NIEKTÓRE IZOMETRIE I ICH ZASTOSOWANIE

Paweł Rudecki

I LO Koszalin

Przedstawione poniżej zadania wraz z rozwiązaniami mogą służyć jako materiał do prowadzenia koła matematycznego w klasach gimnazjalnych lub ponadgimnazjalnych, lekcji ćwiczeniowej w szkole ponadgimnazjalnej w klasie matematycznej. Nie znajdziemy w nim formalnych definicji izometrii. Jednak znajomość własności izometrii jest niezbędna .

1. Czerwony Kapturek zdecydował , że odwiedzi babcię .Wziął ze sobą pojemnik i postanowił nabrać wody z rzeki i zanieść babci. Pomóż Czerwonemu Kapturkowi wybrać miejsce nad rzeką, z którego ma zaczerpnąć wody, aby droga, którą pokona z domu do rzeki i następnie do babci, była najkrótsza .

2. Mamy prostokątny bilard, na którym w punktach *A* i *B* znajdują się bile (jedna w *A* i jedna w *B*). Wyznacz tor przemieszczania się bili uderzonej w punkcie A, która odbijając się od dwóch band trafi w bile w punkcie *B* (inaczej mówiąc: jaka jest minimalna droga bili z punktu *A* do punktu *B* ?)

3. Promień świetlny wysłany z punktu $A = (5, 9)$ odbija się od osi *OX* w punkcie $B = (2, 0)$, a następnie odbija się od osi *OY*. Znajdź równanie prostej, po której porusza się promień po odbiciu od osi *OY*.

4. Dany jest punkt *A* leżący wewnątrz kąta ostrego. Znajdź trójkąt *ABC* o najmniejszym obwodzie wpisany w ten kąt.

5. Czerwony Kapturek zabłądził w lesie, który ma kształt trójkąta równobocznego. W sobie jedynie znany sposób udało mu się ustalić, że od poszczególnych wierzchołków znajduje się w odległościach : **5** km , **12** km i **13** km . Jaka jest powierzchnia tego lasu ?

6. Wewnątrz kwadratu *ABCD* budujemy trójkąt *ABE*, w którym $\angle EAB = \angle EBA = 15^0$. Wyznacz miary kątów trójkąta *CDE*.

7. Dany jest siedmiokąt foremny *ABCDEFG* o boku długości 1 . Udowodnij, że :

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1 .$$

8. W trójkącie *ABC* odcinek *CO* jest środkową, a *CP* – wysokością położoną wewnątrz kąta *ACB*. Udowodnij, że jeżeli kąty *ACO* i *PCB* są równe oraz boki *AC* i *BC* nie są równe, to kąt *ACB* jest prosty.

9. Punkty *A* i *B* leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty *C* i *D*. Znajdź taki punkt *M*, leżący na prostej *CD*, że kąt $\angle AMC$ jest dwa razy większy od kąta $\angle BMD$.

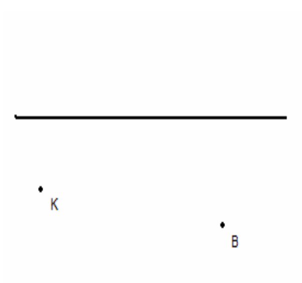
Wskazówki

1. Należy przekształcić punkt *B* (domek babci) symetrycznie względem prostej (rzeki) i następnie skorzystać z własności symetrii osiowej (długość odcinka *KL* jest równa długości odcinka *K'L'*) , gdzie punkty *K'* , *L'* są, odpowiednio, obrazami punktów *K* , *L* w symetrii względem prostej. W uzasadnieniu należy się powołać na nierówność trójkąta. **(SP6, G, L)**
2. Należy skorzystać z własności symetrii osiowej (podobnie jak w rozwiązaniu zadania 1), gdzie oś symetrii stanowić będzie banda, od której ma się odbić bila, zapewniając tym samym, że kąt padania równy jest kątowi odbicia. **(SP6, G, L)**
3. Należy dwukrotnie skorzystać z symetrii osiowej (najpierw punkt *A* odbić symetrycznie względem osi *OX*, a następnie otrzymany w ten sposób punkt jeszcze raz symetrycznie , tym razem względem osi *OY* , po czym należy skorzystać z własności złożenia symetrii osiowych względem osi prostopadłych. **(L)**
4. Można punkt *A* odbić symetrycznie względem obu ramion kąta i otrzymane w ten sposób punkty połączyć odcinkiem. Punkty wspólne ramion kąta i poprowadzonego odcinka stanowią poszukiwane wierzchołki *B* i *C*. Pozostaje uzasadnić, że obwód tego trójkąta jest najmniejszy. **(G , L)**
5. Tym razem należy odbić symetrycznie punkt *K* (położenie Kapturka) względem każdego z boków trójkąta (brzegów lasu), w wyniku czego otrzymamy sześciokąt o polu będącym dwukrotnością pola trójkąta *ABC*. Warto przy okazji zauważyć, że na pole otrzymanego sześciokąta składają się: trzy trójkąty równoramienne o kątach wierzchołkowych 120^0 i jeden trójkąt prostokątny. **(G, L)**
6. Należy obrócić trójkąt *AEB* o kąt 90° względem punktu *A*, a także trójkąt *AEB* o kąt 90° względem punktu *B*, a następnie otrzymane w ten sposób trójkąty przebić symetrycznie względem boku *AD* oraz *BC* odpowiednio. Reszta to działania na kątach. (**G**, **L**)
7. Należy odbić symetrycznie siedmiokąt *ABCDEFG* względem prostej zawierającej bok *AG*, uzasadnić, że punkty *C, A* oraz *D*' leżą na jednej prostej., skorzystać z podobieństwa trójkątów *CGD*' i *ABC* (kkk). **(L)**
8. Należy wyznaczyć obraz wierzchołka *C* w symetrii osiowej wzglądem boku *AB* , a także obraz wierzchołka *C* symetrii środkowej względem punktu *O* (środka boku *AB*). Następnie korzystając z własności symetrii i działając na kątach można zauważyć, że poszukiwany kąt ma miarę 90°**.** **(L)**
9. Należy skonstruować okrąg o środku w punkcie *B* styczny do prostej *CD* , zaś punkt *A* odbić symetrycznie względem prostej *CD* , a następnie poprowadzić z punktu *A*' styczną do okręgu.

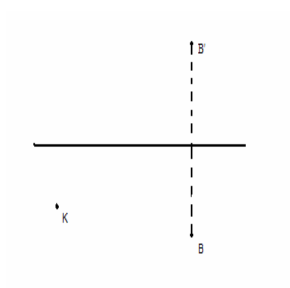
Szkice rozwiązań

1. Niech rzece odpowiada prosta l, zaś położeniom domów odpowiednio punkty *K* i *B*. Przekształcamy symetrycznie punkt *B* względem prostej l (rzeki), zaś otrzymany w ten sposób punkt *B*’ łączymy z punktem K. Poszukiwanym punktem jest punkt *C* przecięcia prostej l (rzeki) z prostą zawierającą odcinek *KB*’.(powołujemy się na fakt, że najkrótszą drogą wiodącą z punktu do punktu na płaszczyźnie jest odcinek). Gdybyśmy przyjęli, że rozwiązaniem jest punkt *C*’ leżący na prostej l i $C' \neq C$, to stwierdzamy, że zachodzi warunek: $KC' + C'B = KC' + C'B' > KB' = KC + CB$ (korzystamy z nierówności trójkąta oraz z własności symetrii osiowej). Inaczej mówiąc idąc z punktu *K* do *B*’ po odcinku idziemy krótszą drogą aniżeli z *K* do *B*’ łamaną *KC’B’*.

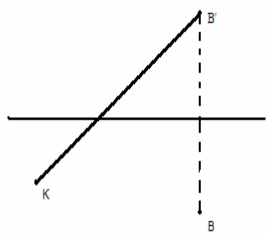
1.



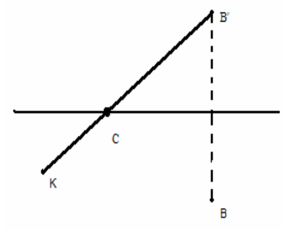
2.



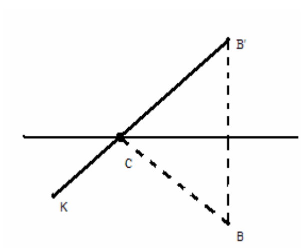
3.



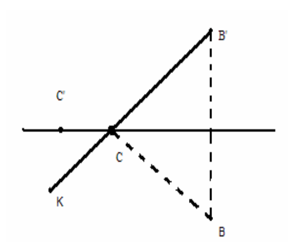
4.



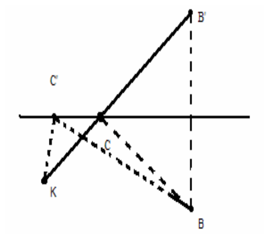
5.



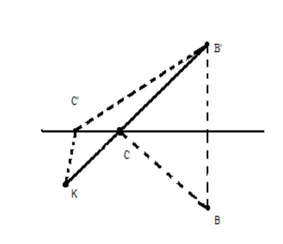
6.



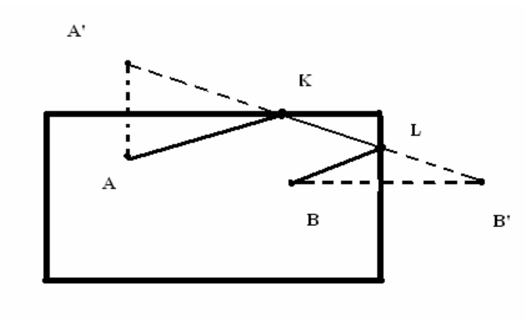
7.



8.

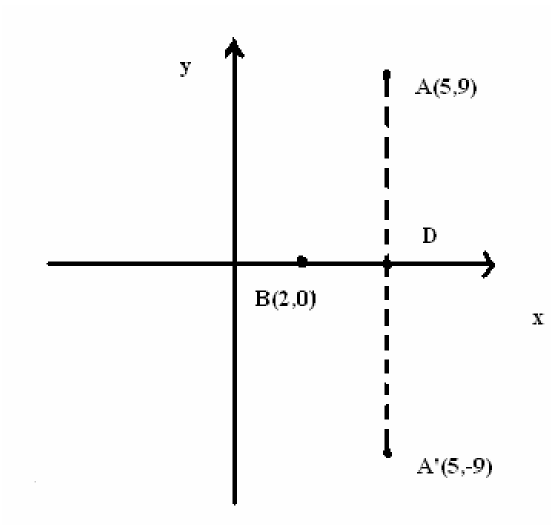
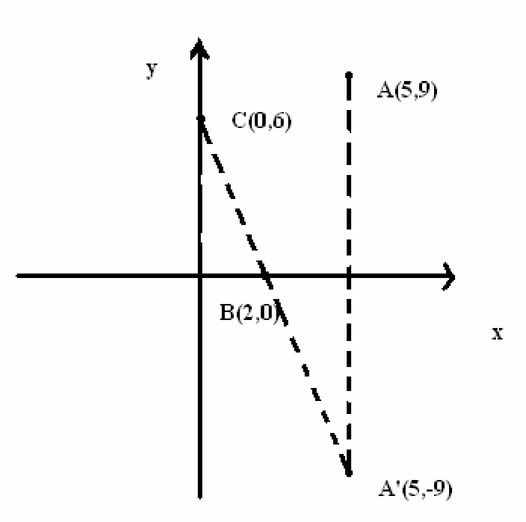


2. Pomysł rozwiązania jest analogiczny. Przypuśćmy, że bila odbije się od górnej bandy i od prawej. Wówczas należy odbić położenie bili *B* symetrycznie względem prawej bandy otrzymując punkt *B*’, a bilę *A* względem górnej bandy otrzymując punkt *A*’.

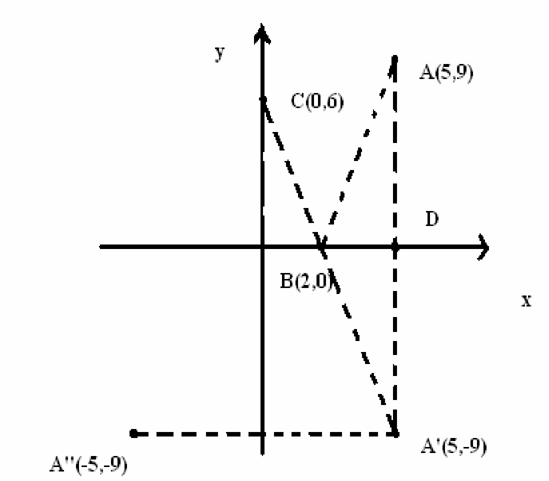


Łączymy odcinkiem obrazy *A'* i *B'*. Punkty przecięcia odcinka *A'B'* z bandami wyznaczają poszukiwane punkty uderzenia o bandę odpowiednio *K* i *L*. Możemy zauważyć, że:
AK + *KL* + *LB* = *A'K* + *KL* + *YB'* = *A'B'*, tym samym wyznaczyliśmy minimalną drogę, którą musi pokonać bila *A*, aby po dwóch odbiciach od band uderzyć w bilę *B*. Podobnie należy postąpić, jeśli odbicie nastąpi od innych dwóch band (niekoniecznie sąsiednich).

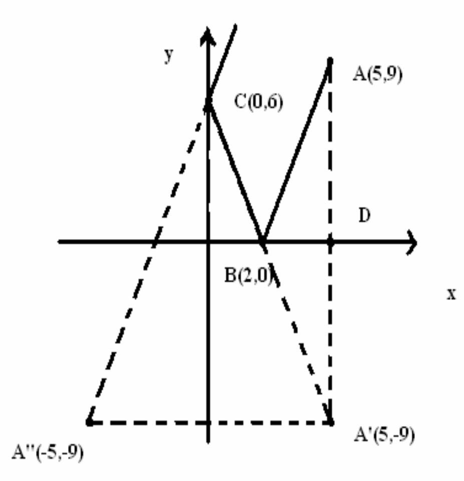
3. Ponownie korzystamy z własności symetrii osiowej. Odbijamy symetrycznie punkt *A* względem osi *OX*. Otrzymany w ten sposób punkt *A'* odbijamy symetrycznie względem osi *OY*, otrzymując punkt *A''*. Przez otrzymany w ten sposób punkt *A''* prowadzimy prostą równoległą do prostej *AB*. Prosta ta przecina oś *OY* w punkcie *C*. Poszukiwana prosta o równaniu y = 3x + 6 spełnia warunki dotyczące kąta padania i kąta odbicia.

<table>
<tr>
<td>1

</td>
<td>2.

</td>
</tr>
</table>

3.



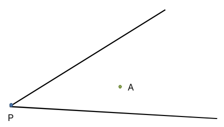
4.



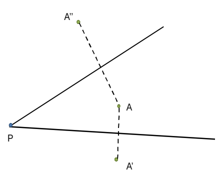
Równoległość prostej *A’’C* i *AB* wynika z własności symetrii osiowej (przystawania odpowiednich kątów i równości kątów wierzchołkowych – tę ,,przyjemność ’’ pozostawiam czytelnikowi.

4. Kolejne etapy wyznaczania poszukiwanego rozwiązania przedstawiają rysunki 1-6

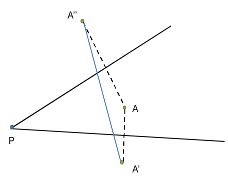
1.



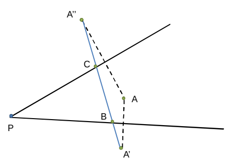
2.



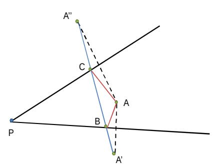
3.



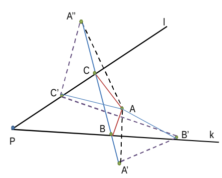
4.



5.



6.

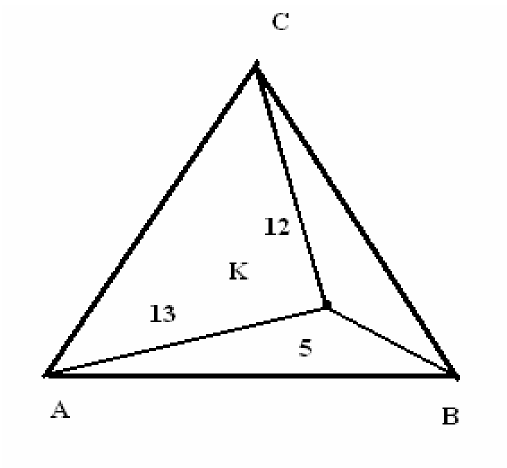


1. Odbijamy symetrycznie punkt *A* względem obu ramion kąta otrzymując punkty *A’* oraz *A’’*.

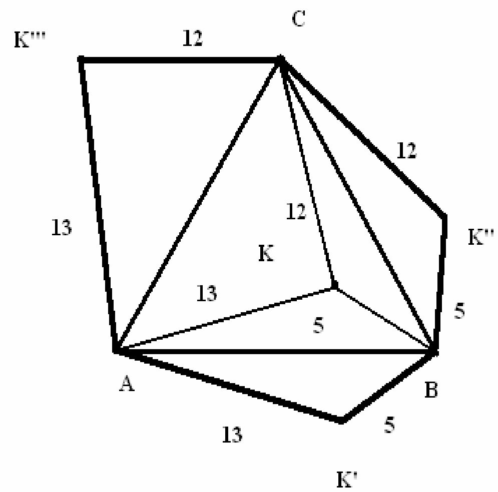
2. Łączymy punkty *A*’ i *A*’’ odcinkiem.
3. Punkty przecięcia ramion z odcinkiem *A’A*’’ uznajemy za poszukiwane wierzchołki B i C trójkąta o najmniejszym obwodzie.
4. Z własności symetrii osiowej wiemy, że *CA* = *CA*’’ oraz *BA* = *BA*’, co z kolei pozwala nam stwierdzić, że obwód trójkąta *ABC* odpowiada długości odcinka *A’A*’’. Ale wiadomo, że najkrótszą drogą łączącą na płaszczyźnie dwa punkty jest odcinek.
5. Gdyby przyjąć inne położenie punktów na ramionach kąta np. *C*’ i *B*’, to wówczas obwód trójkąta *AB’C’*, na podstawie własności symetrii osiowej jest równy długości łamanej *A’B’C’C’’*, a ta jak wiadomo, jest dłuższa od odcinka *A’A*’’.

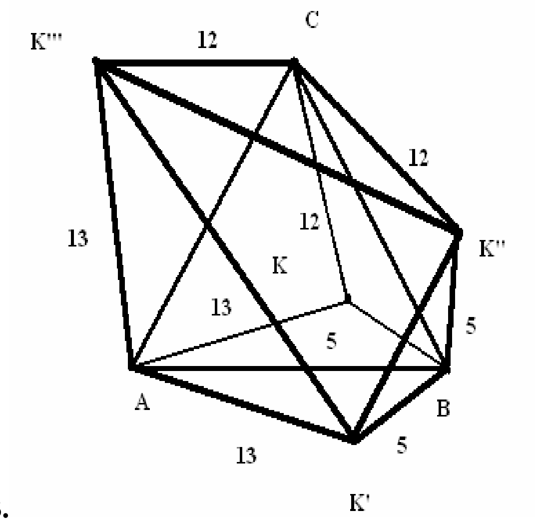
5. Następne zadanie, które możemy rozwiązać przy pomocy symetrii osiowej i jej własności, to problem zaginionego Czerwonego Kapturka**.**

1



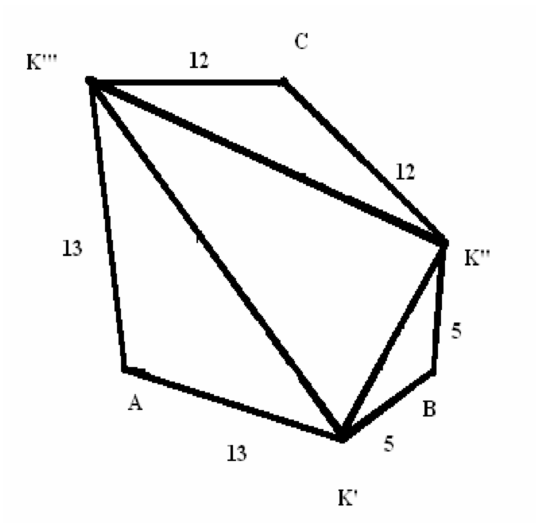
2.





3.

4.



$P_{K'BK''} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$P_{K''CK'''} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{144\sqrt{3}}{4}$

$P_{K'AK'''} = \frac{1}{2} \cdot 13^2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 169 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{169\sqrt{3}}{4}$

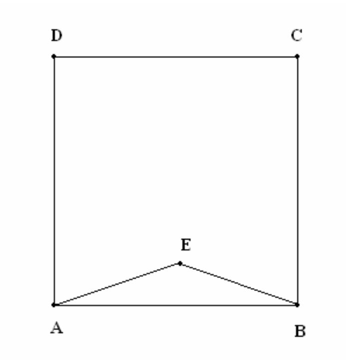
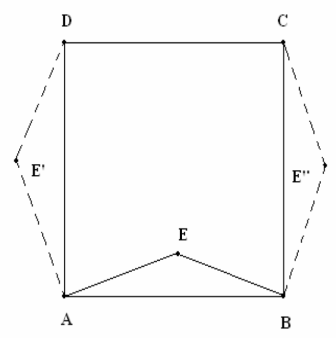
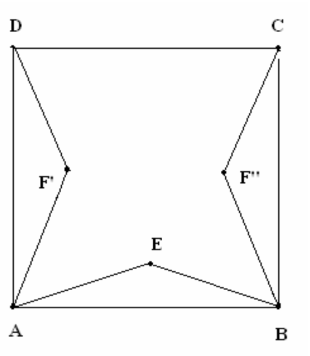
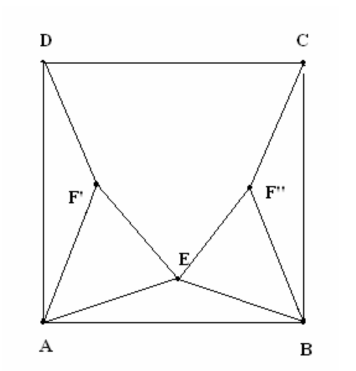
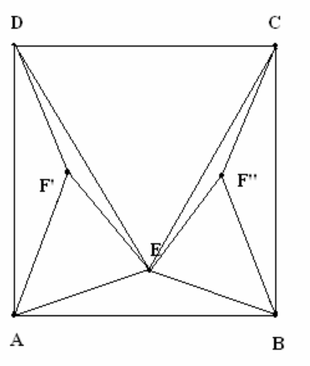
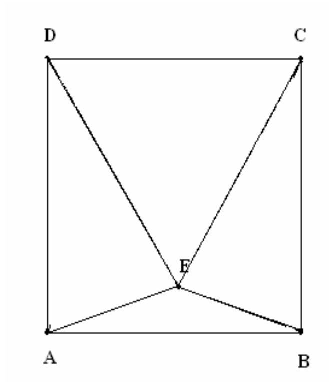
$\triangle$ K'K''K''' ~ $\triangle$ pitagorejskiego (5, 12, 13)

Zatem $P_{K'K''K'''} = \frac{60}{2} (\sqrt{3})^2 = 90$

Stąd $P_{AK'BK''CK'''} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{144\sqrt{3}}{4} + \frac{169\sqrt{3}}{4} + 90 = \frac{1}{2}(169\sqrt{3} + 180)$

Zaś $P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{AK'BK''CK'''} = \frac{1}{4}(169\sqrt{3} + 180)$

6. W rozwiązaniu tego zadania należy skorzystać ze złożenia obrotu o środku w punkcie *A* o kąt prosty w lewo z symetrią osiową względem prostej *AB* oraz ze złożenia obrotu o środku w punkcie *B* o kąt prosty w prawo z symetrią osiową względem prostej *BC* . Przyjrzyjmy się poniższym rysunkom 1-6:

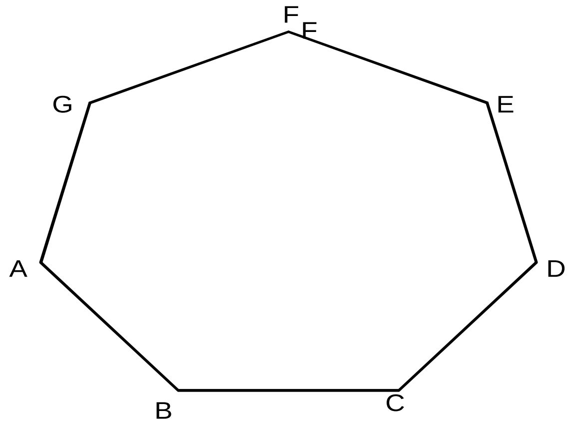
1. 	2. 	3. 
	5. 	6. 

Z własności symetrii i obrotu wynika, że

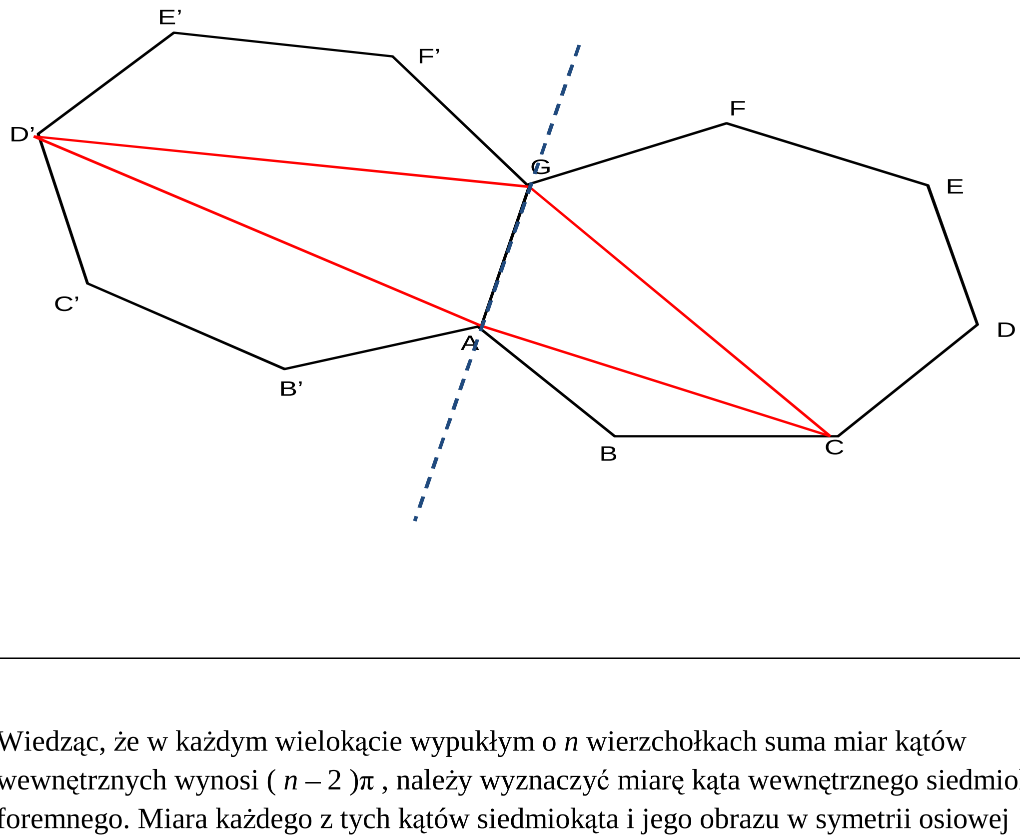
AF' = *DF'* , $\angle F'AD$ = 15° i $\angle F'DA$ = 15°
BF''= CF'' , $\angle F''BC$ = 15° i $\angle F''CB$ = 15°
Wiadomo, że $\angle EAB$ = $\angle EBA$ = 15°
Można obliczyć $\angle EAF'$ = 90° - 2·15° = 60°, $\angle EBF''$ = 90° -2·15° =60°
W połączeniu z tym , że *AF'* = *AE* oraz *BE*= *BF''* wnioskujemy, ze trójkąty *EAF'* oraz *EBF''* są równoboczne. Wobec tego *F'E* =*AF'* =*F'D* oraz *F''E* = *BF''* = *F''C*,
a skoro $\angle EF''C$ =150°, i $\angle EF'D$ = 150°, to $\angle$ EDF' =15° oraz $\angle$ ECF'' = 15°.
Czyli ostatecznie $\angle EDC$ = 90° -2·15° = 60° oraz $\angle ECD$ = 90° - 2·15° = 60°.
Zatem $\triangle DEC$ jest równoboczny.

7. Pomysł już znamy. Wystarczy ustalić względem, którego z boków należy odbić symetrycznie siedmiokąt *ABCDEFG*. Niech bokiem tym będzie *AG*. Poniższe dwa rysunki przedstawiają tę sytuację:

1.



2.



Wiedząc, że w każdym wielokącie wypukłym o n wierzchołkach suma miar kątów wewnętrznych wynosi $(n-2)\pi$, należy wyznaczyć miarę kąta wewnętrznego siedmiokąta foremnego. Miara każdego z tych kątów siedmiokąta i jego obrazu w symetrii osiowej względem prostej AG wynosi $\frac{5}{7}\pi$. Można zauważyć, że

$\angle B'AD' = \angle C'D'A = \frac{2}{7}\pi$ (trapez równoramienny)

$\angle GAD' = \frac{3}{7}\pi$

$\angle BAC = \frac{\pi}{7}$

$\angle GAC = \frac{4}{7}\pi$

Czyli $\angle GAD' + \angle GAC = \pi$, a to oznacza, że punkty CAD' leżą na jednej prostej.

Wówczas trójkąt *CGD*' jest równoramienny i jego kąty wynoszą odpowiednio : $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{5}{7}\pi$.

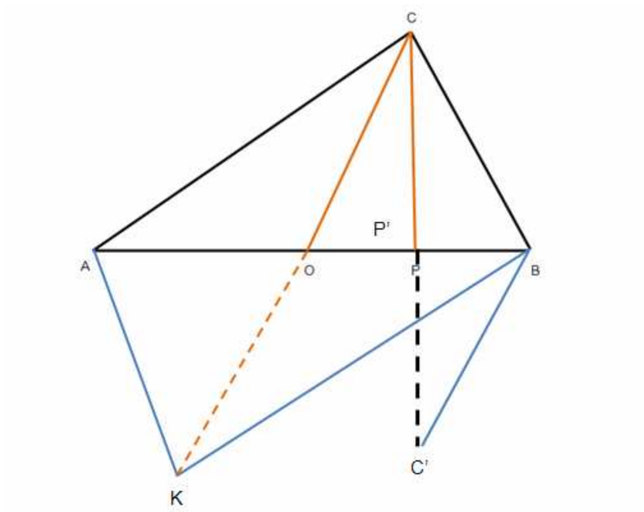
Zatem trójkąty BAC i GCD' są podobne (kkk). Korzystając z podobieństwa otrzymujemy:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD'}{CG} = \frac{CA + AD'}{AD} = \frac{AC + AD}{AD}$$

Skoro $AB = 1$, to

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{AC + AD}{AC \cdot AD} = \frac{AC \cdot AD}{AC \cdot AD} = 1$$

Zadanie 8.



C' – jest obrazem *C* w symetrii osiowej względem prostej zawierającej bok *AB*.

. *K* – jest obrazem w symetrii środkowej względem punktu *A*.

Z własności symetrii $\angle BC'C = \alpha$, $AO = OB$. (z określoności 0).

K jest obrazem *C* względem 0 czyli $KO = OC$. Zatem w czworokącie *AKBC* przekątne przecinając się połową się, czyli czworokąt jest równoległobokiem, czyli $\angle CKB = \alpha$.

Zauważyć można, że $\angle BKC = \alpha = \angle BC'C$, czyli na czworokącie $CBC'K$ można opisać okrąg,

czyli $\angle BKC' = \alpha$. Odcinek $OC' = OC$ (z własności symetrii osiowej). Z równoramienności

trójkąta KOC' wynika, że $\angle OC'K = 2\alpha$,czyli $\angle KOC' = 180° - 4\alpha$, a zatem $\angle BOC = 2\alpha$, czyli

$\angle OCD = 90° - 2\alpha$. Wtedy już łatwo zauważyć, że $\angle ACD = \alpha + 90° - 2\alpha + \alpha = 90°$.

Bibliografia:

1. Praca zbiorowa. Szkoła geometrii . Odczyty kaliskie.- WSiP Warszawa 1993
2. D. Musztari Przygotowanie do olimpiad matematycznych – Oficyna Wydawnicza ,, Adam ’’