} - 1}{n^2 + n - 2}$$

Co z tego?

$$WPISANA \quad i_n = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}$$

$$\text{NAROŻNA} \quad s_n = \frac{\sqrt{T_n} - 1}{n^2 + n - 2}$$

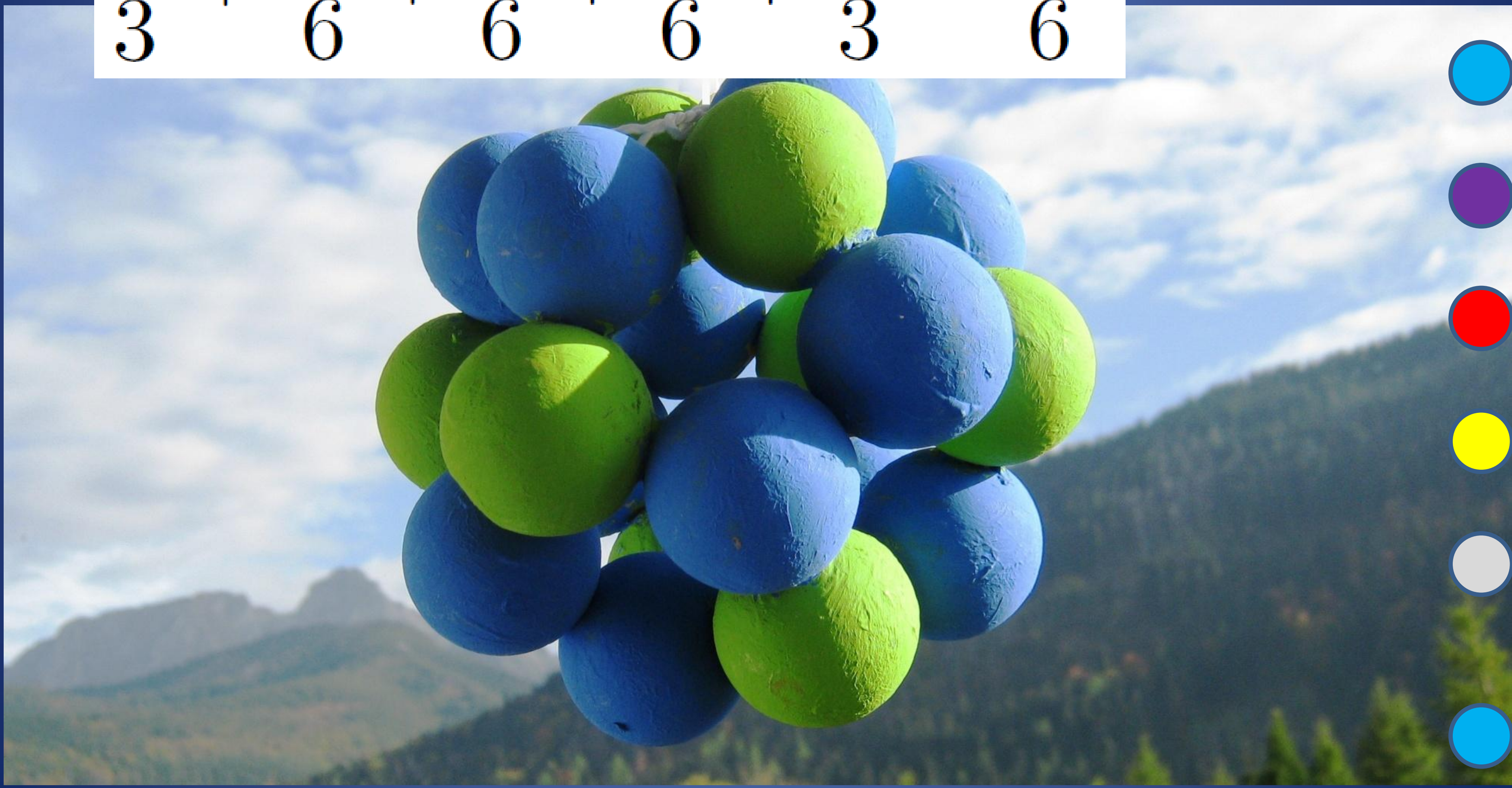
$$\text{WEWNĘTRZNA} \quad \rho_n = \frac{(n+1)^2 - (n+3)\sqrt{T_n}}{(n+1)(n-1)(n+2)}$$

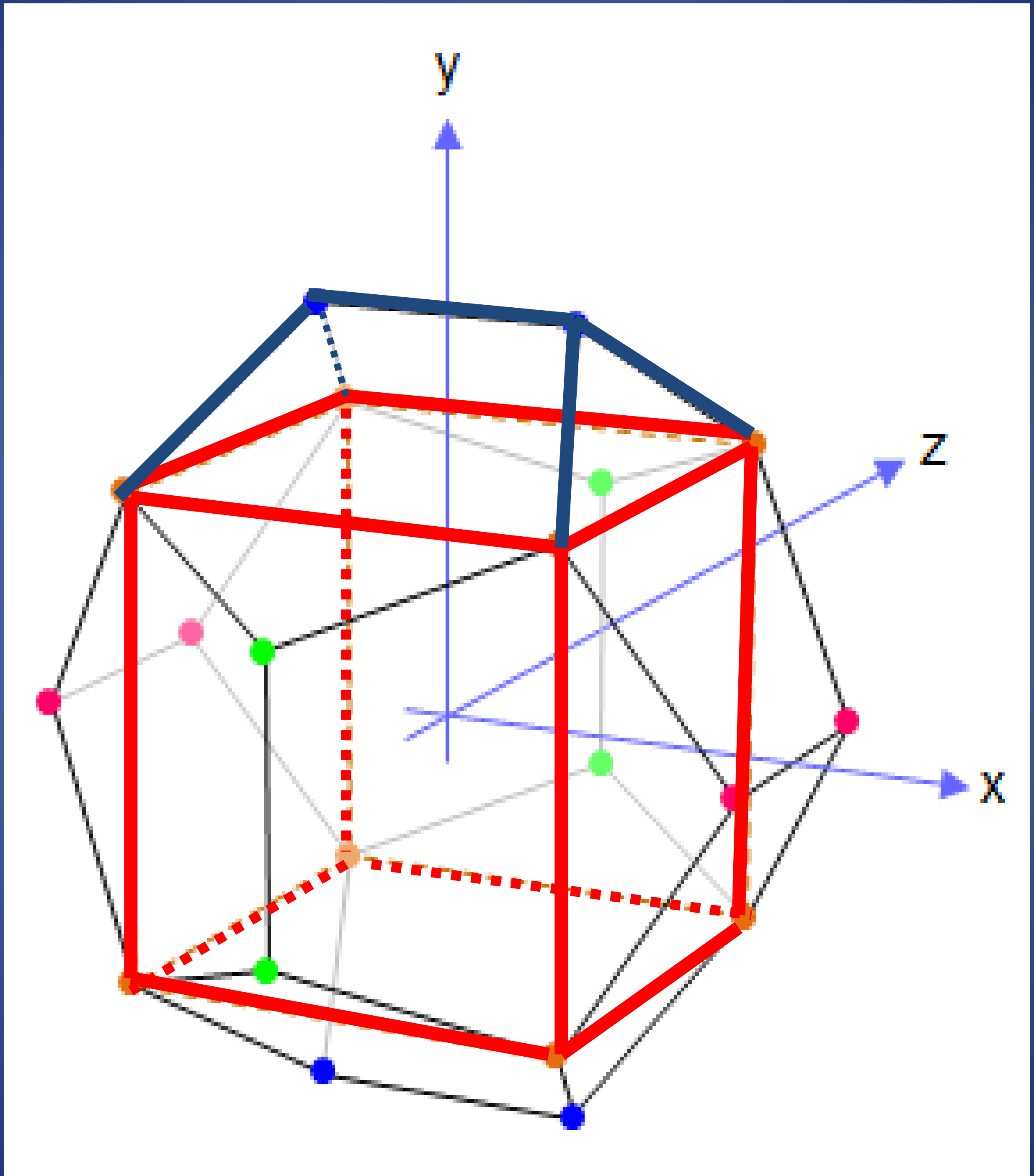
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{s_n} = \sqrt{2} - 1$$

W kostce granica była nieskończona

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

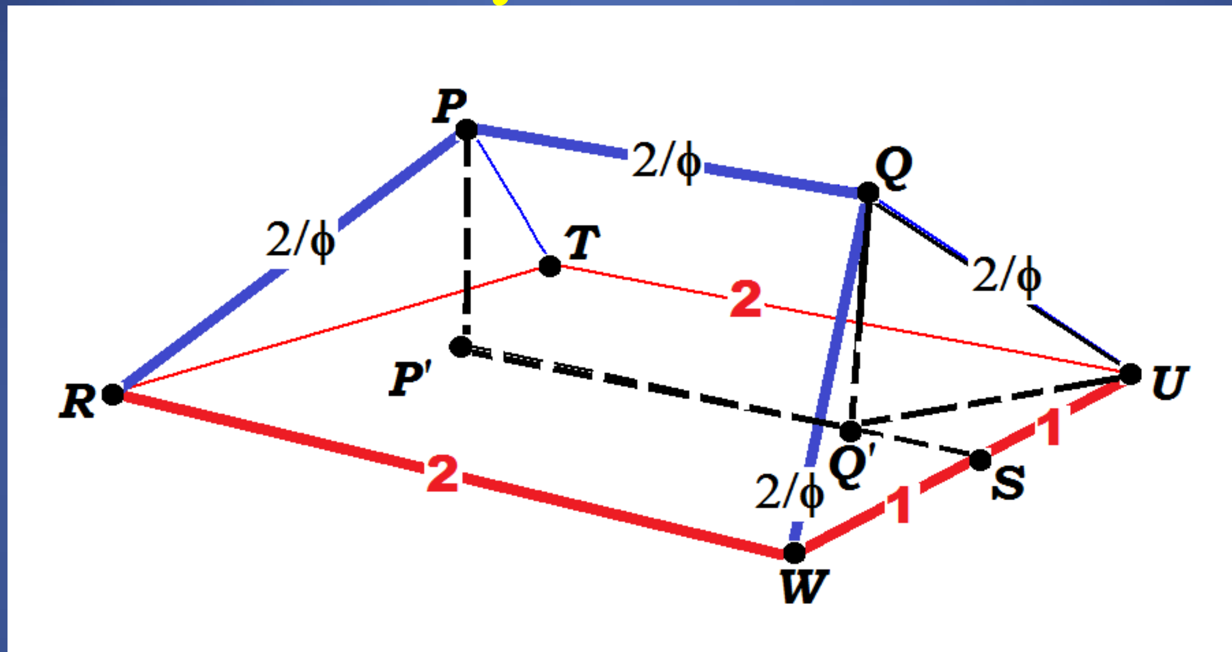
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6}.$$




y
z
x

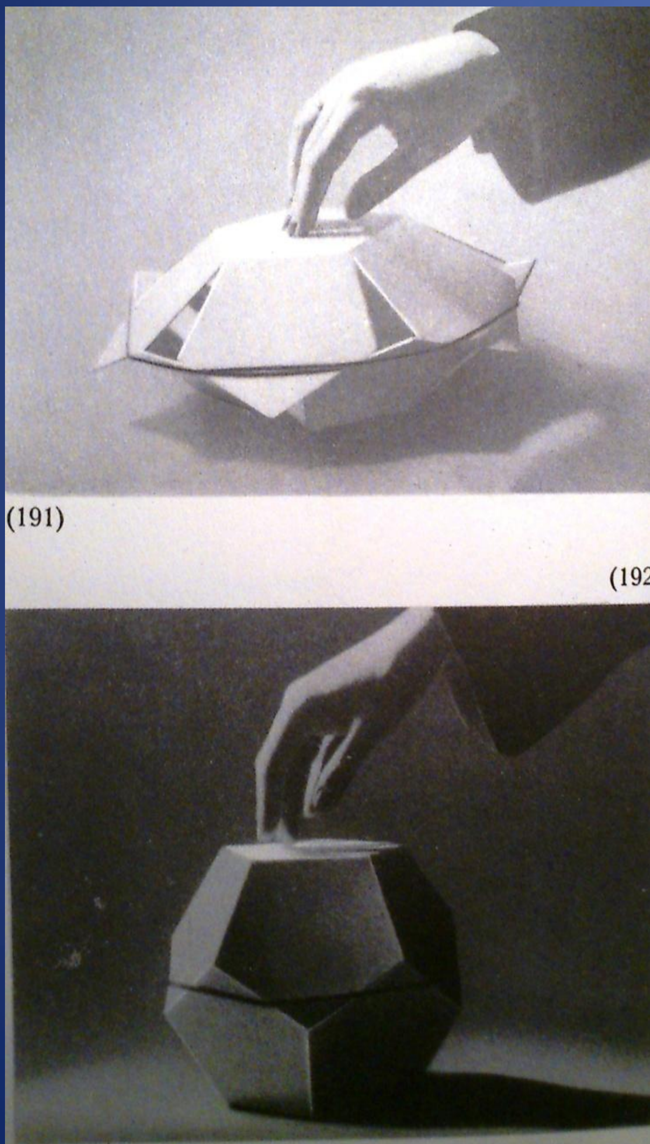
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

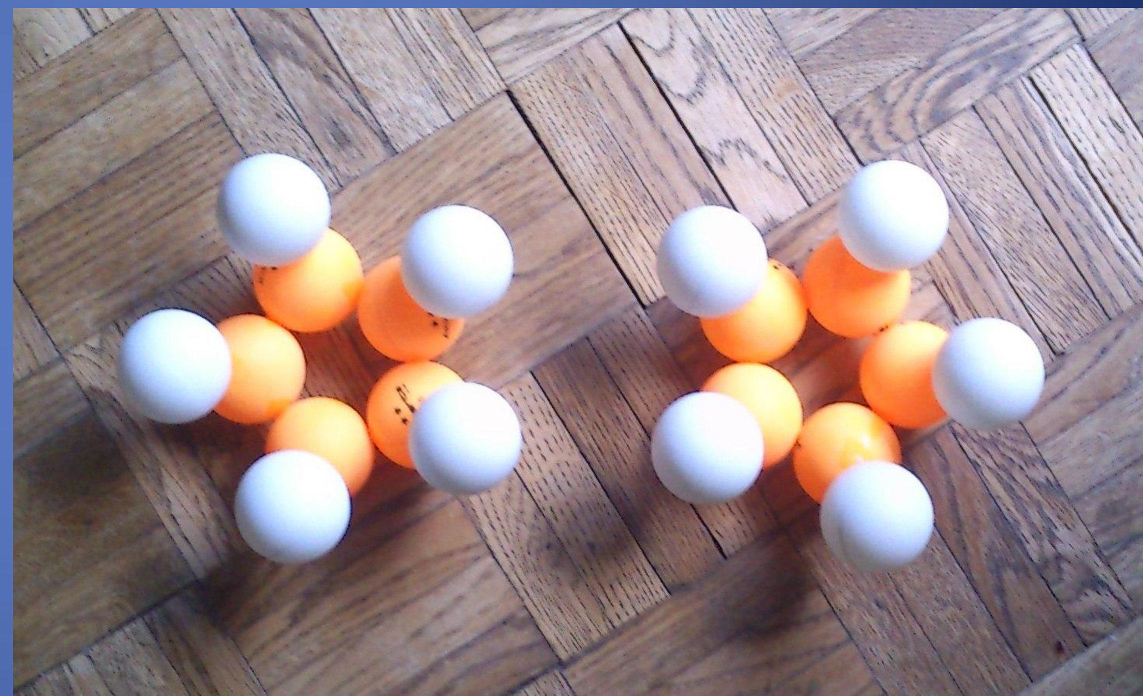
Jak dobrać się do dwunastościanu?



Niech φ będzie „złotą liczbą”, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Jest to dodatni pierwiastek równania $x^2 - x - 1 = 0$. Dlatego $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ oraz $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$. Jeżeli $RW + WU = UT = TR = 2$ i $RP = PQ = QW = OU = PT = \frac{2}{\varphi}$, to wysokością daszka jest $\varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Mamy bowiem $Q'U^2 = Q'S^2 + 1 = \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)^2 + 1$, a zatem wysokość QQ' jest równa pierwiastkowi kwadratowemu wielkości $\frac{4}{\varphi^2} - \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)^2 - 1$. Po krótkich rachunkach otrzymujemy $QQ' = \varphi - 1$.

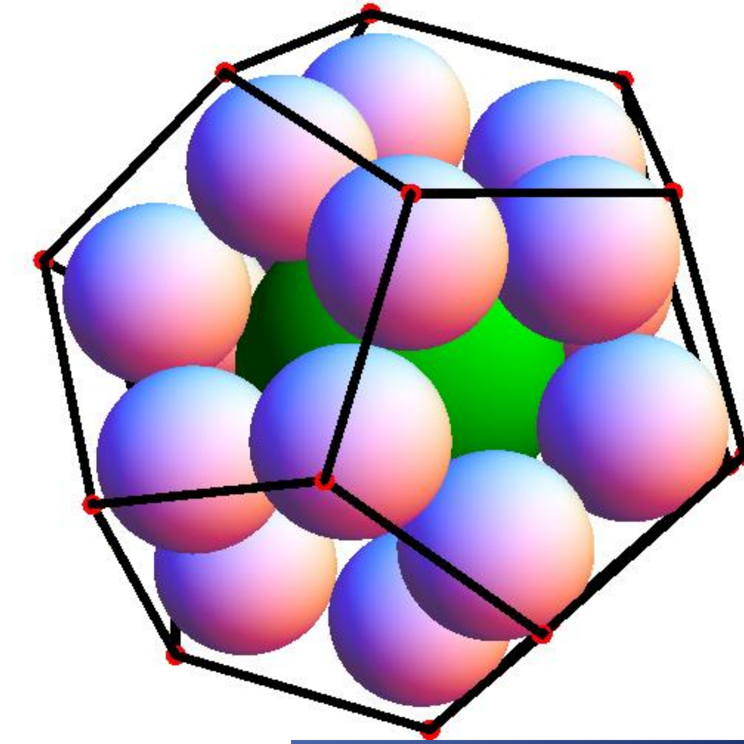
Fazy konstrukcji dwunastościanu





Dla dwunastościanu o krawędzi **2/φ** i

- promieniu sfery
- opisanej **√3** , mamy:

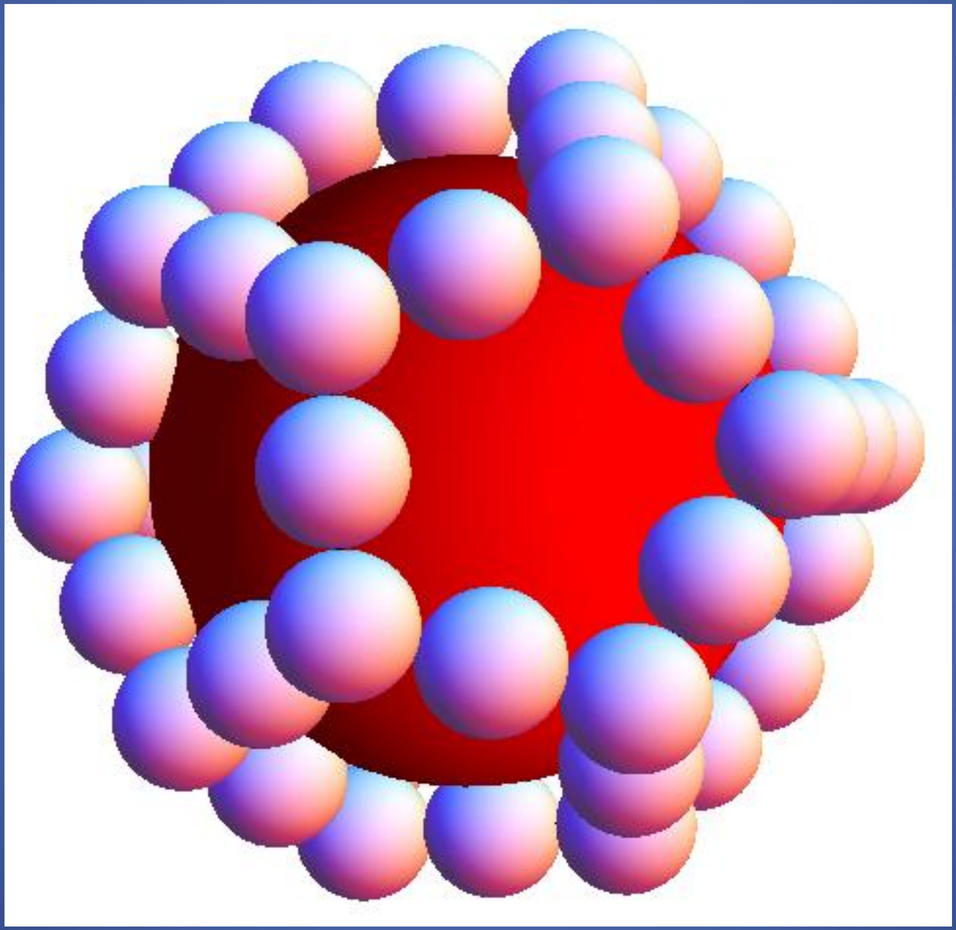


NAROŻNA $s = \dfrac{-20 + 2\sqrt{5} + \sqrt{65 + 22\sqrt{5}} + \sqrt{5\left(65 + 22\sqrt{5}\right)}}{19\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$

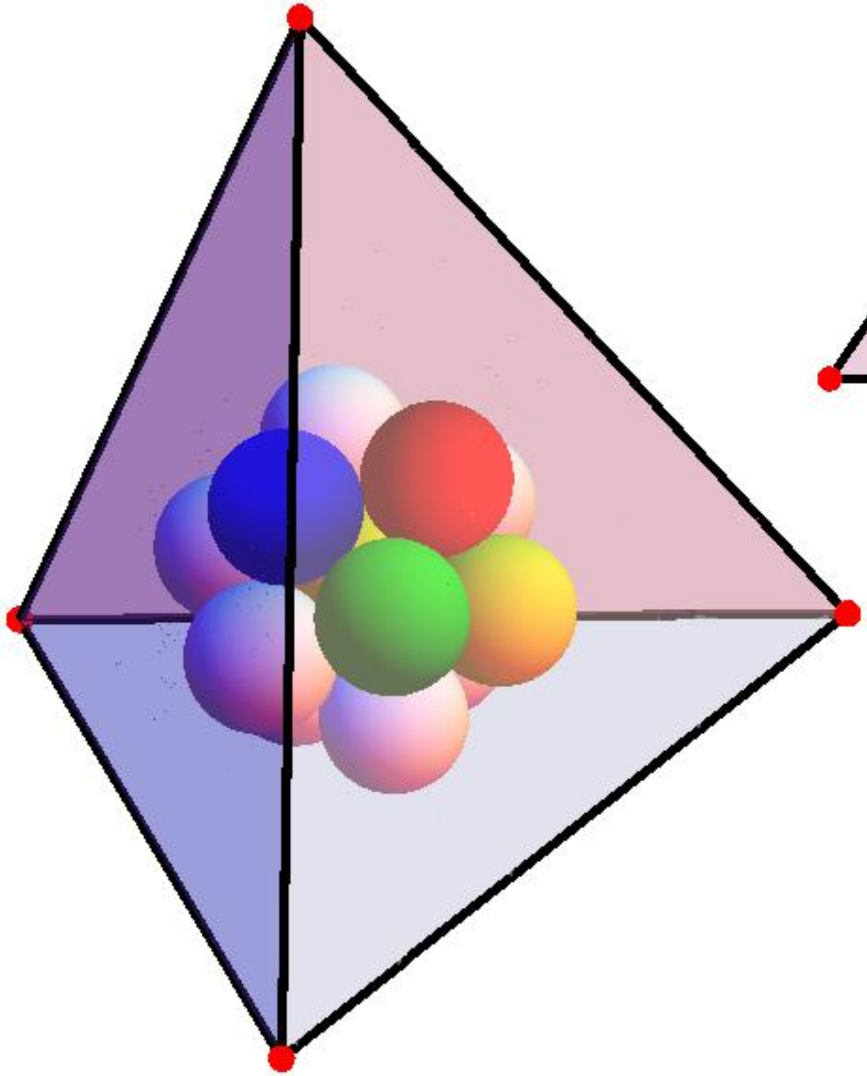
WEWNĘTRZNA

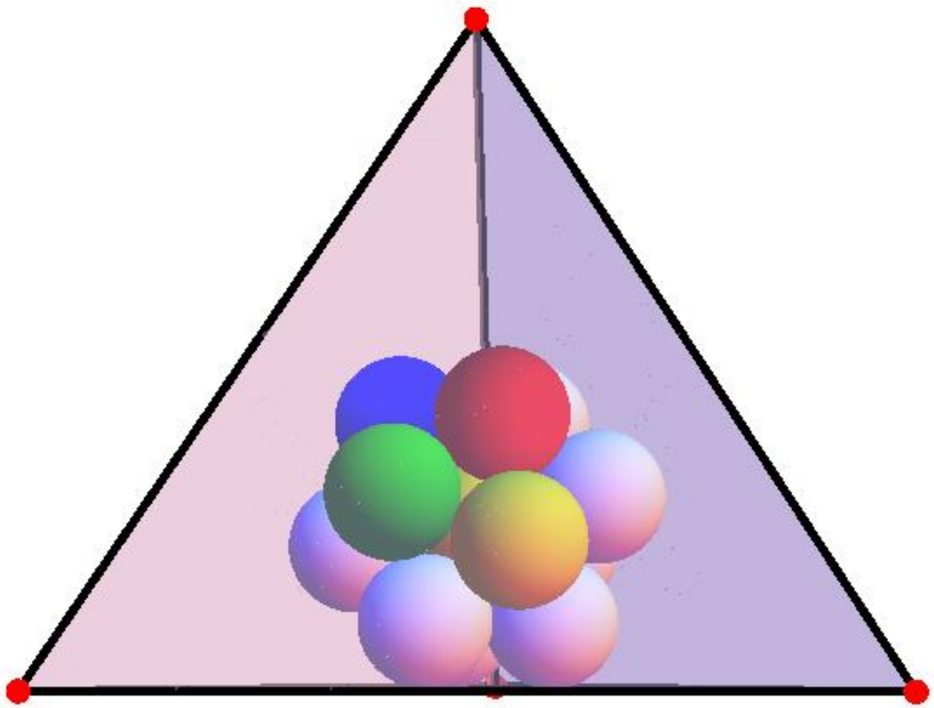
$$\rho = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(20\sqrt{2} - 2\sqrt{10} + 11\sqrt{75 - 15\sqrt{5}} + 23\sqrt{15 - 3\sqrt{5}} - 2\sqrt{15\left(43 + 9\sqrt{5}\right)} - \sqrt{130 + 44\sqrt{5}} - \sqrt{650 + 220\sqrt{5}}\right)}{2\sqrt{2}\left(-5 - 9\sqrt{5} + 3\sqrt{65 + 22\sqrt{5}} + \sqrt{5\left(65 + 22\sqrt{5}\right)}\right)}$$

Skleić taki dwunastościan....



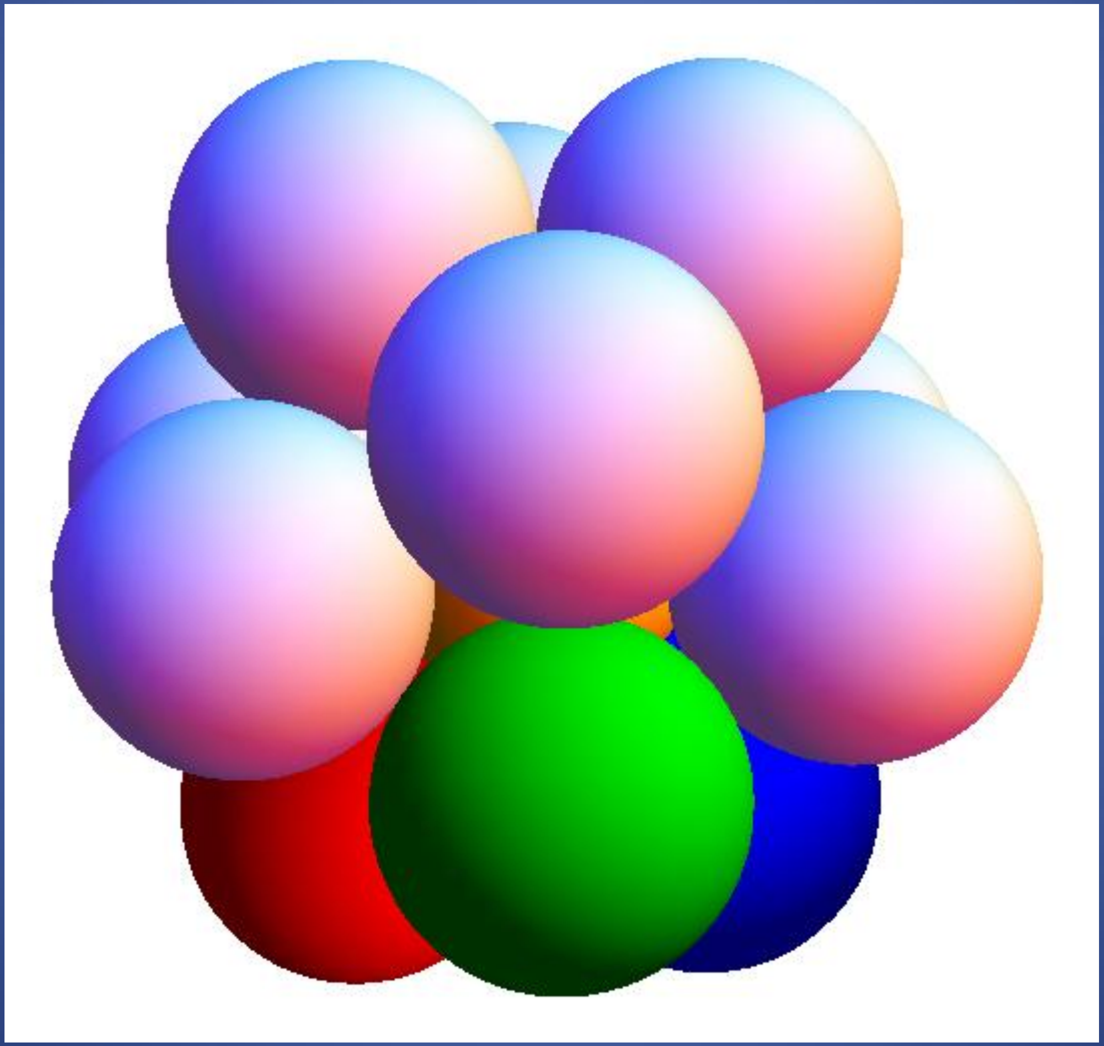
Czworościan „styczny” do dwudziestościanu



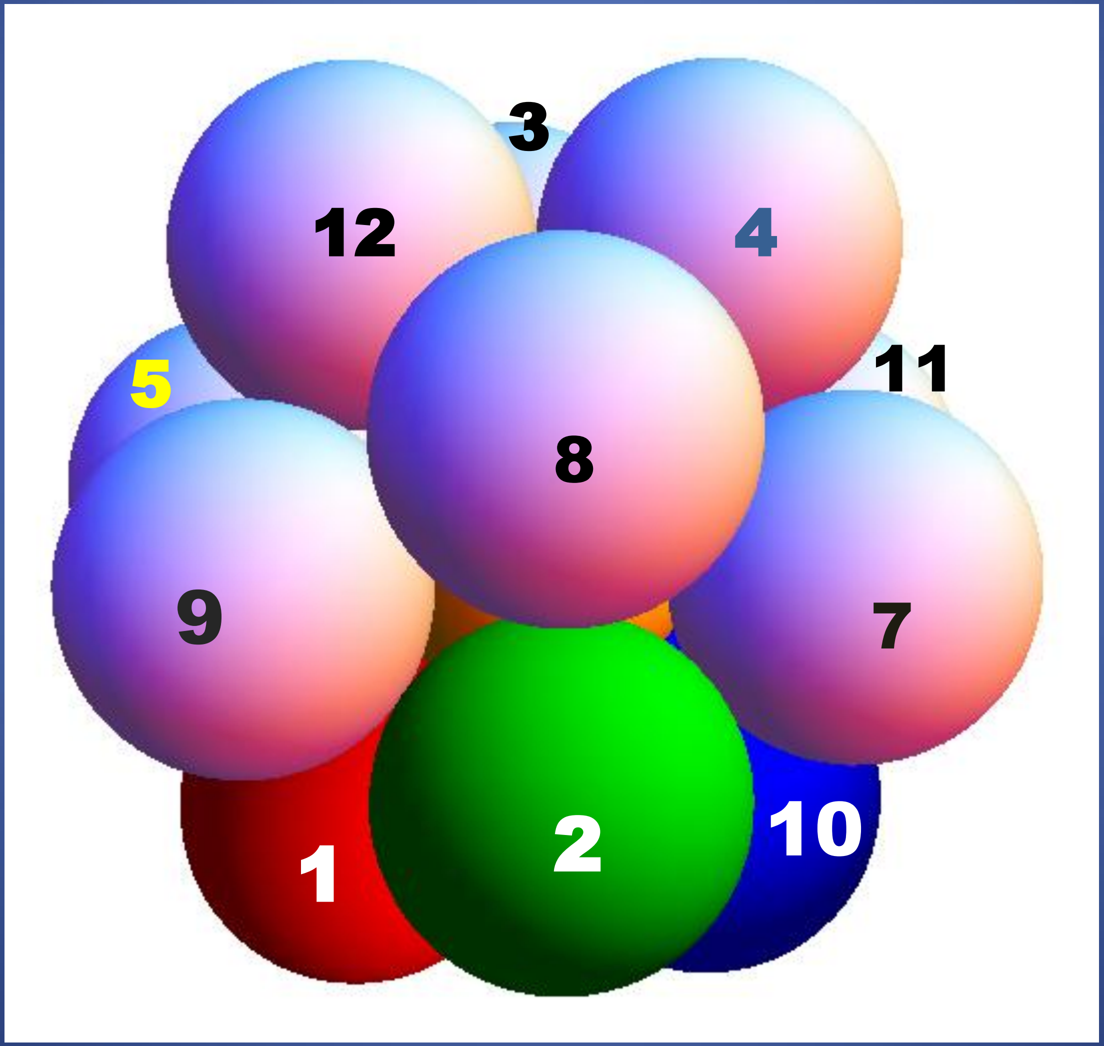


Czworościan, który jest „opisany na” dwudziestościanie foremnym o krawędzi 1, ma krawędź $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$.

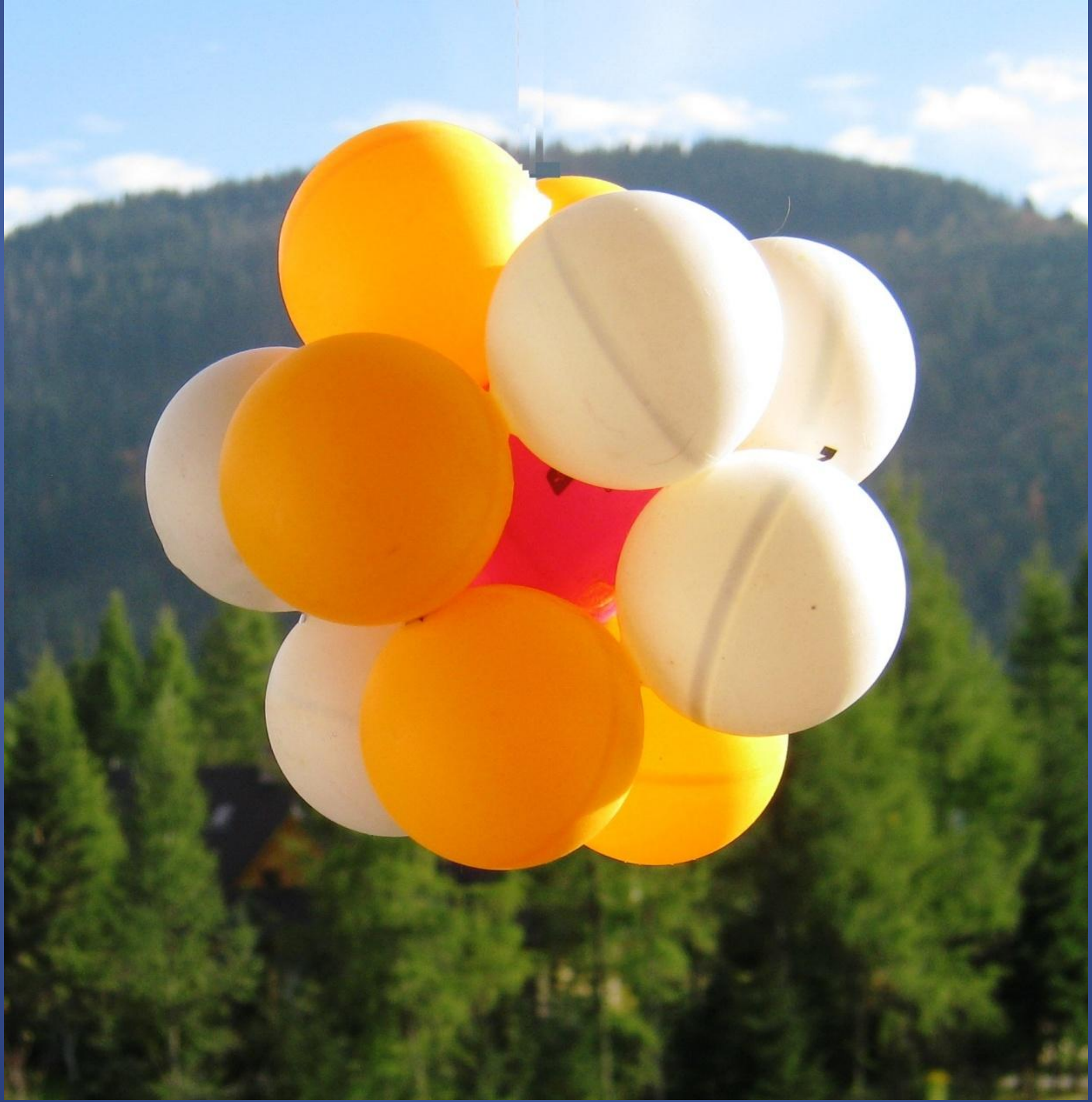
Dwudziestościan i czworościan „opisany”



Dwudziestościan i czworościan „opisany”



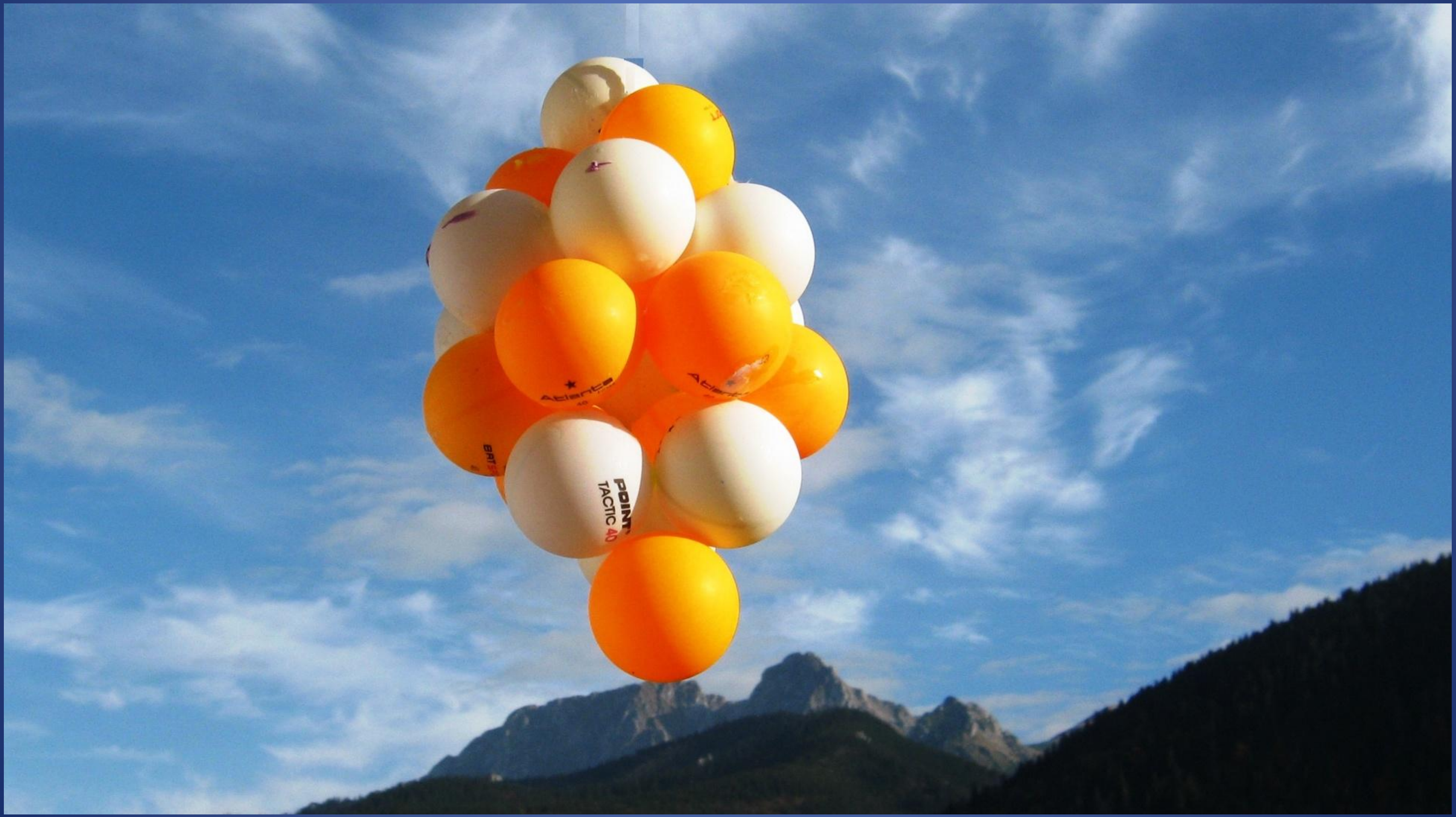
Rany Julek, kosmici lądują…….



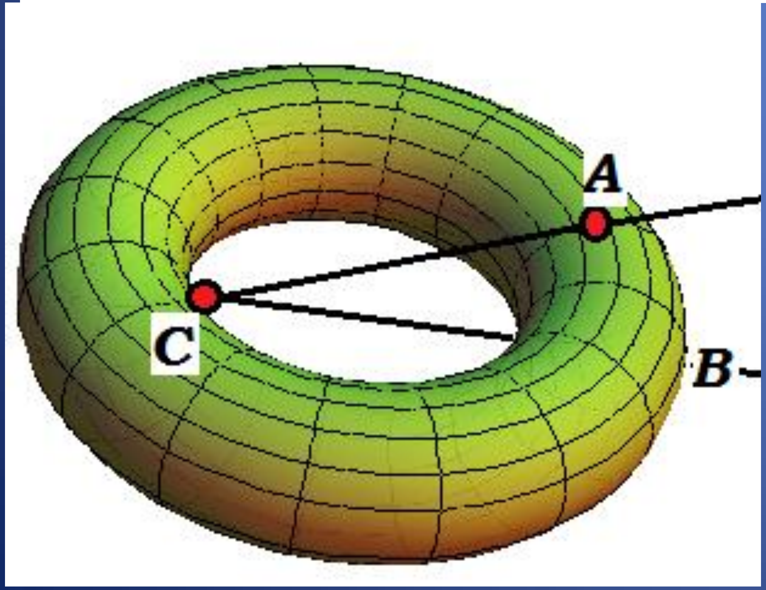
Narysować siatkę tego UFO …

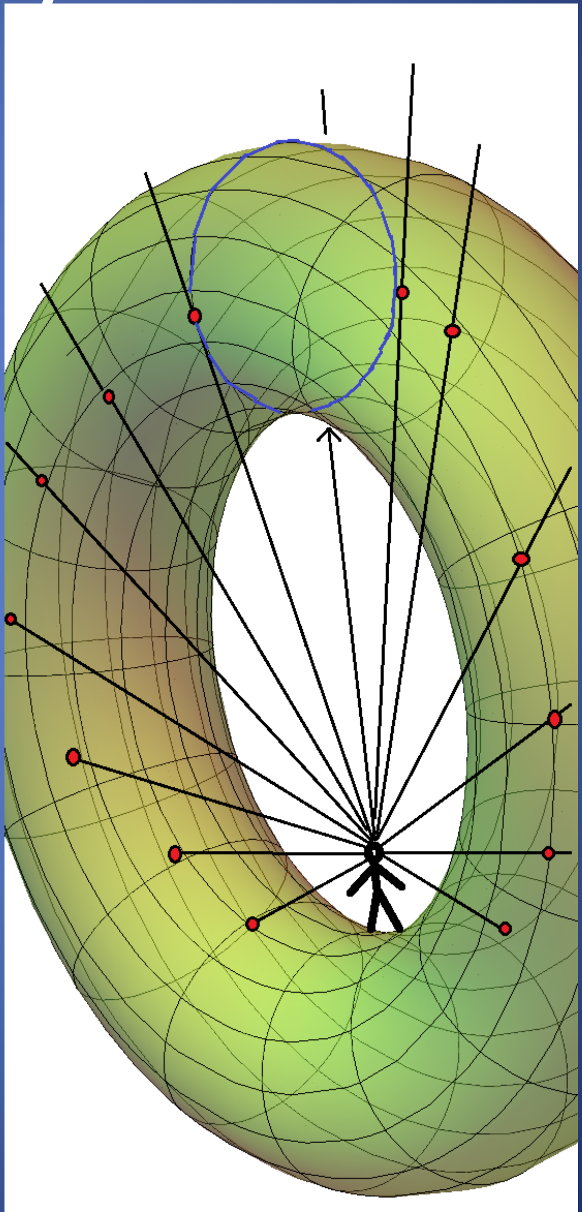
Nie bójcie się, to jest nieduże…

Inne bryłki

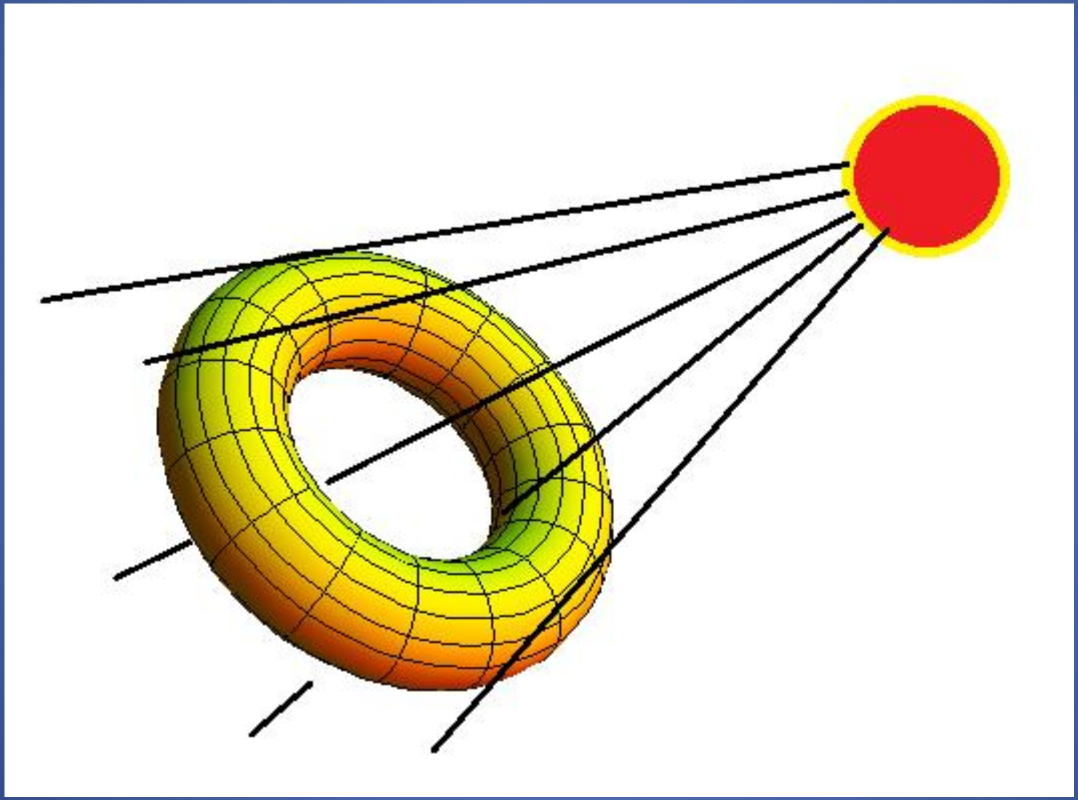


Zadanie literackie. Życie na torusie



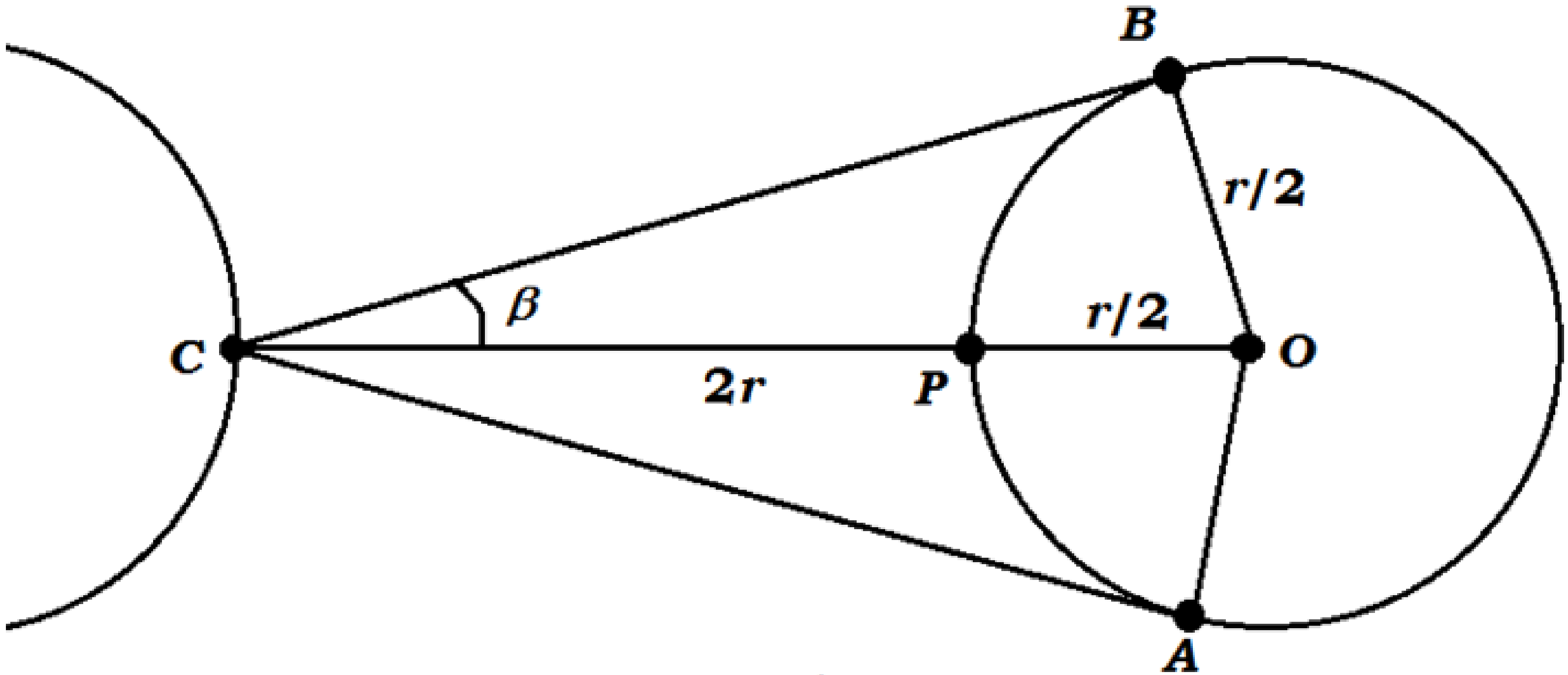


Lato na półkuli północnej torusa



Torus o obwodach 50000 i 25000 km

Promienie równików wynoszą odpowiednio $R = 50000/2\pi$ oraz $r = 25000/2\ \pi$, szerokość pasa między nimi jest równa $25000/2\ \pi$, , a zatem odległość CO wynosi $2r + r/2$, co jest równe (w przybliżeniu, oczywiście) 7975,75 kilometra. Z trójkąta ACB wyznaczamy (to powtórka z geometrii dla maturzystów) kąt ACB. Wynosi on 23 stopnie.



$\sin\beta = 1/5$, $\beta = 11^{o}32'$

$2\beta = 23^{o}04'$

Podsumowanie

- 0) Inny styl uprawiania matematyki
- 1) Techniczne i matematyczne problemy sklejania
- 2) Kombinatoryka: ile tego jest
- 3) Wzajemne konfiguracja różnych brył
- 4) Zadanie o kulach narożnych i kuli wewnętrznej – przejście do wyższych wymiarów
- 5) Metryka elektryczna
- 6) Pająk i mucha
- 7) Gęstość upakowania kul w przestrzeni
- 8) Życie na torusie