Ścieżki do efektownej matematyki

Michał Szurek

Artykuł ten, będący miejscami bardzo nieformalnym wykładem, został napisany z myślą o ambitnych nauczycielach. Pokazuję w nim, jak stosunkowo prostymi środkami osiągnąć ambitny cel: wprowadzenie uczniów w geometrię przestrzeni euklidesowych dowolnego wymiaru. Wprawdzie w rozważaniach często stosuję metody geometrii analitycznej, której praktycznie nie ma w szkole, ale po pierwsze jest to łatwa geometria analityczna, po drugie – podpowiadam, jak można się i bez niej obejść. Natomiast proponowane użycie komputera (a konkretnie: programów typu CAS, tzn. *computer algebra system*) jest oczywiście na wyrost – tak można pracować ze studentami na wyspecjalizowanym seminarium, ewentualnie z wąską grupą uczniów – i wtedy wymaga to dużej pracy przygotowawczej.

Nie przestrzegam w tym artykule zasady stopniowania trudności – mieszam zagadnienia elementarne z bardzo zaawansowanymi.

1. Kilka uwag o dzieciach zdolnych. Przekonanie, że „wszyscy ludzie są równi” zdobyło sobie przekonanie w naszym społeczeństwie. Było to łatwiejsze, że przecież zarówno Rewolucja Francuska, jak i konstytucja amerykańska, a także teoretyczne założenia komunizmu, do takiej równości wyraźnie i jednoznacznie się odwoływały. Tymczasem – jak to często bywa – wystarczyło uściślić pojęcie równości, aby przekonać się o nieprawdziwości twierdzenia o równości wszystkich ludzi. Nie chodzi o to, że ludzie różnią się kolorem skóry, wzrostem, płcią, i tak dalej. Przede wszystkim chodzi o zdolności i zainteresowania. Marysia opanowała łatwo trzy języki obce, Karol uczy się od lat hiszpańskiego i wciąż duka. Dla Basi napisanie pracy z polskiego jest katorgą i żaden wysiłek nie spowoduje, że dostanie ocenę lepszą niż mierna, Agnieszka pisze wypracowanie na kolanie, szybko, z głowy ... i doskonale. Karol – wbrew powszechnej i słusznej opinii, że chłopcy są generalnie bardziej uzdolnieni matematycznie niż dziewczęta – nie może przejść przez twierdzenie Pitagorasa, a Zosia, która ma dwie lewe ręce i nie jest w stanie zapamiętać jak się pisze „żółty” już w II klasie liceum całkowała przez części.

Ludzie (dorośli i dzieci) mają poza tym różne upodobania: jednych nudzi muzyka poważna, drudzy chodzą często do Filharmonii. Darek będzie pracował po nocach, żeby kupić lepszy samochód i będzie dbał o niego, Markowi wystarcza auto, które ma cztery koła, silnik i jedzie do przodu, za to ogródek Marka jest piękny i mało kto zna się tak na cebulkach tulipanowych.

Piszę o sprawach oczywistych i wyważam otwarte drzwi. Wszyscy powinniśmy być tylko *równi wobec prawa*: ta *a priori* nieoczywista zasada jest powszechnie przyjmowana w każdym społeczeństwie, wywodzącym się z europejskiego systemu kulturowego. Równość wobec prawa: tylko tyle i aż tyle.

Na koniec wstępnych uwag zadajmy sobie pytanie: Po co zajmować się nieprzeciętnie zdolnymi dziećmi? Często padają argumenty: nie dość, że taki zdolny, to jeszcze mu pomagać? Przecież i tak da sobie radę. Odpowiedź jest prosta: Brylant trzeba oszlifować. Im większy, tym trudniej. Dzieci wybitnie zdolne potrafią być zagubione, niezdolne do współżycia z innymi, rozchwiane emocjonalnie i zwyczajnie nieszczęśliwe, bardzo często bardziej niż te autentycznie poszkodowane przez los. Mogą wreszcie niewłaściwie spożytkować swój talent: rozmienić go na drobne albo wykorzystać w przyszłości swój talent *przeciw* społeczeństwu, a nie dla niego.

Drugi aspekt traktowania młodych osób o nieprzeciętnych zdolnościach streszczę krótko: los podarował każdemu takie a nie inne zdolności. Nie można marnować wygranego losu na loterii.

2. Wysokie wymiary. Motywacja.

Zanim zajmiemy się po prostu matematyką, spójrzmy na zagadnienie „przestrzeni wysokiego wymiaru” nieco szerzej, z filozoficznego punktu widzenia. Aż do połowy XIX wieku matematykę postrzegano zgodnie z filozofią Galileusza, Kartezjusza, Hume’a i Kanta. Mimo wielu różnic w swoich poglądach na filozofię nauki, ci uczeni podzielali pogląd, że matematyka opisuje świat, że jest do tego stworzona, nierzadko formułując to tak, że to Bóg przemawia do nas językiem matematyki. Badając odpowiednie struktury matematyczne niejako ujawniamy wewnętrzną strukturę świata.

Intuicja geometryczna jest wcześniejsza od arytmetycznej, zarówno w historycznym procesie ewolucji ludzkości, jak i w rozwoju każdego z nas. Pewnie dlatego cała matematyka przesiąknięta jest geometrią. Wiemy doskonale, że właśnie na lekcjach geometrii ćwiczymy wyobraźnię, uczymy się zarówno rysunków, jak i logicznego myślenia. O dydaktyce geometrii mówi się i pisze najwięcej. Badania całego procesu nauczania najlepiej przeprowadzać na zagadnieniach geometrycznych. W tzw. testach na inteligencję jest dużo pytań geometrycznych.

Pełny wykład o filozoficznych zagadnieniach związanych z matematyką dał dopiero Immanuel Kant. Zrewolucjonizował on myślenie o matematyce, powiadając, że twierdzenia matematyczne konstruują sądy, a nie analizują. Twierdzenia geometryczne są sądami syntetycznymi a priori (przed doświadczeniem). Jaki jest świat, tego naprawdę nie wiemy, bo nie umiemy go inaczej postrzegać, jak poprzez czas i przestrzeń. Czas odnosi się do kolejności, a przestrzeń do umiejscowienia obok siebie. Czas i przestrzeń działają asymetrycznie, co uwidocznia się w podziale samej matematyki (pochodzącym przecież ze starożytności): funkcję czasu pełni arytmetyka, a funkcję przestrzeni – geometria[1]. Zdania matematyczne – mówi Kant - są jedynymi zdaniami syntetycznymi a priori – dają wiedzę pewną i niezależną od doświadczenia.

Urodzony w Polsce amerykański intelektualista Jacob Bronowski (1908-1974) przedstawił interesujący punkt widzenia, bardzo dobrze pasujący do matematyki właśnie: wiedza jako algorytm i wiedza jako metafora.[2] Pierwsza część tej myśli jest jasna: wiedza daje nam umiejętności, bardzo często sprowadzane do algorytmów. Potrafię rozwiązać równanie, obliczyć pole przekroju graniastosłupa, wyznaczyć stężenie potrzebnego roztworu, obliczyć niezbędne parametry projektowanego mostu, zmienić koło w samochodzie, upiec placek ze śliwkami, jeździć na rowerze, pływać, grać w brydża, posługiwać się komputerem. Tu „wiem” jest bliskie „potrafię”.

O co chodzi w zwrocie „wiedza jako metafora”? Bronowski pisał: *Podstawą zarówno poezji, jak i odkrycia naukowego jest zdolność do pojmowania niepodobnego jako podobnego i podobnego jako niepodobnego.* Musimy przekraczać barierę epistemologiczną, musimy przecież opisywać *nowe* za pomocą *starego* i dopiero po pewnym czasie zmieniamy sposób pojmowania. Żeby coś zrozumieć, musimy tę rzecz, pojęcie, myśl, przedstawić w innej postaci. Zastosować stare do nowego. Dlatego właśnie zdobywanie wiedzy to nieustanne pisanie metafor. Dlatego można powiedzieć, że cała nasza wiedza i całe nasze rozumienie jest metaforyczne. Dlatego jest tak piękne.

---

[1] Obiegową prawdą jest to, że jedno z drugim połączył Kartezjusz. Ale już Mikołaj z Oresme w swoim *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (ok. 1350 r.) realizował pomysł, żeby pozioma linia prosta reprezentowała czas albo ogólniej (w stosowanej do połowy XX wieku terminologii) zmienną niezależną. Dziś wielu nauczycieli jest zdania, że te dwie dyscypliny matematyczne należy raczej łączyć niż rozdzielać i przeciwstawiać sobie wzajemnie.

[2] Jacob Bronowski, *The ascent of man.* Futura MacDonald & Co. London & Sydney (1973).

Jak wiemy, metafora to opisywanie jednej rzeczy w terminach odnoszących się do innej. Popularny w Polsce od lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku gruziński poeta i pieśniarz Bułat Okudżawa miał genialną zdolność dokonywania poetyckiego skrótu: ujmowania rzeczy ważnych jedną celną myślą, powiedzeniem, refrenem, metaforą. Matematyk powiedziałby: jednym prostym wzorem.

W książce Michała Hellera *Filozofia przyrody,* wydanej przez *Znak* (2004), znajduję myśli, z którymi, jako matematyk, nie zgadzam się zupełnie. Chodzi o filozofię Immanuela Kanta. Jak pisałem wyżej, uważał on, że wiedza geometryczna jest nam wrodzona, a także jest zarówno syntetyczna, jak i *a priori*. Zawiera prawdy o świecie, a nie musi być poparta doświadczeniem:

> (...) wszystkie zewnętrzne przedmioty naszego świata zmysłowego muszą koniecznie z zupełną dokładnością zgadzać się z twierdzeniami geometrii: zmysłowość bowiem dzięki swej formie naoczności zewnętrznej (przestrzeni), którą zajmuje się geometria, sprawia dopiero, że owe przedmioty jako zjawiska stają się możliwe.[3]

Kant pisał, że musimy postrzegać świat poprzez swoiste *formy naoczności*, którymi między innymi są czas i przestrzeń. Wszystko dzieje się w przestrzeni i w czasie. Nie umiemy ze świata usunąć tych kategorii. Ale obie są nam dane na zawsze i nieodwołalnie. Wiemy, że mamy na nosie okulary, ale nie potrafimy ich zdjąć.

Michał Heller, powtarzając argumenty wielu myślicieli, uważa, że istnienie innych geometrii zaprzecza myślom Kanta, który za jedyną możliwą geometrię uważał euklidesową. Ale Kant nie mógł wygłosić takiego twierdzenia. W jego czasach nie tylko nie było innych geometrii, ale nikt nawet nie mógł sobie wyobrazić, że mogą istnieć inne. To tak, jakbyśmy napisali, że starożytni Grecy nie rozważali możliwości poruszania się samochodem po Atenach. Tymczasem nawet przytoczony cytat z Kanta (analizowany i przez Hellera) pokazuje, że chodzi o zgodność z geometrią, ale jaką? Nie musimy domniemywać, że koniecznie z euklidesową. Bardziej naturalna jest myśl, że ma być zgodna z taką geometrią, jaka właśnie jest w naszej przestrzeni.

Pomówmy najpierw o samej intuicji. Ma ona coś wspólnego z wnętrzem (interior) – Johann Wolfgang Goethe powiedział, że intuicja to objawienie rozwijające się z wnętrza człowieka. Samo słowo pochodzi od łacińskiego „intueri" = „przyglądać się, obserwować", poprzez średniowieczne termin łaciński „intuitio" = „podszept, przeczucie". Rozumiemy też dobrze, że intuicja to zarówno przeczucie, twórcza wyobraźnia, zrozumienie zdobyte ani nie drogą doświadczenia, ani czystej spekulacji myślowej. Pojąć intuicyjnie – to rozumieć bez wyjaśniania, jak i dlaczego coś się dzieje, poza naszą świadomością. Intuicję należy odróżniać od tak zwanego „olśnienia", opisywanego przez wielu uczonych, a także od wyobraźni i zgadywaniu opartych na faktach („informed guess").

Przestrzeń jest jedną z podstawowych kategorii antropologicznych i interesowała ludzi od dawna, na różny zresztą sposób. Aby ją poznać jedni skakali z wieży, drudzy rozmyślali. Ale do końca XIX wielu wyobrażenie przestrzeni było wspólne dla matematyków i *pozostałych humanistów*. Dziś ci pozostali humaniści żyją w przekonaniu, że w matematyce nic się nie zmieniło. Jeśli nawet uważają, że matematyka jest jedynym źródłem prawdy (a zdarzają się takie skrajne poglądy – nie

[3] Immanuel Kant, *Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka,* tłum. B. Bernstein, PWN, Warszawa 1960.

myśli tak chyba żaden matematyk), to jednak według nich matematyka przemawia tylko „przypowieściami”, alegoriami, wykorzystuje grę pojęć i symboli i filozofuje – i jest zatem bardziej baśnią niż poznawaniem świata przez szkiełko i oko. Stąd wynikają nieporozumienia, takie jak próby zrozumienia chaosu, zakrzywienia przestrzeni i rachunku szans bez aparatu matematycznego. Lepiej jest z geometrią, nawet przestrzeni wysokiego wymiaru. Tu bowiem może działać intuicja.

Kształcenie wyobraźni przestrzennej jest jednym z podstawowych celów nauczania matematyki. Jest to coraz trudniejsze. W liceum stereometria jest okrojona do podstawowych informacji. W zawodach Olimpiady Matematycznej zadania stereometryczne zdarzają się tylko w finale i zwykle mają najwyższy współczynnik trudności. Czy możemy w ogóle mówić o intuicji i wyobraźni przestrzennej, gdy w grę wchodzą przestrzenie, nawet euklidesowe, wysokich wymiarów? Wymagało by to oddzielnych badań, trudnych metodologicznie. Aby bowiem wytłumaczyć komuś, co to jest euklidesowa przestrzeń dowolnego wymiaru, trzeba zaaplikować tej osobie dość długi wykład z matematyki. Wtedy jednak u tej osoby przy rozwiązywaniu zadań nie zagra już czysta intuicja.

Kilka uwag o konkursach matematycznych. Dotyczą one niemal wszystkich konkursów, od szkolnych i kuratoryjnych do olimpiad, w tym i międzynarodowych. Polegają one prawie zawsze na rozwiązywaniu zadań, na ogół otwarto-zamkniętych (w zapomnianej dziś trochę terminologii Józefa Kozieleckiego), to jest takich zadań, gdzie trzeba się *doliczyć* bądź *dojść rozumowo* do czegoś konkretnego, na przykład wyniku liczbowego albo tezy twierdzenia. Rzadko zdarzają się zadania otwarte (w tej samej terminologii), to jest takie, że nie jest znany ani punkt końcowy, ani metoda. Są to zadania typu „zbadaj, zobacz, co ciekawego da się powiedzieć o tym i o tym”. Słowo „zadanie” w tym kontekście bardziej zbliża się znaczeniowo do angielskiego „challenge” niż „problem”. Ocenianie takich prac jest bardzo trudne, bo bardzo subiektywne. Zadania, o których piszę w tym artykule są bardzo często tego typu: „zobacz, co tu ciekawego, odkryj, zajrzyj”. Podejmowane w Polsce próby zorganizowania konkursów tego typu należy uznać za nieudane. Autorzy tematów nie dbają zwykle o wymyślenie takich zagadnień, na które nie ma gotowego opracowania w Internecie.

John Steinbeck pisał w swojej książce „Była raz wojna” (ang. „Once there was a war”) , że kapelusz można nosić na wiele sposobów i każdy z nich może wyrażać osobowość właściciela. Jest tylko jeden sposób noszenia hełmu: prosto, równo i tuż nad oczami. Dość podobnie – przynajmniej w społecznym odczuciu – jest z wiedzą matematyczną. Twierdzenia matematyczne są według ogólnej opinii jak dalekie gwiazdy: nieruchome, niedosiężne, niezmienne i zimne.

3. **Metodologia**.

Dla matematyków XIX wieku nie było wcale jasne, że zajmowanie się przestrzeniami dowolnych wymiarów ma sens. Geometria w przestrzeniach dowolnego wymiaru zdobywała sobie miejsce powoli[4]. Jednym z inicjatorów takich badań był (około 1880 roku) włoski matematyk Giuseppe Veronese (1845 – 1917). To właśnie Veronese uczynił z algebry liniowej geometrię i pokazał, jak przejście do wyższych wymiarów upraszcza niektóre sformułowania a jednocześnie pokazuje geometrię „niskowymiarową” jakby z lotu ptaka. Dobrze to ilustruje późniejsze twierdzenie Corrado Segre: każda płaska krzywa wymierna stopnia d jest rzutem ustalonej krzywej C_d położonej w przestrzeni rzutowej P^d . Przedstawienie parametryczne krzywej C_d jest wzorami: $x_i = \lambda_i \mu^{d-i}$, gdzie $\lambda : \mu \in P^1$. Jak piszą Ottaviani i Ghione[5] można powiedzieć, że krzywe płaskie są tylko cieniami (w sensie metafory Platona o jaskini) jednej, nieskomplikowanej rodziny krzywych. Przypomnijmy też, że Stanisław Lem pisał (w kontekście opowieści o smoku) , że jeżeli schowamy rękę pod wodę i wystawimy z wody 5 palców to nierozgarnięty obserwator na powierzchni nie skojarzy, że nie jest to 5 niezależnych obiektów, tylko właśnie pięć palców jednej ręki. Segre nie był pionierem badań nad przestrzeniami dowolnego wymiaru, ale jak widać, potrzeba uzasadniania, że te badania są sensowne, była silna. Określoną wyżej krzywą C_d Veronese nazwał „normalnym modelem” krzywej C. Segre postawił sobie za cel znalezienie „modeli” rozmaitości wyższych wymiarów, np. powierzchni. Miało to służyć badaniu geometrii powierzchni poprzez badania własności „modelu” i rzutowanie. Już w 1884 roku udowodnił istnienie modeli dla powierzchni pewnego typu[6]; omówienie szczegółów wykracza poza ramy tego artykułu.

Powoli jednak docierało do świadomości wszystkich, że badania przestrzeni dowolnego wymiaru są naturalne i nieuniknione. Felix Klein pisał:

> Die mathematische Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, – aber ihr Wert und ihre Absicht ruht gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte[7]
>
> *Badania matematyczne nad rozmaitościami o dowolnie wielu wymiarach oczywiście znalazłyby natychmiast zastosowania geometryczne, gdybyśmy mieli właściwe o nich wyobrażenie, ale wartość i cel tych badań jest*

---

[4] Nawet wykładająca mi w 1963 roku geometrię analityczną Wanda Szmielew powiedziała, polecając nam książkę Karola Borsuka „Geometria analityczna w *n* wymiarach” że nie powinniśmy się bać, bo owo *n* będzie równe 2 albo 3.

[5] Ghione, F., Ottaviani, G., *A tribute to Corrado Segre,* w : Complex Projective Geometry, London Mat. Soc. Lecture Notes Series, 179 (Cambridge 1992).

[6] Dokładnie: dla wymiernych powierzchni prostokreślnych. Modelami są tu powierzchnie znane dziś pod nazwą powierzchni Hirzebrucha. Z dowodu twierdzenia o istnieniu tych modeli wynika dowód twierdzenia, że każda wiązka wektorowa na sferze Riemanna jest sumą prosta wiązek liniowych! Twierdzenie to udowodnili także Dedekind i Weber, a na nowo Alexander Grothendieck w 1957 roku ... i w literaturze nazywane jest ono właśnie twierdzeniem Grothendiecka. Jest jeszcze kilku innych autorów, których można uznać za odkrywców tego twierdzenia; szczegóły podaje np. cytowana książka Christiana Okonka, Heinza Spindlera i Michela Schneidera.

[7] Klein, F., *Vergleichende Betrachtungen Geometrie Uber neue geometrische Forschungen,* Erlangen 1872. Drugie zdanie pochodzi z *Uber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann, 5, str. 261.

od tego przedstawienia całkowicie niezależna i polega na ich własnej treści matematycznej.

a następnie:

Die Liniegeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M^{(2)}_4$ des R_5.

Geometria linii prostych to tak jak geometria na $M^{(2)}_4$ w R_5 (*to znaczy na rozmaitości stopnia 2 i wymiaru 4 w przestrzeni pięciowymiarowej, przyp. M.Sz.*).

Najpełniejsze rozumowania w geometrii elementarnej przestrzeni wymiaru *n* są bardzo często indukcyjne. W związku z usunięciem z programów szkolnych zasady indukcji poświęcę jej kilka zdań komentarza.

Zasada indukcji matematycznej jest ciekawa choćby dlatego, że nie była znana w starożytności i w średniowieczu, a dokładniej: nie była sformułowana w wyraźny sposób. Była oczywiście okazjonalnie stosowana: pierwszy raz terminu *induction* użył John Wallis w 1656 roku a Augustus de Morgan w 1838 roku nazywał ten proces *successive induction*, a jeden raz użył zwrotu *mathematical induction*. W swojej słynnej pracy *Was sind und was sollen die Zahlen* (1887) Richard Dedekind używał konsekwentnie zarówno terminu *indukcja zupełna* (*vollständige Induktion*), jak i samej techniki dowodów indukcyjnych z obecnymi wymogami ścisłości. Jednak do końca XIX wieku w najpoważniejszych pracach matematycznych użycie zwrotu *und so weiter*, *e cosi via*, *and so on* (po polsku: i tak dalej) nie było błędem formalnym. Ujęcie, które znamy dzisiaj, wykrystalizowało się na przełomie wieku XIX i XX. Dla pokazania, jak było to trudne, przytoczę tylko jej opis z książki[8] Henri Poincarégo (1854 – 1912). Opis ten pomoże zrozumieć, że ta (wydawałoby się) prosta i oczywista zasada logiczna mogła zaskakiwać swoją odrębnością od reguł wnioskowania znanych od wielu stuleci.

> Weźmy właściwość liczby *n,* jednym ze sposobów, aby ją udowodnić, jest zastosowanie zasady rekurencji, która działa następująco:
>
> 1. Sprawdzamy, czy ta właściwość jest prawdziwa dla liczby 0;
> 2. Przypuszczając, że jest prawdziwa dla liczby *n*, wykazujemy, że jest także prawdziwa dla jej następnika *n*+1. Wówczas wyciągamy wniosek, że właściwość jest prawdziwa dla wszystkich liczb całkowitych.
>
> Cechą istotną rozumowania przez rekurencyę jest, że zawiera ona zagęszczoną, że tak powiem w jedna formułę nieskończoną ilość sylogizmów. Aby to lepiej uwydatnić wypowiedzmy jedne po drugich te sylogizmy, układające się – że użyjemy wyrażenia obrazowego – w kaskadę. Są to rozumie się sylogizmy hypotetyczne.
>
> Twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1. Jeżeli zaś jest prawdziwe dla liczby 1, to jest prawdziwe i dla 2. A więc jest prawdziwe dla 2. Jeśli zaś jest prawdziwe dla 2, to jest prawdziwe dla 3. A więc jest prawdziwe dla 3, i tak dalej.

[8] Henri Poincare, *Nauka i Hypoteza,* tłum. M. H. Horowitz pod red. L. Silbersteina. Wyd. Jakób Mortkowicz (1908).

Widzimy więc, że wniosek każdego sylogizmu służy jako przesłanka mniejsza sylogizmu następnego. Nadto przesłanki większe wszystkich naszych sylogizmów można sprowadzić do jednej formuły:

Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$, to jest prawdziwe i dla n.

Widzimy wtedy, że w rozumowaniach przez rekurencyę formułuje się tylko przesłankę mniejszą pierwszego sylogizmu oraz formułę ogólną, zawierającą jako wypadki szczególne wszystkie przesłanki większe. W ten sposób szereg sylogizmów, któryby się nigdy nie skończył, sprowadzony zostaje do zdania kilkuwierszowego.

4. Intuicyjne podstawy geometrii w wysokich wymiarach

Łatwo się zgodzić, że objętość n-wymiarowa ciał w przestrzeni tego wymiaru zmienia się w *n-tej* potędze skali liniowej. To znaczy, że jeżeli rozmiary ciała powiększymy dwukrotnie, to jego pole zwiększy się czterokrotnie, objętość trójwymiarowa ośmiokrotnie (tego jeszcze uczymy w szkołach), objętość czterowymiarowa szesnastokrotnie i tak dalej. Wyobraźmy więc sobie, że w n-wymiarowym kraju rosną okrągłe pomarańcze i że zarówno cały owoc, jak skórka są tak samo grube, jak i w naszym świecie. Przyjmijmy, że grubość skórki to 1/10 grubości całego owocu (licząc od środka). Innymi słowy, miąższ zajmuje - liniowo – aż 9/10. Ale wobec tego objętościowo miąższ zajmuje tylko $\left(\frac{9}{10}\right)^{25} = 0{,}071\ldots$, niecałe siedem procent. W przestrzeni stuwymiarowej we wnętrzu „prawie nic nie ma”. Może wobec tego w tamtych światach skórki są niezwykle cienkie?

Nadmuchiwanie balonika w przestrzeniach wysokiego wymiaru jest czynnością niezwykle pracochłonną. Obliczmy, ile trzeba wdmuchać powietrza, by balonik zwiększył swój rozmiar z 20 centymetrów średnicy do 22. Odpowiada do zwiększeniu promienia z 10 do 11, czyli o 10 procent. Najpierw przyjrzyjmy się wymiarowi 25. Ponieważ $1{,}1^{25} = 10{,}8347\ldots$, więc ilość powietrza w baloniku trzeba zwiększyć prawie jedenastokrotnie. Dla $n = 100$ jest znacznie gorzej: $1{,}1^{100}$ to ponad 13780. „Nadmuchaj mi tato, balonik” – prosi dziecko. Dobrze, synku, zaraz się wezmę do pracy. Na następne Boże Narodzenie będziesz miał nadmuchany.

5. **Określenie przestrzeni euklidesowych**.

Przez przestrzeń euklidesową E^n wymiaru n rozumiemy przestrzeń złożoną z n-elementowych ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb rzeczywistych. Mamy w niej strukturę liniową, afiniczną i strukturę przestrzeni ortogonalnej. W dalszym ciągu wykładu na przestrzeń euklidesową będziemy patrzeć zarówno jak na przestrzeń liniową, jak i afiniczną i ortogonalną, wyraźnie tego nie oddzielając. Struktura liniowa dana jest przez zwykłe działanie dodawania ciągów i mnożenie ciągów przez skalary. Struktura afiniczna dana jest przez przesunięcia o podany wektor swobodny, a struktura ortogonalna przez iloczyn skalarny, określony wzorem

$(a_1, a_2, \ldots, a_n).\,(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$.

Macierzą tego iloczynu skalarnego w bazie naturalnej

$\mathbf{e_1} = (1,0,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1,0,\ldots,0)$, **…,** $\mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$

jest oczywiście macierz jednostkowa.

Długość wektora określamy jako pierwiastek jego kwadratu skalarnego, a kosinus kąta między wektorami **v** oraz **w** wzorem

$$\cos \propto = \frac{v.w}{|v||w|}.$$

W przestrzeni $\mathbf{E}^n$ określona jest też funkcja objętości, przypisująca każdemu (mierzalnemu) zbiorowi liczbę, równą stosownej całce. Ponieważ rozpatrywane tu figury (bryły) będą miały prostą budowę, nie będziemy wnikać w szczegóły związane z samą definicją objętości. Zatem n-wymiarowa objętość n-wymiarowej kostki o krawędzi a wynosi a^n. Podobnie objętość równoległościanu o wysokościach $h_n, h_{n-1}, \dots, h_2, h_1$ jest równa iloczynowi $h_n h_{n-1} \dots h_2 h_1$.

Oprócz iloczynu skalarnego, w przestrzeni wektorowej $\mathbf{R}^n$ jest określony iloczyn wektorowy układu n-1 wektorów. Wektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ jest jednoznacznie określony przez następujące warunki:

1) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ jest prostopadły do każdego z wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$;
2) długość iloczynu $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ jest równa (n-1)-wymiarowej objętości równoległościanu rozpiętego na krawędziach $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$;
3) układ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ jest dodatnio zorientowany.

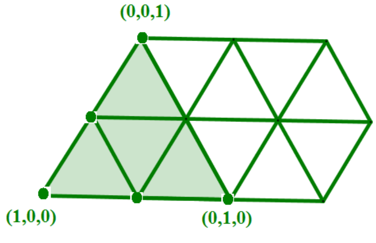
Łatwo wykazuje się, że – analogicznie do sytuacji z wymiaru 3 – współrzędne wektora $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ można wyrazić wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,} & \dots. & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

gdzie w pierwszym wierszu wypisane są wersory osi, a w kolejnych = współrzędne poszczególnych wektorów. W programie *Mathematica* funkcją obliczającą iloczyn wektorowy jest `Cross`:

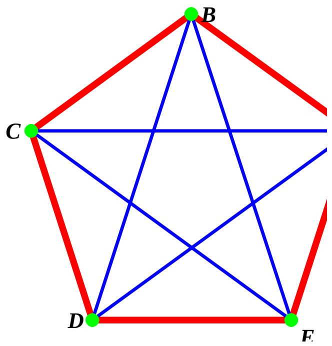
```
In[1] := Cross[{1,1,0,0},{0,1,1,0}, {0,0,1,1}]
Out[1] = {-1,1,-1,1}
```

Będziemy okazjonalnie używać współrzędnych barycentrycznych. Niech p_0, p_1, $p_2, \dots, p_n$ będą punktami w położeniu ogólnym w $\mathbf{E}^n$**.** Każdy punkt p przestrzeni może być wtedy jednoznacznie przedstawiony w postaci kombinacji afinicznej $\sum_{i=0}^{n} t_i p_i$, gdzie liczby t_i spełniają warunek $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Liczby te nazywają się współrzędnymi barycentrycznymi punktu p względem punktów p_0, p_1, $p_2, \dots, p_n$. Środek ciężkości skończonego układu punktów jest punktem, dla którego wszystkie te współrzędne są jednakowe. Ogólniej, jeżeli w punktach p_0, p_1, $p_2, \dots, p_n$ znajdują się masy proporcjonalne do t_0 $t_1, \dots, t_n$, to środek masy takiego układu jest w punkcie $p = \sum_{i=0}^{n} t_i p_i$. Zasada ta jest ważna i dla „mas ujemnych”.



6. **Geometria sympleksu foremnego**.

Najpierw przyjrzyjmy się samemu sympleksowi dowolnego wymiaru *n*. Gdy *n*=2, jest to dobrze znany trójkąt równoboczny, dla *n*=3 otrzymujemy czworościan foremny. Jaką bryłą jest sympleks czterowymiarowy? Jest on utworzony przez pięć punktów połączonych odcinkami tak, by każdy miał taką samą długość. W przestrzeni czterowymiarowej to da się zrobić, w trójwymiarowej nie! Dwuwymiarowy rysunek (a przecież innych nie umiemy robić) wygląda tak:



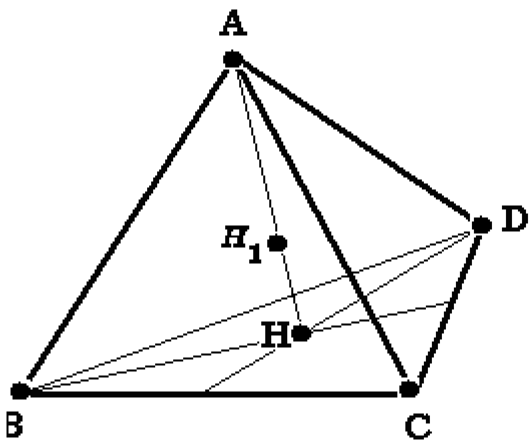
Jest to też graf zupełny o pięciu wierzchołkach. Jeśli w eliminacjach mistrzostw świata jest pięć drużyn, to każda gra z każdą - a jeśli jest mecz i rewanż, to jest on jeszcze *skierowany*. Łączymy kilka, kilkanaście, kilkadziesiąt, ... , wierzchołków, każdy z każdym. Trójkąt jest najprostszą figurą płaską, a sympleks najprostszą bryłą w dowolnym wymiarze. Będziemy mówić tylko o sympleksach foremnych, utworzonych z jednakowych odcinków.

Obliczymy najpierw wysokość sympleksu foremnego wymiaru *n*. Przypomnijmy sobie wzór na wysokość w trójkącie równobocznym i wysokość w czworościanie foremnym.

Twierdzenie. W sympleksie foremnym wymiaru *n*, o krawędzi 1

a) wysokości dzielą się w stosunku *n*:1,

b) wysokość jest równa $h_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2n}}$.



Dowód. Ze szkoły wiemy, że wzór jest prawdziwy dla trójkąta równobocznego, będącego sympleksem wymiaru 2. Załóżmy, że jest dany sympleks wymiaru n . Poprowadźmy wysokość $h_n = AH$. Jej spodek jest w środku sympleksu wymiaru $n-1$, będącego ścianą.

Trójkąt AHD jest prostokątny. Pamiętamy o założeniu indukcyjnym, a mianowicie, że wysokości dzielą się w odpowiednim stosunku. Konkretnie,

$$DH = \frac{n-1}{n} h_{n-1} = \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{n}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{n-1}{2n}} \ ,$$

$$\text{zatem } h_n = \sqrt{1-\frac{n-1}{2n}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \ .$$

Do zakończenia dowodu mamy jeszcze wykazać, że wysokości w sympleksie dzielą się tak, jak podaje wzór. Niech H_1 będzie punktem wspólnym wszystkich wysokości. Nie będziemy wykazywać, że on istnieje – przypomnijmy sobie dowód dla czworościanu foremnego. Ponieważ wysokości łączą wierzchołki ze środkami podstawy, więc punkt H_1 jest środkiem kuli opisanej i wobec tego $AH_1 = BH_1$. Jeżeli $HH_1 = a \cdot h_n$, to z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego BHH_1 mamy

$$HH_1 = \sqrt{BH_1^2 - BH^2} \ .$$

Zatem

$$(1-a)h_n = \sqrt{\frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2(n-1)} + a^2 h_n^2} \ .$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu mamy

$$(1-a)^2 h_n^2 = \frac{n-1}{2n} + a^2 h_n^2 ,$$

i dalej

$$\frac{n+1}{2n}(1-2a) = \frac{n-1}{2n} ,$$

skąd dość łatwo wyliczamy, że $a = \frac{1}{n+1}$; twierdzenie udowodnione.

Jak widzimy, jeżeli n dąży do nieskończoności, to wysokość sympleksu dąży do $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (razy długość krawędzi sympleksu). Jest to o tyle interesujące, że ciąg ten „zaczyna się” od wysokości trójkąta równobocznego, równej $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Możemy teraz łatwo obliczyć dwa ważne kąty.

Twierdzenie 1. Niech α będzie kątem między krawędzią sympleksu a jego wysokością. Wtedy

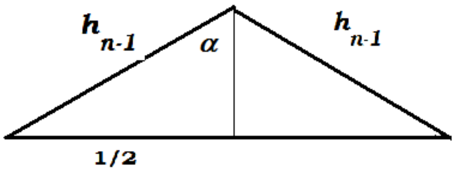
$$\cos\alpha = \frac{h_n}{1} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Wniosek. Gdy $n \to \infty$, to cos α $\to \frac{1}{\sqrt{2}}$, a zatem kąt α dąży do $\frac{\pi}{4}$. Innymi słowy, w przestrzeni wysokiego wymiaru kąt nachylenia wysokości do krawędzi podstawy jest bliski 45^0.

Twierdzenie 2. Niech β będzie kątem między krawędzią sympleksu wymiaru *n* a rzutem tej krawędzi na „podstawę" (będącą ścianą wymiaru *n* – 1). Wówczas $\sin\beta = \frac{h_n}{1} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$.

Twierdzenie 3. Kąt między hiperścianami wymiaru *n*-1 jest równy arccos $\frac{1}{n}$.

Dowód. Obliczymy kąt płaski między odcinkami powstającymi przez przecięcie sympleksu 2-płaszczyzną przechodzącą przez dwa wierzchołki i środek (*n*-2)-wymiarowej ściany, przeciwległej do krawędzi łączącej te wierzchołki. Jest ona prostopadła do wspólnej 1-krawędzi ścian. Przekrojem jest płaski trójkąt równoramienny podstawie 1 i ramionach h_{n-1}.



Zatem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{2h_{n-1}^2} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

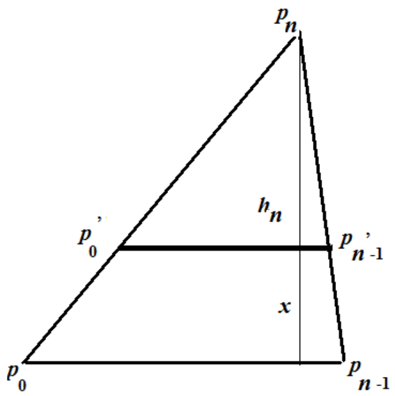
Dla sympleksu wymiaru *n* jest podobnie, jak dla ostrosłupa w $\mathbf{E}^3$. O geometrii sympleksu piszę dokładniej dalej, tutaj ograniczę się do nie do końca precyzyjnego określenia. Sympleksem wymiaru *n* w przestrzeni euklidesowej $\mathbf{E}^m$ nazywamy bryłę (wymiaru *n*) o wierzchołkach w *n*+1 punktach, znajdujących się w położeniu ogólnym, a to znaczy, że żadne trzy z tych punktów nie leżą na jednej prostej, żadne cztery w jednej płaszczyźnie itd.

Wyprowadzimy wzór na objętość sympleksu, analogiczny do wzorów szkolnych na pole trójkąta i objętość ostrosłupa. Wyróżnimy w sympleksie *S* wymiaru *n*, położonym w przestrzeni $\mathbf{E}^n$ podstawę, będącą (*n*-1)-wymiarową ścianą D_{n-1} o wierzchołkach $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ oraz nieleżący na niej wierzchołek p_n. Niech wysokość sympleksu (opuszczoną z p_n na *D*) ma długość h_n Poprowadźmy hiperpłaszczyznę *D* równoległą do wybranej podstawy D_{n-1} i odległej od niej o pewną wielkość *x*. Otrzymamy w przekroju sympleks *S'*, podobny do *S* w skali $1 : \frac{h_n - x}{h_n}$

Zatem objętość sympleksu *D* jest równa

$$\int_0^{h_n} \left(\frac{h_n - x}{h_n}\right)^{n-1} v_{n-1} dx = v_{n-1} \int_0^{h_n} \left(\frac{h_n - x}{h_n}\right)^{n-1} dx = \frac{v_{n-1}}{h_n^{\ n}} \int_{h_n}^{0} (h_n - x)^{n-1} d(h_n - x) = \frac{1}{n} v_{n-1} h_n$$

Słownie: objętość n-wymiarowa sympleksu jest równa jednej n-*tej* (n-1)-wymiarowej objętości podstawy pomnożonej przez wysokość sympleksu. Analogie z wymiarem 2 i 3 są oczywiste.



Skoro $v_n = \frac{1}{n} v_{n-1} h_{n-1}$, następnie $v_{n-1} = \frac{1}{n-1} v_{n-2} h_{n-2}$ i tak dalej, to (drogą oczywistej indukcji) dochodzimy do wniosku, że objętość sympleksu wymiaru n jest równa $v_n = \frac{1}{n!} h_n h_{n-1} \dots h_2 h_1$, gdzie $h_n, h_{n-1}, \dots h_2, h_1$ są kolejnymi wysokościami ścian sympleksu (zaś h_1 jest krawędzią). Iloczyn $h_n h_{n-1} \dots h_2 h_1$ jest oczywiście równy objętości prostopadłościanu opisanego na tym sympleksie. Przypominając sobie, że kwadrat objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,,,$\mathbf{v}_n$ jest równy wyznacznikowi Grama tych wektorów, otrzymujemy wzór na objętość sympleksu rozpiętego na wektorach $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,,,$\mathbf{v}_n$:

$$v_n^2 = \frac{1}{n!^2} G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 ,,, \mathbf{v}_n).$$

Wykorzystamy wyliczone zależności do obliczenia objętości sympleksu. Oczywiście objętość ta musi być rozumiana w sensie n-wymiarowym, choć na razie nie wiemy, co to znaczy. Matematycznie rzecz biorąc, musimy wprowadzić aksjomaty rządzące pojęciem „objętości” tak, by były one zgodne ze zdrowym rozsądkiem, o ile w ogóle o czymś takim można mówić w odniesieniu do dowolnie wysokiego wymiaru. Wydaje się „rozsądne”, że objętość n-wymiarowej kostki o krawędzi a powinna być równa a^n. I to przyjmiemy jako aksjomat. Dalej, przyjmiemy, że objętość „graniastosłupa” wymiaru n jest równa iloczynowi (n–1)-wymiarowej objętości podstawy i wysokości tego graniastosłupa. To jest zresztą aksjomat ogólniejszy niż ten o objętości kostki.

Następnie musimy poznać wzór na objętość ostrosłupa. Przyjmiemy, że objętość n-wymiarowego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{n}$ „pola podstawy” razy wysokość. Przez pole podstawy rozumiemy oczywiście objętość w sensie (n–1)-wymiarowym. Możemy sprawdzić, że takie określenie jest zgodne z tym, czego byśmy wymagali od pojęcia objętości. Kostkę wymiaru n o krawędzi a możemy bowiem podzielić na $2n$ takich samych (tj. przystających) ostrosłupów n-wymiarowych. Każdy z tych ostrosłupów ma jako podstawę kostkę wymiaru n–1 i środek w środku kostki. Zatem jego wysokością jest $\frac{a}{2}$. Zatem objętością każdego takiego ostrosłupa jest $\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^{n-1}=\frac{a^n}{2n}$. Sumą objętości tych ostrosłupów jest więc a^n, czyli objętość kostki.

A oto wzór, do którego zmierzaliśmy:

Twierdzenie. Objętość sympleksu wymiaru n o krawędzi a jest równa

$$V_n=\frac{a^n\sqrt{n+1}}{n!\sqrt{2^n}}.$$

Dowód. Zaczniemy naszą indukcję od $n = 2$. Dwuwymiarowy sympleks to trójkąt równoboczny. Dwumiarową „objętością” jest pole. Pamiętamy, że pole trójkąta równobocznego wyraża się wzorem $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ale V_2 z powyższego wzoru to $\frac{a^2\sqrt{2+1}}{2!\sqrt{2^2}}$, czyli właśnie S.

Pozostaje wykonać krok indukcyjny. Zakładamy prawdziwość wzoru na objętość dla sympleksu pewnego wymiaru $n \geq 2$. Rozważmy sympleks wymiaru $n + 1$, o krawędzi długości a. Każdy sympleks jest ostrosłupem, w którego podstawie jest sympleks mniejszego wymiaru. „Pole podstawy” to zatem V_n. Objętość naszego sympleksu wymiaru $n+1$ jest zatem równa

$$\frac{1}{n+1}h_{n+1}V_n = \frac{a}{n+1}\sqrt{\frac{n+2}{2(n+1)}}\cdot\frac{a^n\sqrt{n+1}}{n!\sqrt{2^n}} = \frac{a^{n+1}\sqrt{n+2}}{(n+1)!\sqrt{2^{n+1}}}.$$

To jest właśnie V_{n+1} z powyższego wzoru. Twierdzenie udowodnione.

Uwaga druga. Przy dowodzeniu wzoru na objętość sympleksu moglibyśmy indukcję zaczynać od zera, a nawet od minus 1 (!). Trzeba tylko rozsądnie określić sympleks wymiaru 0 i wymiaru minus 1. Z wymiarem 0 nie ma kłopotów: figury wymiaru 0 to zbiory izolowanych punktów. Zerowymiarowy sympleks to po prostu pojedynczy punkt. Ma on oczywiście zerową długość, ale nie „zerowymiarową objętość”. Co możemy uważać za *zerowymiarową* objętość? Odpowiedź narzuca się sama: jest to liczba punktów danej figury. Zatem $V_0=\frac{a^0\sqrt{1}}{1!\sqrt{2^0}}=1$; zgadza się. Z wymiarem -1 to już tylko sztuczki logiczne. W algebrze i topologii przyjmuje się niekiedy, że zbiór pusty ma wymiar -1. Jeśli się zgodzimy na to, a ponadto na to, że sympleks wymiaru -1 jest zbiorem pustym, to niezależnie od tego, jaki sens nadamy symbolowi $(-1)!$, otrzymamy $V_{-1} = 0$. Gdybym ten fragment tekstu zamieścił w swojej pracy naukowej, dowód indukcyjny wzoru na objętość zacząłbym właśnie od -1. Tak byłoby właśnie „elegancko”.

I jeszcze trzecia uwaga. Gdy n jest dużą liczbą, to objętość sympleksu o krawędzi $a = 1$ jest bardzo mała: ciąg o wyrazie ogólnym $\frac{\sqrt{n+1}}{n!\sqrt{2^n}}$ dąży do zera, i to dość szybko. Już dla $n = 6$ mamy $V_8=\frac{3}{40320\cdot 16}=\frac{1}{215040}$. Kilkanaście lat temu sprzedawano u nas mleko w pojemnikach czworościennych. W przestrzeni dziewięciowymiarowej taki pojemniczek o krawędzi 10 cm zawierałby tylko 0,004 mililitra mleka! Ale wystarczyłoby zwiększyć wymiary pojemnika niespełna 4 razy, by już móc sprzedawać mleko na litry. Istotnie, jeżeli za jednostkę miary przyjmiemy decymetr, to dziewięciowymiarowy litr mieści się w kostce o krawędzi 1 albo w sympleksie o krawędzi $\sqrt[9]{215040} \approx 3{,}912931\ldots$ takich dziewięciowymiarowych decymetrów.

Wyliczmy współrzędne wierzchołków sympleksu foremnego wymiaru *n*. Mamy tu kilka możliwych ujęć. Zacznijmy od bardziej efektownego, choć nie najprostszego. Potrzebne będą pewne specjalne liczby naturalne, zwane liczbami trójkątnymi. Wyrażają one liczby kół o tym samym promieniu, które stykając się ze sobą, tworzą trójkąt równoboczny. Oznaczmy kolejne liczby trójkątne symbolem T_n . Jest jasne, że $T_n = T_{n-1} + n$. Wynika stąd ogólny wzór na postać liczby trójkątnej: $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Spośród wielu interesujących tożsamości, jakie spełniają liczby trójkątne, skorzystamy z następującej:

$$\frac{T_{n+1}}{(n+1)^2} + \left(\frac{\sqrt{T_n}}{n} - \frac{1}{2\sqrt{T_n}} \right)^2 = 1.$$

Istotnie, rozwijając wyrażenie po lewej stronie, otrzymujemy kolejno

$$\frac{T_{n+1}}{(n+1)^2} + \left(\frac{\sqrt{T_n}}{n} - \frac{1}{2\sqrt{T_n}} \right)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)^2} + \frac{T_n}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{4T_n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)^2} + \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{n(n+2) + (n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n(n+1) + (n+1)^2 - 2(n+1) + (n+1)}{2n(n+1)} = \frac{n + (n+1) - 2 + 1}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1.$$

Twierdzenie. Następujące punkty tworzą sympleks foremny o krawędzi 1:

$$(0,0,0,\ldots,0,0),\ (1,0,0,\ldots,0,0),\ \left(\frac{1}{2\sqrt{T_1}}, \frac{\sqrt{T_2}}{2}, 0,\ldots,0,0 \right), \left(\frac{1}{2\sqrt{T_1}}, \frac{1}{2\sqrt{T_2}}, \frac{\sqrt{T_3}}{3}, \ldots, 0, 0 \right),$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{T_1}}, \frac{1}{2\sqrt{T_2}}, \frac{1}{2\sqrt{T_3}}, \ldots, \frac{1}{2\sqrt{T_{j-1}}}, \frac{\sqrt{T_j}}{j}, 0, \ldots, 0 \right), \left(\frac{1}{2\sqrt{T_1}}, \frac{1}{2\sqrt{T_2}}, \frac{1}{2\sqrt{T_3}}, \ldots, \frac{1}{2\sqrt{T_{n-1}}}, \frac{\sqrt{T_n}}{n} \right)$$

Dowód wynika wprost z podanej wyżej tożsamości dotyczącej liczb trójkątnych.Wykorzystamy ten fakt do innego obliczenia objętości sympleksu. Jest ona równa $\dfrac{1}{n!}$ pierwiastka wyznacznika macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \; .... & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{T_1}} & \frac{\sqrt{T_2}}{2} & 0 & 0 \; .... & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{T_1}} & \frac{1}{2\sqrt{T_2}} & \frac{\sqrt{T_3}}{3} & 0 \; .... & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{T_1}} & \frac{1}{2\sqrt{T_2}} & \frac{1}{2\sqrt{T_3}} & \frac{\sqrt{T_4}}{4} \; .... & 0 \\ & & & & .... \\ \frac{1}{2\sqrt{T_1}} & \frac{1}{2\sqrt{T_2}} & \frac{1}{2\sqrt{T_3}} & .... & .0 \\ & & & & .... \\ \frac{1}{2\sqrt{T_1}} & \frac{1}{2\sqrt{T_2}} & \frac{1}{2\sqrt{T_3}} & \frac{1}{2\sqrt{T_4}} & \frac{\sqrt{T_n}}{n} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik ten jest równy

$$\frac{1\cdot\frac{\sqrt{T_2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{T_3}}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{T_n}}{n}}{n!} = \frac{\frac{\sqrt{T_2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{T_3}}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{T_n}}{n}}{n!} =$$

$$= \frac{\sqrt{T_1\cdot T_2\cdot\ldots\cdot T_n}}{(n!)^2} = \frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{2}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2^n}$$ .Uwzględniając to, że w

przestrzeni wymiaru n objętość n-wymiarowa zmienia się proporcjonalnie do *n-tej* potęgi rozmiarów liniowych bryły, mamy zatem:

Twierdzenie. Objętość sympleksu foremnego wymiaru n , o krawędzi a wyraża się wzorem

$$V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!\sqrt{2^n}}a^n .$$

Wykorzystując to, że znamy współrzędne wierzchołków sympleksu wymiaru n, wyliczymy kąty między hiperścianami, to jest ścianami wymiaru n-1. Obliczymy najpierw iloczyn wektorowy wektorów będących wierszami 1, 2, 3, …, n-1 powyższej macierzy. Jego n-1 pierwszych współrzędnych to zera, a ostatnia współrzędna równa się wobec tego objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach, a zatem objętości (n-1)-wymiarowej ściany sympleksu, pomnożonej przez (n-1)! Tym iloczynem wektorowym jest zatem $\left[0, 0, 0, \ldots, 0, \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}\right]$.

Obliczymy iloczyn wektorowy wierszy o numerach 2, 3, …, n-1. ……

Za pomocą programu Mathematica wyliczamy, że cosinus kąta między hiperścianami jest równy $\frac{1}{n}$. Zatem w granicy kąt ten jest prosty. Sympleks „się prostuje”.

Wygodniejsze wzory otrzymamy, gdy użyjemy analogii z wymiarem 3. Odpowiedni przekrój sześcianu jest trójkątem równobocznym. Możemy zatem za wierzchołki naszego sympleksu wymiaru *n* przyjąć następujące punkty przestrzeni wymiaru $n+1$

(1,0,0,…,0,0), (0,1,0,..,0, 0), …, (0,0,0,…,1,0), (0,0,0,…,0,1) .

Łatwo obliczyć, że każdy z tych punktów jest odległy od każdego innego o $\sqrt{2}$. Musimy pamiętać, że jeżeli chcemy odnieść otrzymane wyniki do sympleksu o boku jednostkowym, należy podzielić je przez właśnie $\sqrt{2}$ (jeśli chodzi o długości). Do celów obliczeniowych wygodnie jest zaburzyć symetrię, przesuwając wszystko o wektor [-1,0,0,…,0,0]. Innymi słowy, za wierzchołki przyjmujemy punkty $u(n)$:

(0,0,0,…,0,0), (-1,1,0,..,0, 0), …, (-1,0,0,…,1,0), (-1,0,0,…,0,1) .

W programie *Mathematica* możemy to osiągnąć na przykład tak.

```
u[n_] :=
Flatten[Append[{{Table[0,{n +
1}]}},Table[Prepend[IdentityMatrix[n][[j]],−1],{j,1,n}]],1]
```

Przedtem jeszcze możemy wczytać funkcję, wyznaczającą odległość dwóch punktów. Stosujemy do tego wzór Pitagorasa

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^{2},$$

lub zależność, wynikającą z tego, że kwadrat długości wektora to jego kwadrat skalarny. W programie *Mathematica* mamy

```
odl[p_,q_] := (p-q).(p-q)
```

Rozważymy inne zadanie.

Wyznaczyć długość krawędzi *n*-wymiarowego sympleksu o objętości 1.

Zadanie jest nietrudne. Z równania

$$\frac{a^n\sqrt{n+1}}{n!\sqrt{2^n}}=1$$

wyznaczamy, drogą kolejnych przekształceń:

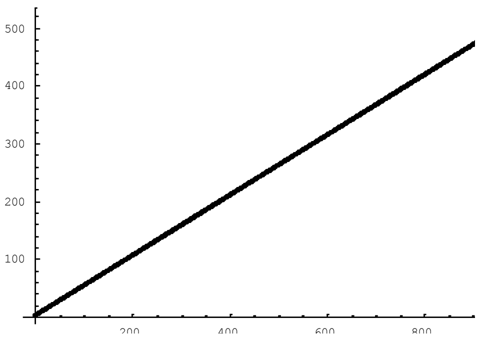
$$a=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[n]{n!}}{2\sqrt[n]{n+1}}$$

Wzór ten nie wygląda ciekawie. Ot, wzór jak wzór. Weźmy jednak komputer i program, który pozwoli nam wyliczyć te rozmiary dla wielu *n*. Wystarczy nawet Excel.

fx =2^(1/2)*(SILNIA(A1)^(1/A1))/((A1+1)^(1/(2*A1)))

A	B	C
1	1	
2	1,519671371	
3	2,039648903	
4	2,559744142	
5	3,079896498	
6	3,600080765	
7	4,12028463	
8	4,640501383	
9	5,160727055	
10	5,680959156	
11	6,20119604	
12	6,721436579	
13	7,241679974	
14	7,761925643	
15	8,282173151	
16	8,802422167	
17	9,322672437	
18	9,842923759	
19	10,36317597	
20	10,88342895	

Gdy zrobimy wykres ciągu widocznego tu w kolumnie B, zobaczymy .... linię prostą. Jest zadziwiające, że tak skomplikowany wzór wyznacza z bardzo dobrym przybliżeniem linię prostą!



Możemy badać geometrię sympleksu podobnie, jak kostki dowolnego wymiaru. Oto kilka łatwych zadań.

Zadanie 1. Obliczyć promień kuli wpisanej w sympleks, promień kuli opisanej na sympleksie, a także promienie kul stycznych do ścian *k*-wymiarowych sympleksu.

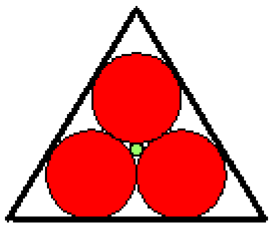
Zadanie 2. Uogólnić wzór wyrażający promień kuli wpisanej w trójkąt w zależności od pola i obwodu trójkąta na dowolny sympleks wymiaru n .

Twierdzenie. Kąt między krawędzią a *k*-wymiarową ścianą jest równy $\arccos \frac{\sqrt{T_k}}{k+1}$.

Dowód. Wystarczy obliczyć stosowne kosinusy kątów. W szczególności dla k =1 otrzymujemy $\arccos \frac{\sqrt{T_1}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 3. W naroża sympleksu wymiaru n wpisano jednakowe kule styczne do tych naroży i styczne do siebie wzajemnie. Między nie wpisano jeszcze jedną kulę, styczną zewnętrznie do nich. Obliczyć promienie tych kul. Zbadać, czy promień tej dodanej kuli rośnie do nieskończoności wraz ze wzrostem *n,* czy jest ograniczony, a może zbieżny do pewnej granicy.

Rysunek poniższy pokazuje sytuację dla n = 2.



Rozwiązanie tego zadania było częścią mojego referatu na tradycyjnej Szkole Matematyki Poglądowej w sierpniu 2009 r. Szkoła miała temat „Wbrew intuicji" i poświęcona była, zgodnie z tytułem, takim zjawiskom matematycznym, gdzie intuicja płata nam figle. Tak bywa bardzo często, gdy badamy własności figur wysokich wymiarów. Nasza, ludzka wyobraźnia, jest bowiem ograniczona do $n = 3$.

Ale pójście „na przekór intuicji" dotyczyło nie tylko samego zagadnienia, ale i użytej metody. Użyjemy programu *Mathematica.* Oto szczegóły.

Do obliczenia promienia kul „dużych", to jest wpisanych w naroża sympleksu zastosujemy metodę znaną z kilku konstrukcji geometrycznych, na przykład przy wpisywaniu kwadratu w trójkąt. Wpisujemy kwadrat w naroże trójkąta i wykonujemy jednokładność tak, by trzy wierzchołki kwadratu ślizgały się po dwóch bokach, a czwarty wierzchołek „oparł się" o przeciwległy bok. Zaczniemy od kuli wpisanej w naroże, którego wierzchołkiem jest pierwszy z punktów $u(n)$, czyli (0,0,0,…0,0). Jej środek, oznaczymy go przez **srodek**, ślizga się po prostej łączącej ten wierzchołek ze środkiem przeciwległej ściany. Jest to oczywiście wysokość sympleksu. Przyjmując t za parametr (powiedzmy, czas), mamy

```
srodek[n_] := t*Mean[Table[u[n][[k]], {k,2,n+1}]];
```

czyli $\left(-t, \frac{t}{n}, \frac{t}{n}, \dots, \frac{t}{n}\right)$.

Promień tej kuli jest równy odległości jej środka od rzutu środka na ścianę wymiaru n-1. Możemy wybrać dowolną ścianę. Obraz środka kuli, oznaczmy go przez **srodekc,** będzie leżał na prostej łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości ściany.

```
srodekc [n_]:= t*Mean[Table[u[n][[j]], {j,3,n+1}]];
```

Używamy stosownej opcji programu *Mathematica*: rzutowanie wektora na wektor:

```
rzut[n_] := Assuming[t>0,Projection[srodek[n],srodekc[n]]];
```

Wyznaczamy promień „dużej" kuli:

```
promienduzej[n_] := odl[rzut[n], srodek[n]];
```

co daje wynik $\frac{n+1}{n^3}t^2$. Jest to nie tyle promień kuli, co kwadrat jej promienia. Wygodniej jest obliczać kwadraty odległości – nie musimy wtedy wyciągać pierwiastków.

Następnie powtórzymy operację „rozdmuchiwania" małej kulki z innego naroża. Wybierzmy naroże o wierzchołku (-1,1,0,0,…,0). Ścianą przeciwległą jest

```
scianaprzec[n_] := Delete[u[n], 2];
```

a zatem środek tej drugiej kuli znajduje się na prostej o przedstawieniu parametrycznym

```
srodek2[n_] := u[n][[2]] + t*(Mean[scianaprzec[n]]-u[n][[2]])
```

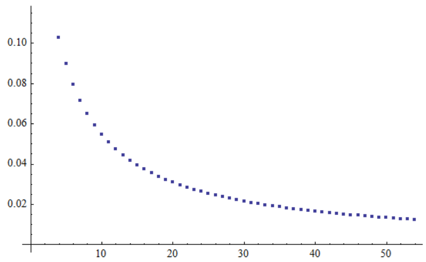
i ma oczywiście ten sam promień, co pierwsza kula (dla tego samego parametru *t*). Kluczowym miejscem programu jest wyliczenie, dla jakiego parametru *t* odległość środków tych dwóch kul jest równa podwojonemu promieniowi. Z dwóch rozwiązań wybieramy to, które daje zewnętrzną styczność kul:

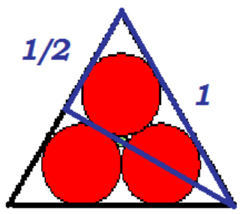
```
odleglosc srodkow[n_] := odl[srodek[n], srodek2[n]];
parametr[n_]          :=Solve[odleglosc srodkow[n]==4*promien[n], t][[1,1,2]];
```

Po podstawieniu wyliczonej wartości *t* do wyrażenia na promień otrzymujemy ciąg liczb zaczynający się od

$$\{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1), \frac{1}{10}(\sqrt{6}-1), \frac{1}{18}(\sqrt{10}-1), \frac{1}{28}(\sqrt{15}-1), \frac{1}{40}(\sqrt{21}-1), \frac{1}{54}(2\sqrt{7}-1), \frac{1}{14}\}\ ,\ldots$$

w czym rozpoznajemy ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = \frac{\sqrt{T(n)}-1}{n^2+n-2}$, gdzie $T(n)$ jest n-tą liczbą trójkątną. Ponieważ $T(n)$ zależy kwadratowo od n, ciąg c_n ma granicę 0 i dąży tam z szybkością odwrotności funkcji liniowej. Przypominam, że wyliczyliśmy promień kul wpisanych w naroża sympleksu i stycznych do siebie wzajemnie. Wykres pokazuje zależność promienia od wymiaru.





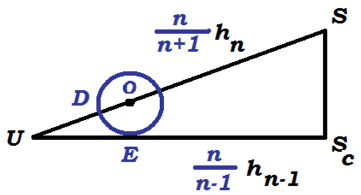
Możemy sprawdzić wynik inną metodą. Spójrzmy najpierw na powyższy rysunek trójkąta i kół.

„Duże” koło jest wpisane w trójkąt o bokach $1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, jego promień jest zatem ilorazem pola trójkąta przez połowę obwodu tego trójkąta: $r = \frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$.

I jeszcze powtórzmy obliczenie dla wymiaru 4. Skorzystamy ze wzoru na promień kuli wpisanej w sympleks (niekoniecznie foremny): $r = \frac{n \cdot V_n}{S_n}$. Wzór ten łatwo wyprowadzić analogicznie jak w przypadku $n=2$.

Kule, o których mowa w zadaniu, są wpisane w sympleks, który powstaje jak następuje. Wybieramy środek C jednej z krawędzi (jednowymiarowych) sympleksu foremnego $A_0A_1\ldots,A_n$. Niech to będzie krawędź $A_0\ A_1$ .Sympleksy $S = CA_0\ A_2A_3\ldots A_n$ oraz $S' = CA_1\ A_2A_3\ldots A_n$ są przystające i dwie z kul, o których mowa w zadaniu, są wpisane w nie.

Przyjmijmy teraz $n = 4$. Obliczymy najpierw pole przekroju sympleksu $A_0A_1A_2\ A_3A_4$ hiperpłaszczyzną $CA_2A_3A_4$. Przekrój ten jest czworościanem trójwymiarowym o podstawie będącej trójkątem równobocznym (o boku 1) i trzech krawędziach bocznych długości $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wysokością jego jest odcinek długości $\frac{\sqrt{5}}{12}$, stąd wyliczamy łatwo jego trójwymiarową objętość. Wynosi ona $\frac{\sqrt{5}}{24}$. Zatem „czterowymiarowe pole" (=trójwymiarowa objętość) każdego z czworościanów *S* i *S'* jest równa połowie „pola" wyjściowego czworościanu foremnego $A_0A_1A_2\ A_3A_4$ powiększoną o $\frac{\sqrt{5}}{24}$. Jest to równe $\frac{5}{12\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{24}=\frac{\sqrt{5}}{24}(\sqrt{10}+1)$. Szukany promień kuli jest zatem równy $r=\dfrac{4\cdot V_4}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{24}(\sqrt{10}+1)}=\frac{\sqrt{10}-1}{18}$, co jest zgodne z wynikiem, otrzymanym powyżej.



Z podobieństwa trójkątów *UOE* i SS_cU otrzymujemy zależność *UO* = *n OE*, zatem UO = $\frac{n(\sqrt{T(n)}-1)}{n^2+n-2}$. Ciąg o tym wyrazie ogólnym ma granicę $\frac{1}{\sqrt{2}}$, zatem „w granicy" *OU* zabiera całą wysokość, na promień małej kulki zostaje mało miejsca; jej promień dąży do zera z szybkością odwrotności funkcji liniowej.

7. Objętość kuli wymiaru *n*.

Objętość *n*-wymiarową możemy obliczyć przez proste całkowanie objętości (*n*-1)-wymiarowej. W programie Mathematica mamy:

```
n=1; objetosc = {2r};
Do[n++;AppendTo[objetosc, Integrate[Last[objetosc]/.r-> Sqrt[1-
h^2], {h,-1,1}]*r^n],{20}];
```

$$\left\{2r,\ \pi r^2,\ \frac{4\pi r^3}{3},\ \frac{\pi^2 r^4}{2},\ \frac{8\pi^2 r^5}{15},\ \frac{\pi^3 r^6}{6},\ \frac{16\pi^3 r^7}{105},\ \frac{\pi^4 r^8}{24},\ \frac{32\pi^4 r^9}{945},\ \frac{\pi^5 r^{10}}{120},\ \frac{64\pi^5 r^{11}}{10395},\ \frac{\pi^6 r^{12}}{720},\ \frac{128\pi^6 r^{13}}{135135},\ \frac{\pi^7 r^{14}}{5040},\ \frac{256\pi^7 r^{15}}{2027025},\ \frac{\pi^8 r^{16}}{40320},\ \frac{512\pi^8 r^{17}}{34459425},\ \frac{\pi^9 r^{18}}{362880},\ \frac{1024\pi^9 r^{19}}{654729075},\ \frac{\pi^{10} r^{20}}{3628800},\ \frac{2048\pi^{10} r^{21}}{13749310575}\right\}$$

Możemy to przedstawić wykresem. Ciekawe, że objętość kuli o jednostkowym promieniu jest największa w przestrzeni wymiaru 5.