Kolorowe Kwadraty

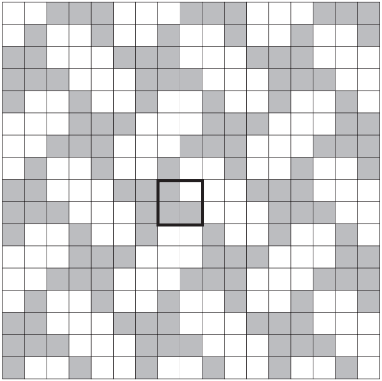
Marcin Pitera

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

"Siłą, czy sposobem?"
Ameliówka, 24-26 października 2014

O czym będziemy mówić?

- Zadania (głównie przygotowujące do olimpiad) związane z tzw. ''metodą niezmienników w geometrii''. Przeanalizujemy kilka, aby poznać ''triki''.
- Szachownice, układy szachowe, przejście z jednego układu do drugiego
- Rysowanie kwadracików i kolorowanie ich, kafelkowanie, pokrywanie, itd.

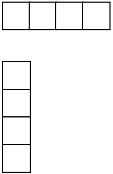


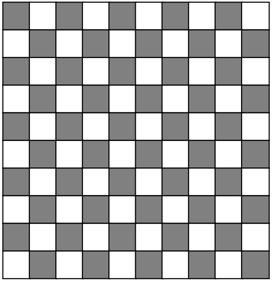
Zadanie 1

Zamiast wszystko formalnie definiować, pokażemy kilka problemów, które wyjaśnią ''metodę niezmienników'' i powiązanie z szachownicą.

Zadanie 1

Mamy daną szachownicę 10×10 oraz klocki 1×4. Czy przy pomocy klocków można wypełnić całkowicie szachownicę?

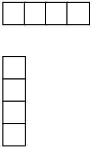


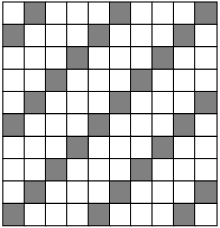


Zadanie 1: rozwiązanie

Rozwiązanie

Pokolorujmy inaczej pola na szachownicy!





Każdy klocek zajmie dokładnie jedno pole. Pól jest 26, natomiast $100/4 = 25$. Dostajemy sprzeczność. Klockami tym nie da się więc wypełnić szachownicy.

Zadanie 2

Zadanie 2

Kiedy szachownicę o wymiarach $a \times b$ da się wypełnić klockami o wymiarach $1 \times m$ $(a, b, m \in \mathbb{N}_+)$?

Odpowiedź

Wtedy i tylko wtedy, gdy $m|a$ lub $m|b$.[1]

[1] Wynik ten nosi czasami nazwę Twierdzenie Klarner'a, bądź (w szerszym kontekście) Twierdzenia de Bruijn'a.

Zadanie 2

Zadanie 2

Kiedy szachownicę o wymiarach $a \times b$ da się wypełnić klockami o wymiarach $1 \times m$ $(a, b, m \in \mathbb{N}_+)$?

Odpowiedź

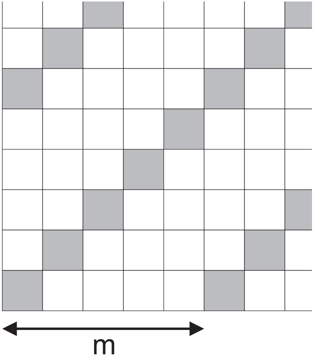
Wtedy i tylko wtedy, gdy $m|a$ lub $m|b$.[1]

[1] Wynik ten nosi czasami nazwę Twierdzenie Klarner'a, bądź (w szerszym kontekście) Twierdzenia de Bruijn'a.

Rozwiązanie

Rozwiązanie (1/3)

Postępujemy podobnie, jak poprzednio.

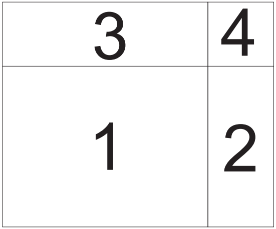


Każdy klocek zajmie dokładnie jedno pole. Dzielimy następnie szachownice na 4 prostokąty.

Rozwiązanie

Rozwiązanie (2/3)

Prostokąt 1 będzie miał maksymalne podzielne przez m wymiary. W prostokątach 1, 2 oraz 3 będzie odpowiednia ilość (pokolorowanych) pól. Skupmy się więc na prostokącie 4. Załóżmy, że reszty z dzielenia przez m liczb a oraz b są niezerowe i wynoszą odpowiednio z_1 oraz z_2 $(z_1, z_2 < m)$.



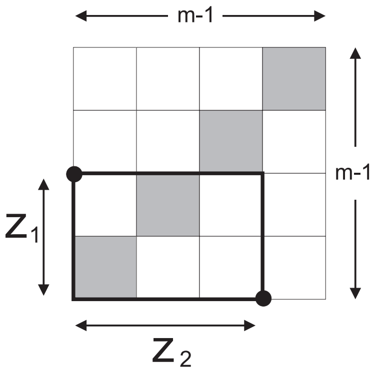
Rozwiązanie

Rozwiązanie (3/3)

W prostokącie $(m-1)\times(m-1)$ pokolorowane pola będą leżały tylko na przekątnej. Wynika stąd, że liczba pokolorowanych pól będzie wynosiła $\min\{z_1, z_2\}$. Korzystając z tego, iż $\max\{z_1, z_2\} < m$ dostajemy

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \min\{z_1, z_2\} \cdot \max\{z_1, z_2\} \\ &< \min\{z_1, z_2\} \cdot m, \end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności (m razy liczba pokolorowanych pól powinna nam dać pole prostokąta $z_1 \cdot z_2$).



Podsumowanie

Podsumowanie

- Jak widać rozwiązanie pierwszych dwóch zadań w praktyce nie wymagało żadnej wiedzy matematycznej. Wystarczyło trochę się pobawić i kolorować wybrane pola. Rozwiązania takich zadań zazwyczaj nie są schematyczne i wymagają niekonwencjonalnego podejścia do problemów. Bardzo dobre zadania, na początek przygody z konkursami, olimpiadami, etc.
- Mieliśmy dany 'układ' o jakimś stanie początkowym (pusta szachownica), a potem wykonując serię operacji (dokładanie klocków) chcieliśmy dojść do układu o innym stanie (zapełniona szachownica). Niezmiennikiem była tutaj liczba pokolorowanych pól zajętych przez klocki (każda operacja to +1 zajęte pole).
- Zadania te często można opisać jako 'grę'. Zmiany stanów mogą odpowiadać ruchom gracza.

Podsumowanie

Podsumowanie

- Jak widać rozwiązanie pierwszych dwóch zadań w praktyce nie wymagało żadnej wiedzy matematycznej. Wystarczyło trochę się pobawić i kolorować wybrane pola. Rozwiązania takich zadań zazwyczaj nie są schematyczne i wymagają niekonwencjonalnego podejścia do problemów. Bardzo dobre zadania, na początek przygody z konkursami, olimpiadami, etc.
- Mieliśmy dany 'układ' o jakimś stanie początkowym (pusta szachownica), a potem wykonując serię operacji (dokładanie klocków) chcieliśmy dojść do układu o innym stanie (zapełniona szachownica). Niezmiennikiem była tutaj liczba pokolorowanych pól zajętych przez klocki (każda operacja to +1 zajęte pole).
- Zadania te często można opisać jako 'grę'. Zmiany stanów mogą odpowiadać ruchom gracza.

Podsumowanie

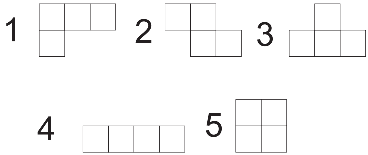
Podsumowanie

- Jak widać rozwiązanie pierwszych dwóch zadań w praktyce nie wymagało żadnej wiedzy matematycznej. Wystarczyło trochę się pobawić i kolorować wybrane pola. Rozwiązania takich zadań zazwyczaj nie są schematyczne i wymagają niekonwencjonalnego podejścia do problemów. Bardzo dobre zadania, na początek przygody z konkursami, olimpiadami, etc.
- Mieliśmy dany 'układ' o jakimś stanie początkowym (pusta szachownica), a potem wykonując serię operacji (dokładanie klocków) chcieliśmy dojść do układu o innym stanie (zapełniona szachownica). Niezmiennikiem była tutaj liczba pokolorowanych pól zajętych przez klocki (każda operacja to +1 zajęte pole).
- Zadania te często można opisać jako 'grę'. Zmiany stanów mogą odpowiadać ruchom gracza.

Wypełnianie prostokątów

Inne zadania

- Prostokąty można wypełniać przeróżnymi rzeczami. Np. różnymi klockami, które powstają przez połączenie małych kwadracików. Takie klocki nazywamy poliminami. Przykładowo z 4 kwadracików można uzyskać pięć różnych tetramin[2] Omówimy kilka podstawowych problemów.



- Idąc za ciosem, rozważmy prostokąt 10×10 i zapytajmy czy można go wypełnić tymi klockami (każdym z osobna).

[2] przedrostek określa liczbę klocków, np. *domino, trimino, pentamino*. Pięć różnych z dokładnością do odbicia i obrotu.

Wypełnianie szachownicy - klocki "L"

Zadanie 3

Czy można wypełnić szachownicę 10×10 tetraminami o kształcie litery "L"?

Odpowiedź

Niestety jest to niemożliwe. Ogólnie szachownicę $a \times b$ można wypełnić klockami "L" wtw. $8|a \cdot b$ oraz $\min\{a, b\} > 1$.[3]

[3] Taki sam dowód zadziała dla ogólnego przypadku.

Wypełnianie szachownicy - klocki "L"

Zadanie 3

Czy można wypełnić szachownicę 10×10 tetraminami o kształcie litery "L"?

Odpowiedź

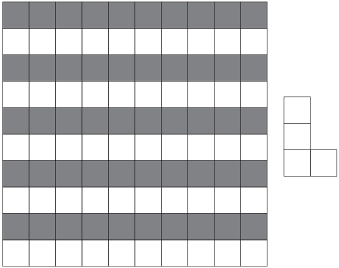
Niestety jest to niemożliwe. Ogólnie szachownicę $a \times b$ można wypełnić klockami "L" wtw. $8|a \cdot b$ oraz $\min\{a, b\} > 1$.[3]

[3] Taki sam dowód zadziała dla ogólnego przypadku.

Wypełnianie szachownicy - klocki "L"

Rozwiązanie

Kolorujemy inaczej szachownicę. Na szachownicy musielibyśmy ułożyć $\frac{100}{4} = 25$ klocków, które by miały zająć 50 pokolorowanych pól. Z drugiej strony każdy klocek zajmuje nieparzystą ilość pól, więc suma pól zajętych przez 25 klocków również będzie nieparzysta. Sprzeczność.



Wypełnianie szachownicy - klocki ''T''

Zadanie 4

Czy można wypełnić szachownicę 10×10 tetraminami o kształcie litery ''T''?

Odpowiedź

Niestety jest to niemożliwe. Ogólnie szachownicę $a \times b$ można wypełnić klockami ''T'' wtw. $4|a$ oraz $4|b$.[4]

[4] Dowód dla ogólnego przypadku trudniejszy. Rozwiązanie: D. W. Walkup, *Covering a rectangle with T-Tetrominoes*, Amer. Math. Montly, 1965, pp. 986-988.

Wypełnianie szachownicy - klocki "T"

Zadanie 4

Czy można wypełnić szachownicę 10×10 tetraminami o kształcie litery "T"?

Odpowiedź

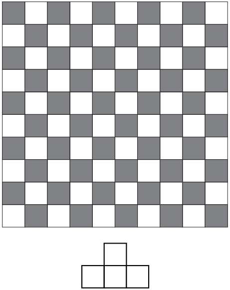
Niestety jest to niemożliwe. Ogólnie szachownicę $a \times b$ można wypełnić klockami "T" wtw. $4|a$ oraz $4|b$.[4]

[4] Dowód dla ogólnego przypadku trudniejszy. Rozwiązanie:
D. W. Walkup, *Covering a rectangle with T-Tetrominoes*, Amer. Math. Montly, 1965, pp. 986-988.

Wypełnianie szachownicy - klocki "T"

Rozwiązanie

To samo co wcześniej (L). Każdy klocek zajmie nieparzystą ilość pól



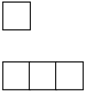
Inne klocki

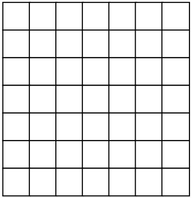
Dla klocków 2×2 oraz "Z" problemy są proste.

Wypełnianie szachownicy - 1×1 oraz 1×3

Zadanie 5

Dana jest szachownica 7×7, 16 klocków o wymiarach 1×3 oraz jeden klocek o wymiarach 1×1. Na których polach może leżeć monomino, aby szachownicę dało się pokryć klockami 1×3?

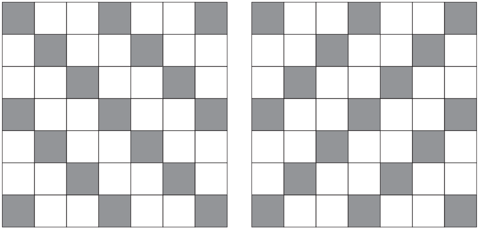




Wypełnianie szachownicy - 1×1 oraz 1×3

Rozwiązanie

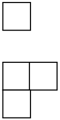
Kolorujemy szachownicę na dwa sposoby. Każdy klocek 1×3 zajmie jedno pokolorowane pole przy każdym kolorowaniu. Pól jest 17 , a więc monomino musi leżeć na pokolorowanym polu (inaczej $17 \cdot 3 = 51 \neq 49 = 7 \cdot 7$) w obydwu przypadkach. Przecięcie pokolorowanych pól daje rozwiązanie.

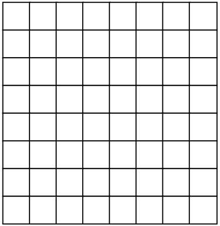


Wypełnianie szachownicy - 1×1 oraz trimina "L"

Zadanie 6

Dana jest szachownica 10×10, 33 trimina w kształcie litery "L" oraz jedno monomino. Na których polach może leżeć monomino, aby szachownicę dało się pokryć triminami?

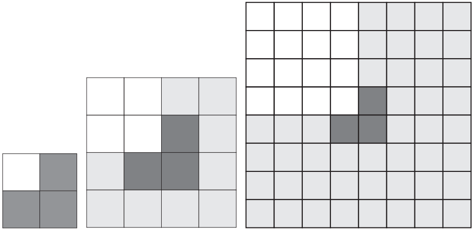




Wypełnianie szachownicy - 1×1 oraz trimina "L"

Rozwiązanie

W kwadracie 2×2 monomino może leżeć wszędzie (rys 1.). Kwadrat 4×4 to cztery kwadraty 2×2. Ustalamy kwadrat w którym ma leżeć monomino, a pozostałe wypełniamy jak na rys 2. – czarne pola to miejsca na monomina z porzedniego przypadku w które wkładamy trimino "L". Dla Kwadratu 8×8 robimy to samo. Monomino może więc leżeć gdziekolwiek.



Podsumowanie

Ogólna uwaga

Zadań tego typu jest cała masa - o bardzo różnym stopniu trudności (od zadań dla gimnazjalistów, przez zadania z międzynarodowych olimpiad matematycznych dla licealistów, do problemów otwartych). Jak ktoś by chciał kilka, to mogę dać po wykładzie!

Jeszcze jedna uwaga

Dużo stosunkowo prostych i "otwartych" problemów. Bardzo fajna tematyka na przeróżne konkursy prac uczniowskich – łatwo uogólniać, wymyślać nowe problemy, bawić się. Do tego jest to dobry wstęp do elementarnej kombinatoryki oraz teorii grafów.

Szachownica i figury szachowe - nie tylko szachy.

Wstęp

Większość uczniów zna podstawy gry w szachy. Z szachownicą jest związanych dużo ciekawych problemów. Niektóre bardzo znane (droga konika szachowego dla szachownicy 8×8), inne mniej.

Zadanie 7

Dana jest szachownica 4×4. Czy konik szachowy moze obejść tą szachownicę, odwiedzając każde pole tylko raz? (Nie jest istotne gdzie zaczyna, i gdzie kończy).

Szachownica i figury szachowe - nie tylko szachy.

Wstęp

Większość uczniów zna podstawy gry w szachy. Z szachownicą jest związanych dużo ciekawych problemów. Niektóre bardzo znane (droga konika szachowego dla szachownicy 8×8), inne mniej.

Zadanie 7

Dana jest szachownica 4×4. Czy konik szachowy moze obejść tą szachownicę, odwiedzając każde pole tylko raz? (Nie jest istotne gdzie zaczyna, i gdzie kończy).

Konik szachowy, a szachownica 4x4

Rozwiązanie

Nie jest to możliwe. Oznaczmy pola, jak na rysunku. Konik przechodząc z pól oznaczonych przez jedną z liter na pola oznaczone przez inną, musi przejść przez pole oznaczone cyfrą 0. W związku z tym konik by musiał stanąć 5 razy na polu oznaczonym cyfrą 0 (przechodząc przez każdą z liter a,b,c,d,e,f). Sprzeczność.[5]

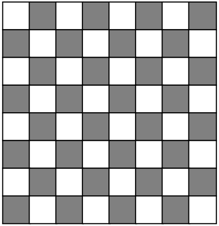
a	f	e	b
e	0	0	f
f	0	0	e
d	e	f	c

[5] Dla szachownicy 8×8 droga taka istnieje. Problem jej znalezienia był i jest dosyć znanym zagadnieniem. Zajmował sie tym m.in. de Moivre (XVIII wiek), który jako jeden z pierwszych znalazł technikę pozwalającą konikowi obejść wszystkie pola, a także Euler, podając w 1759 bardzo efektywny sposób jej przebycia.

Nie bijące się układy szachowe

Zadanie 8

Jaką maksymalną liczbę króli można rozmieścić na szachownicy 8×8 tak, żeby żadne dwa się nie biły?



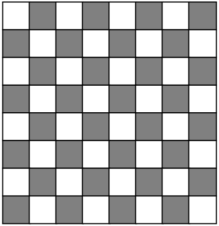
Rozwiązanie

Liczba ta wynosi 16. W przypadku szachownicy $a \times b$ będzie to $[\frac{m+1}{2}] \cdot [\frac{n+1}{2}]$.

Nie bijące się układy szachowe

Zadanie 8

Jaką maksymalną liczbę króli można rozmieścić na szachownicy 8×8 tak, żeby żadne dwa się nie biły?



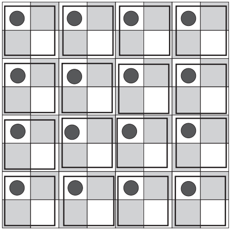
Rozwiązanie

Liczba ta wynosi 16. W przypadku szachownicy $a \times b$ będzie to $[\frac{m+1}{2}] \cdot [\frac{n+1}{2}]$.

Nie bijące się układy szachowe

Rozwiązanie

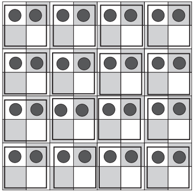
Dzielimy szachownicę na kwadraty 2x2. W każdym kwadracie może być co najwyżej jeden król. Górne ograniczenie wynosi więc 16. Dla 16 łatwo znaleźć odpowiednie rozmieszczenie (rys.)

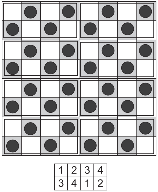


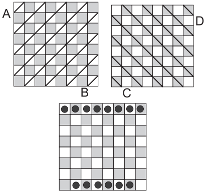
Nie bijące się układy szachowe

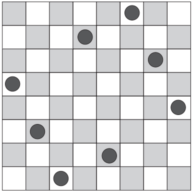
Inne zadania

Analogiczne zadania można rozważyć dla pionków, koni, laufrów, królówek. Rysunki powinny być wymowne.









Kolejny typ zadań – zmiana kolorów pól na szachownicy

Zadanie 9

Dana jest szachownica 8×8. Dozwolona jest następująca operacja: zmiana koloru wszystkich pól na przeciwne (z czarnych na białe i z białych na czarne) w dowolnym wierszu lub kolumnie. Rozstrzygnąć, czy wykonując dowolną ilość ruchów możemy dojść do układu w którym jedno pole jest czarne, a pozostałe białe.

Odpowiedź

Nie. W kwadracie $a \times b$ najmniejsza niezerowa liczba czarnych pól będzie wynosiła $\min\{a, b\}$.

Kolejny typ zadań – zmiana kolorów pól na szachownicy

Zadanie 9

Dana jest szachownica 8×8. Dozwolona jest następująca operacja: zmiana koloru wszystkich pól na przeciwne (z czarnych na białe i z białych na czarne) w dowolnym wierszu lub kolumnie. Rozstrzygnąć, czy wykonując dowolną ilość ruchów możemy dojść do układu w którym jedno pole jest czarne, a pozostałe białe.

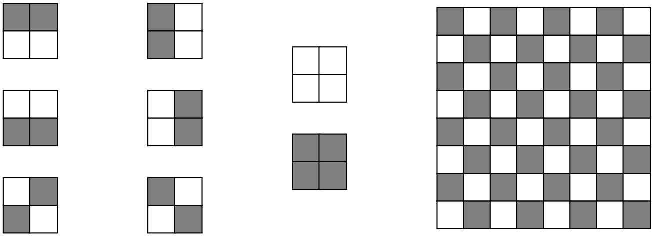
Odpowiedź

Nie. W kwadracie $a \times b$ najmniejsza niezerowa liczba czarnych pól będzie wynosiła $\min\{a, b\}$.

Kolejny typ zadań – zmiana kolorów pól na szachownicy

Rozwiązanie

W dowolnym kwadracie 2x2, dokonując zmiany, nie zmieniamy parzystości liczby pól czarnych. Gdyby było jedno czarne pole, to istniałby kwadrat z nieparzystą ilością czarnych pól. Sprzeczność.



Kolorowanie płaszczyzny

Zadanie 10

Płaszczyzna jest pokolorowana dwoma kolorami. Udowodnić, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach.

Odpowiedź

Tworzymy trójkąt równoboczny. Dwa wierzchołki będą miały ten sam kolor.

Kolorowanie płaszczyzny

Zadanie 10

Płaszczyzna jest pokolorowana dwoma kolorami. Udowodnić, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach.

Odpowiedź

Tworzymy trójkąt równoboczny. Dwa wierzchołki będą miały ten sam kolor.

Kolorowanie płaszczyzny

Zadanie 10

Płaszczyzna jest pokolorowana trzema kolorami. Udowodnić, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach.

Odpowiedź

Tworzymy trójkąt równoboczny (różne kolory wierzchołków). Odbijamy go względem którejś krawędzi. Odbity wierzchołek będzie miał ten sam kolor co oryginalny. Robiąc tak dla wszystkich trójkątów równobocznych o jednym wspólnym wierzchołku, dostajemy okrąg o tym samym kolorze (o promieniu $\sqrt{3}$). Łączymy dwa punkty na okręgu oddalone o 1.

Kolorowanie płaszczyzny

Zadanie 10

Płaszczyzna jest pokolorowana trzema kolorami. Udowodnić, że istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach.

Odpowiedź

Tworzymy trójkąt równoboczny (różne kolory wierzchołków). Odbijamy go względem którejś krawędzi. Odbity wierzchołek będzie miał ten sam kolor co oryginalny. Robiąc tak dla wszystkich trójkątów równobocznych o jednym wspólnym wierzchołku, dostajemy okrąg o tym samym kolorze (o promieniu $\sqrt{3}$). Łączymy dwa punkty na okręgu oddalone o 1.

Kolorowanie płaszczyzny

Problem Hadwigera-Nelsona

Jaka jest minimalna liczba kolorów, którymi musi być pokolorowana płaszczyzna, aby istniało kolorowanie takie, że nie istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach?

Odpowiedź

Odpowiedź do dzisiaj nie jest znana! Dla 7 kolorów istnieje odpowiednie kolorowanie (czyli mamy ograniczenie górne).

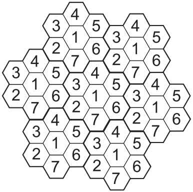
Kolorowanie płaszczyzny

Problem Hadwigera-Nelsona

Jaka jest minimalna liczba kolorów, którymi musi być pokolorowana płaszczyzna, aby istniało kolorowanie takie, że nie istnieje odcinek o długości 1, który ma końce o tych samych kolorach?

Odpowiedź

Odpowiedź do dzisiaj nie jest znana! Dla 7 kolorów istnieje odpowiednie kolorowanie (czyli mamy ograniczenie górne).



- Zadania, takie jak przedstawione tutaj, bardzo często pojawiają się na konkursach matematycznych (w końcu chodzi o pomysł, nie o obycie z teorią). Zazwyczaj rozwiązania są niestandardowe i wymagają wymyślenia "triku". (Czasami można rozwiązywać te zadania "wprost", ale ilość obliczeń jest bardzo duża i odstraszająca.)
- Jak widzi się rozwiązanie, to dane zadanie wydaje się być banalne. Jak się go nie zna, to można się nad nimi namęczyć. Ktoś lubi wyzwania (i nie zna tych zadań)?
- Proszę bardzo:
  Dana jest szachownica $n \times n$ (n jest parzyste). Pola nazywamy przyległymi, gdy mają wspólny bok. Pokolorowano N pól w ten sposób, że każde pole (pokolorowane lub nie) przylega do co najmniej jednego pokolorowanego pola. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość N. (XL MOM)

- Zadania, takie jak przedstawione tutaj, bardzo często pojawiają się na konkursach matematycznych (w końcu chodzi o pomysł, nie o obycie z teorią). Zazwyczaj rozwiązania są niestandardowe i wymagają wymyślenia "triku". (Czasami można rozwiązywać te zadania "wprost", ale ilość obliczeń jest bardzo duża i odstraszająca.)
- Jak widzi się rozwiązanie, to dane zadanie wydaje się być banalne. Jak się go nie zna, to można się nad nimi namęczyć. Ktoś lubi wyzwania (i nie zna tych zadań)?
- Proszę bardzo:
  Dana jest szachownica $n \times n$ (n jest parzyste). Pola nazywamy przyległymi, gdy mają wspólny bok. Pokolorowano N pól w ten sposób, że każde pole (pokolorowane lub nie) przylega do co najmniej jednego pokolorowanego pola. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość N. (XL MOM)

Bardzo dziękuję za uwagę!

Więcej zadań i problemów związanych z kolorowaniem można znaleźć m.in w

- S. W. Golomb, *Polyominoes*, Princeton 1994, ISBN 0-691-08573-0
- M. R. Korn, *Geometric and algebraic properties of polyomino*, B.A., Princeton University 2000
- M. Petković, *Mathematics and chess*, New York 1997, ISBN-0-486-29432-3
- J. R. Silvester *Painting by Numbers*, London 2000, artykuł
- M. Pitera *Kolorowe Kwadraty*, Kraków 2008, ISBN 978-83-7267-348-0