Krzysztof Ciesielski[1]

O izometriach i liczbach chromatycznych

Istnieją problemy, których sformułowanie jest bardzo elementarne, zrozumiałe bez trudu dla przeciętnego ucznia, ale rozwiązanie wcale nie jest natychmiastowe... Takie problemy mają w sobie dużo uroku, zwłaszcza w sytuacji, gdy zmagający się z nimi wielbiciele matematyki nie znają rozwiązania – ba, więcej: nie wiedzą, czy ktoś ten problem już kiedyś rozwiązał! Przykładem takiego problemu jest zadanie, ongiś znane w pewnych kręgach jako *Problem izometrii*.

Problem izometrii. *Załóżmy, że funkcja z płaszczyzny w płaszczyznę zachowuje odległość 1, to znaczy – jeśli dwa punkty są odległe o 1, to ich obrazy też. Czy stąd wynika, że ta funkcja zachowuje wszystkie odległości, czyli że jest izometrią?*

Zapiszmy rzecz formalnie; będziemy przez $d(A, B)$ oznaczać odległość euklidesową (standardowo często zapisywaną jako $|\overline{AB}|$). Chcemy zbadać, czy prawdziwe jest twierdzenie:

Jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia własność:
$d(A, B) = 1 \;\Rightarrow\; d((f(A), f(B)) = 1$
to f jest izometrią.

Pytanie to padło jesienią 1979 na jednym ze spotkań Koła Matematyków Studentów UJ. Studenci zajmowali się tam między innymi stawianiem i rozwiązywaniem ciekawych problemów; to zadanie, które przekazał student IV roku (nie wymyślił go, a gdzieś usłyszał) od razu wzbudziło ogromne zainteresowanie. Obok niesłychanie elementarnego (zwłaszcza w porównaniu z innymi problemami) sformułowania, ważnym czynnikiem było, że nikt nie potrafił go rozwiązać – a próbowało wielu, w tym bardzo dobrych studentów i takich z licznymi sukcesami olimpijskimi na koncie; dziś liczni spośród zmagających się ongiś bez powodzenia z problemem izometrii są profesorami i doktorami nauk matematycznych...

Nieraz dobrą metodą walki z zadaniem jest próba rozwiązania zagadnienia prostszego. Zdarza się, że rozstrzygnięcie tego łatwiejszego problemu pomoże przy walce z oryginalnym, może jakaś idea znajdzie zastosowanie...

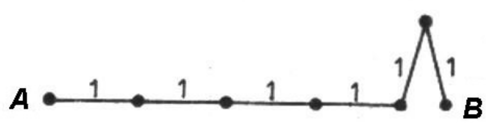
Tu zmiana na zadanie prostsze jest naturalna. Zamiast płaszczyzny rozważmy prostą. Czy wówczas zachowywanie odległości 1 powoduje, że badane odwzorowanie jest izometrią? Dość szybko można stwierdzić, że nie. Weźmy mianowicie funkcję f, która każdej liczbie całkowitej n przypisuje $n + 1$, natomiast dla liczby niecałkowitej mamy $f(x) = x$. Oczywiście punkty odległe o 1 przekształcane są na punkty odległe o 1 (bo albo oba są całkowite, albo oba niecałkowite), izometrią natomiast taka funkcja oczywiście nie jest.

Problem opierał się przez rok. W październiku 1980 przyszedł na studia nowy rocznik – młodzi zapaleńcy od razu „rzucili się” na nierozwiązane zadania... Po kilku dniach problem izometrii przestał być zagadką. Rozwiązał go Sławomir Kołodziej, dziś profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, autor wielu ważnych wyników przede wszystkim w analizie zespolonej.

Oto schemat idei dowodu przedstawionego przez Kołodzieja.

Na wstępie dwie obserwacje, których dokonali także wcześniej inni zmagający się z problemem. Po pierwsze, obrazami wierzchołków trójkąta równobocznego o boku 1 przez funkcję f są wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1. Po drugie, jeśli $d(A, B) \leqslant n$, to $d((f(A), f(B)) \leqslant n + 1$.

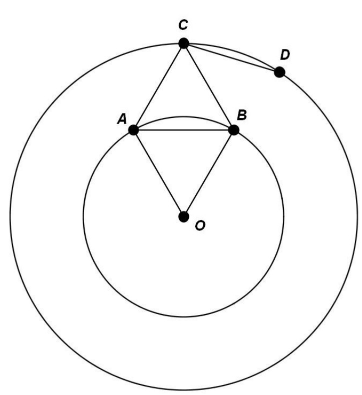
Druga obserwacja wymaga krótkiego uzasadniania. Narysujmy odcinek $\overline{AB}$ i przyjmijmy że $n - 1 < d(A, B) \leqslant n$. Możemy wówczas odpowiednio skonstruować $n + 2$ punkty odległe o 1 (pierwszym z nich jest A, ostatnim B).



Ze względu na to, że odległość 1 między „węzłami" zostaje zachowana, punkty $f(A)$ i $f(B)$ nie mogą być odległe o więcej niż $n + 1$.

Teraz przejdźmy do zasadniczych punktów dowodu. Jeśli punkt A i B są odległe o $\sqrt{3}$, to ich obrazy mogą albo też być odległe o $\sqrt{3}$, albo się pokrywać. Wykażemy, że ta druga możliwość nie może zajść.

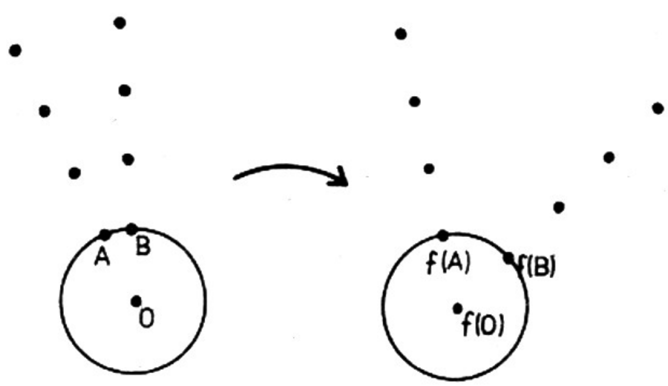
Niech punkty O oraz C będą odległe o $\sqrt{3}$; możemy wówczas znaleźć punkty A i B tak, by zarówno trójkąt OAB jak i CAB były trójkątami równobocznymi o boku 1. Obraz $f(C)$ punktu C będzie albo okrywał się z obrazem $f(O)$ punktu O, albo będzie leżał na okręgu o środku $f(O)$ i promieniu $\sqrt{3}$. To samo jednak dotyczy punktu D leżącego na okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{3}$, odległego od C o 1. Gdyby choć jeden z obrazów $f(C)$ i $f(D)$ był identyczny z punktem $f(O)$, to odległość tych obrazów wynosiłaby albo 0, albo $\sqrt{3}$ – co jest niemożliwe, bo $d(C, D) = 1$.



Ta obserwacja jest kluczowa dla dowodu. Teraz szybko można zauważyć, że „nieskończona wysypka" utworzona przez wierzchołki trójkątów równobocznych o boku 1 przejdzie na analogiczną „nieskończoną wysypkę". W szczególności, punkty odległe o liczbę naturalną, leżące na jednej prostej, po przekształceniu leżą też na jednej prostej i w tej samej odległości.

Teraz pokażemy, ze okrąg o promieniu 1 przekształcany jest izometrycznie na taki sam okrąg. Istotnie, przypuśćmy, że jest inaczej; niech O oznacza środek takiego okręgu, a A i B dwa punkty, których odległość się po przekształceniu zmieni. Możemy przyjąć, że się zwiększy. Dlaczego? Rozważmy sześciokąt foremny wpisany w badany okrąg, wyznaczony przez A; możemy przyjąć, że B jest punktem na łuku między A a sąsiednim wierzchołkiem. Gdyby odległość między A i B się zmniejszyła, to zamiast A rozważamy ten sąsiedni wierzchołek sześciokąta.

Zakładamy zatem, że odległość między $f(A)$ i $f(B)$ jest większa niż między A i B. Zbadajmy proste OA oraz OB. Nawet jeśli odległość między $f(A)$ i $f(B)$ zwiększy się minimalnie, to ze względu na to, że punkty na prostej przechodzą w punkty na obrazie prostej, odległość obrazów punktów odpowiednio dalekich, oddalonych od O, zwiększy się po przekształceniu o co najmniej 2. No, a to jest niemożliwe.



Teraz, biorąc okręgi o środkach na okręgu jednostkowym przekształconym izometrycznie, szybko zauważamy, że całe koło jednostkowe jest przekształcane izometrycznie, a stąd już błyskawicznie wynika teza.

Wkrótce po rozwiązaniu tego problemu przez Kołodzieja, inny dowód podał student tego samego roku, Apoloniusz Tyszka. Jego rozumowanie dowodziło prawdziwości twierdzenia dla $\mathbb{R}^n$, gdzie $n > 1$. Innymi słowy, dla $n > 1$, funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taka, że z warunku $d(A, B) = 1$ wynika $d((f(A), f(B)) = 1$ musi być izometrią. Przez d oznaczamy odległość euklidesową w przestrzeni o wyższym wymiarze.

Parę lat później (czasy były „przedinternetowe", dostęp do baz danych naukowych był znacznie a to znacznie trudniejszy niż teraz) odkryłem przypadkowo w prestiżowym piśmie matematycznym *Proceedings of the American Mathematical Society* z roku 1953 pracę *On isometries of Euclidean spaces*. Autorami byli F. S. Beckman i D. A. Quarles, Jr. Udowodnili oni w tej pracy właśnie owo twierdzenie dla $\mathbb{R}^n$. Nie byliśmy więc w Krakowie pierwsi...

Jak się potem okazało, rozmaite wariacje tego problemu miały liczne rzecze zwolenników. Na ten i pokrewne tematy ukazało się wiele prac, badane były rozmaite przestrzenie. Mówimy, że funkcja f spełnia (DOPP) (od angielskiego: *Distance One Preserving Property*, jeśli dwa punkty odległe o 1 przekształcane są na punkty odległe o 1. Odległość wcale nie musi być euklidesowa, funkcja może przekształcać zbiór w inny zbiór...

Dla innych klasycznych metryk w $\mathbb{R}^n$, a w szczególności w $\mathbb{R}^2$, zadanie okazuje się raczej elementarne. Problem ma różne wariacje, napisano o nim sporo, ale największy urok ma w przypadku euklidesowym.

W roku 1989 najprostszy znany mi dowód twierdzenia w przypadku $\mathbb{R}^n$ opublikował w kwartalniku *The Mathematical Intelligencer* Ulrich Everling.

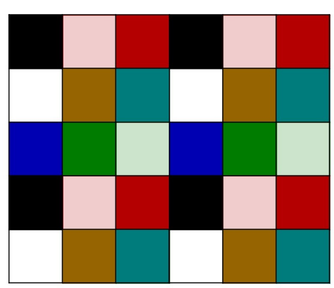
Jak stwierdziliśmy, można rozważać przypadek, w którym przeciwdziedzina funkcji f jest inna niż dziedzina. Można zatem zastanowić się nad następującym problemem:

Czy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca (DOPP) jest izometrią na swój obraz?

Gdyby odpowiedź była twierdząca, to oczywiście obrazem płaszczyzny byłaby płaszczyzna zawarta w przestrzeni trójwymiarowej. Jednak zarówno dowód Kołodzieja, jak i inne wymienione wyżej, istotnie wykorzystywały fakt, że wymiar przeciwdziedziny jest taki sam jak wymiar dziedziny. Mamy zatem kolejne ładne zadanie...

Spróbujmy rozwiązać zadanie pozornie trudniejsze ale – jak się okaże – prostsze. Niech funkcja f prowadzi nie w $\mathbb{R}^3$, ale w... $\mathbb{R}^8$. Okazuje się, że z tym problemem można sobie poradzić.

Otóż $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^8$ może spełniać (DOPP) i nie być izometrią na swój obraz! Bu to wykazać, podzielmy płaszczyznę na kwadraty o przekątnej równej 1 i pokolorujmy je tak, jak na poniższym obrazku, używając dziewięciu kolorów.

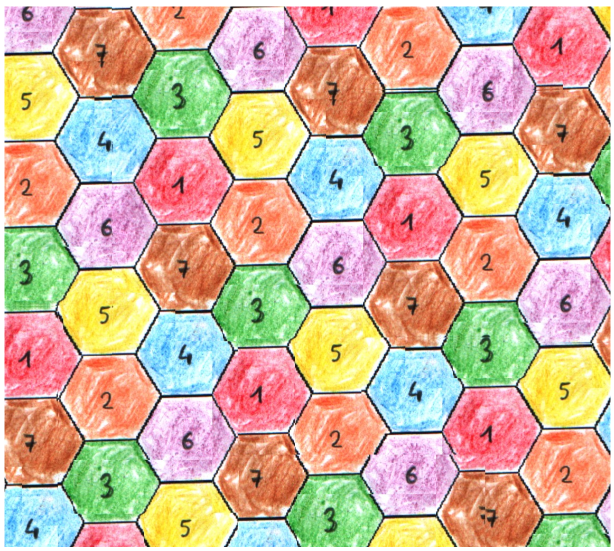


Do każdego kwadratu zaliczamy jego dolny bok, lewy bok oraz lewy dolny róg. W żadnym kwadracie nie leżą dwa punkty odległe o 1 pokolorowane na ten sam kolor – mogłoby się to zdarzyć jedynie w przypadku końców przekątnej, ale dwa różne końce są pokolorowane inaczej. Z kolei, punkty z różnych kwadratów pokolorowane na ten sam kolor są odległe o liczbę większą niż 1.

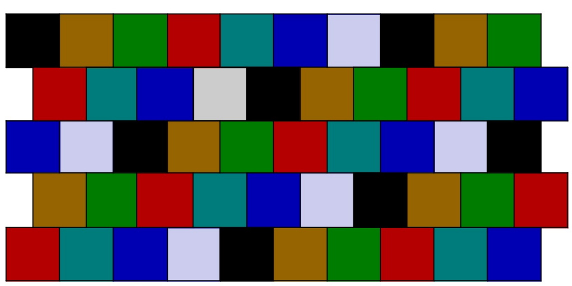
Stąd już krok do rozwiązania. Rozważmy sympleks jednostkowy $\mathbb{R}^8$. Sympleks – to uogólnienie trójkąta równobocznego na płaszczyźnie, czworościanu foremnego w przestrzeni trójwymiarowej... Końce takiego sympleksu są zawsze odległe o 1. Na płaszczyźnie jest tych końców 3, w przestrzeni trójwymiarowej – 4, w $\mathbb{R}^8$ – 9.

Jeśli pokolorujemy wierzchołki sympleksu w $\mathbb{R}^8$ dziewięcioma kolorami i każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkujemy wierzchołek pomalowany tym samym kolorem co on, to nasza funkcja spełnia (DOPP). Istotnie, obrazy dwóch punktów pomalowanych różnymi kolorami są odległe o 1, a punkty na płaszczyźnie odległe o 1 są różnych kolorów... Funkcja taka jest może mało ciekawa, zbiór wartości jest dziewięcioelementowy, ale jest bardzo dobrym przykładem.

Można obniżyć wymiar w przeciwdziedzinie. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ może spełniać (DOPP) i nie być izometrią na swój obraz. Wystarczy podzielić odpowiednio płaszczyznę na sześciokąty foremne o największej przekątnej równej 1 i pomalować płaszczyznę tym razem na 7 kolorów (rysunek). Do sześciokąta zaliczamy dwa jego boki i wierzchołek między nimi.



Można też pomalować płaszczyznę inaczej, używając kwadratów (rysunek).



No dobrze, a co z oryginalnym zadaniem? Okazuje się, że dla funkcji prowadzącej zarówno w $\mathbb{R}^3$, jak i w $\mathbb{R}^4$ i w $\mathbb{R}^5$... jest to do tej pory otwarty problem!

W tej chwili możemy postawić definicję.

Definicja. Liczba nieizometryczna płaszczyzny $N(\mathbb{R}^2)$ jest to to najmniejsza liczba naturalna n takie, że istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ spełniająca (DOPP) i nie będąca izometrią.

Z powyższych uwag wynika, że spełniona jest nierówność
$3 \leqslant N(\mathbb{R}^2) \leqslant 6$
i tyle na razie na ten temat wiadomo...

Analogicznie można definiować liczbę nieizometryczna przestrzeni euklidesowej $n-$wymiarowej $N(\mathbb{R}^n)$. Za pomocą analogicznego jak wyżej rozumowania można stwierdzić, że taka definicja jest sensowna, i znajdować odpowiednie oszacowania od góry.

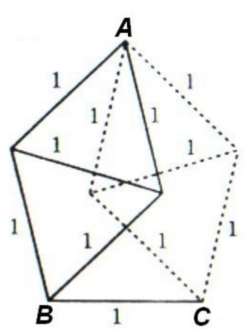
Zostawmy na chwilę izometrie na boku i przejdźmy do pozornie innych problemów. Zacznijmy od standardowego zadania:

Każdy z punktów płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub zielonym. Wykazać, że istnieją 2 punkty pomalowane na ten sam kolor, odległe o 1.

Zadanie nie jest trudne; wystarczy rozważyć wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1. No to wobec tego zadanie kolejne:

Czy można pomalować wszystkie punkty płaszczyzny używając 9 kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1? A używając 7 kolorów? A używając 3 kolorów?

Wygląda znajomo... Tak jest, przecież takie zadanie już rozwiązaliśmy! Można to zrobić używając zarówno 9 kolorów jak i 7 kolorów. Odpowiednie konstrukcje przedstawione są na rysunkach powyżej. Natomiast jeśli chodzi o 3 kolory – nie można. Oto przykład, zwany w literaturze „wrzecionem Moserów”. Przykład ten, jak sama nazwa wskazuje, jako pierwszy podał Edward Nelson.



Wszystkie odcinki na rysunku mają długość 1. Widać, że 3 kolory nie wystarczą. Gdyby można było użyć jedynie trzech kolorów, punkt B musiałby mieć ten sam kolor, co punkt A, podobnie punkt C. Jednakże punkty B i C są odległe o 1.

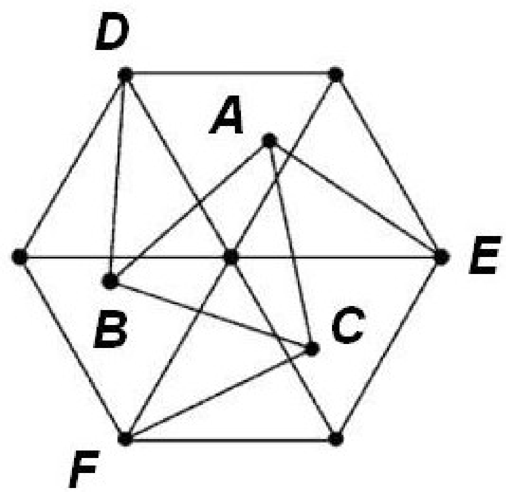
To też wygląda znajomo... Istotnie, podobna (a praktycznie taka sama) konstrukcja została przeprowadzona przy dowodzie twierdzenia o izometrii w przypadku płaszczyzny.

Jak się okazuje, zagadnienie związane jest z problemem niezwykle popularnym wśród sporej grupy matematyków. Chodzi o to, ile wynosi *najmniejsza liczba n taka, że wszystkie punkty* $\mathbb{R}^2$ *można pomalować używając n kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1.*

Tę liczbę nazywa się w literaturze *liczbą chromatyczną płaszczyzny* i oznacza najczęściej przez $\chi(\mathbb{R}^2)$. Wielu znakomitych matematyków w różnych artykułach czy książkach stawiało pytanie, ile ta liczba wynosi. Były wśród nich takie sławy, jak Paul Erdös i Martin Gardner. Jak pokazują badania, pierwszym, który o to zapytał (a przynajmniej nic o nikim wcześniej nie wiadomo) był w roku 1950 Edward Nelson, student Uniwersytetu w Chicago, obecnie profesor matematyki na uniwersytecie w Princeton. On też wykazał, że $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$. Ograniczenie górne $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$ podał w tym samym roku John Isbell, z którym Nelson o tym problemie dyskutował.

Ciekawostka: każdy z możliwych wariantów: 4, 5, 6, 7 ma swoich zwolenników wśród osób zajmujących się tym zagadnieniem. Istnieje jednakże jeszcze inna możliwość. Może się okazać, i wcale nie jest to nierealne, że problem ten jest nierozstrzygalny.

Warto pokazać jeszcze inny dowód oszacowania $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$. Pokazuje to przykład na poniższym rysunku, podany w latach sześćdziesiątych przez Solomona Golomba.



I tu wszystkie odcinki między punktami zaznaczonymi kropkami mają długość 1. Gdyby wystarczały 3 kolory, punkty D, E i F musiałyby być pomalowane na ten sam kolor – jako, że są przeciwległymi wierzchołkami rombów zbudowanych z dwóch trójkątów równobocznych. Oznacza to, że kolor ten nie może być użyty przy malowaniu żadnego z wierzchołków trójkąta ABC. Trzeba zatem użyć co najmniej czterech kolorów.

Widać wyraźny związek między liczbą nieizometryczną a liczbą chromatyczną. Z przedstawionej wyżej konstrukcji można wywnioskować, że zachodzi nierówność

$N(\mathbb{R}^2) \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) - 1$

bo jeśli możemy w odpowiedni sposób pokolorować punkty płaszczyzny, to takie pokolorowanie wyznacza funkcję spełniającą własność (DOPP) ale nie będącą izometrią. Jednak fakt istnienia takiej funkcji wcale nie musi generować żądanego pokolorowania...

Oznacza to, że nic nie możemy powiedzieć o ewentualnej nierówności w drugą stronę. Przedstawiona konstrukcja szacująca liczbę chromatyczną płaszczyzny daje od razu odpowiedź na pytanie o podobne oszacowanie dla izometrii. W „odwrotnym kierunku” takiego związku nie widać.

Widać, że oba problemy, są ze sobą związane – oba też mają liczne rzesze entuzjastów. Co ciekawe, te grupy osób są niezależne – zdarzyło mi się spotkać niejednego wielbiciela problemu izometrii, który w ogóle nie słyszał o liczbach chromatycznych i vice versa, niejedna osoba zajmująca się (nawet intensywnie) liczbami chromatycznymi nie wiedziała nic o własności (DOPP) i problemach izometrii.

Warto dodać kilka dalszych uwag o liczbach chromatycznych. Oczywiście, można te liczby definiować znacznie ogólniej:

Liczba chromatyczna zbioru A jest to najmniejsza liczba n taka, że wszystkie punkty A można pomalować używając n kolorów tak, by dowolne 2 punkty pomalowane na ten sam kolor nie były odległe o 1

a odległość wcale nie musi być euklidesowa.

Naturalne pytanie o liczby chromatyczne przestrzeni euklidesowych $n-$wymiarowych od lat pozostaje bez odpowiedzi – to i owo jednak wiadomo...

Na przykład, w przypadku przestrzeni trójwymiarowej mamy oszacowanie

$5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 18$

przy czym ta ostatnia nierówność jest stosunkowo młoda, wykazana została w 2002 roku, dokonał tego David Coulson z Australii. Poprzednio znane górne oszacowanie (też osiągnięte przez Coulsona) wynosiło 21. Oszacowanie dolne podał Dmitrij Rajski w 1970 roku.

Może wskazane będzie wymienienie tu jeszcze kilku własności. Dla $\mathbb{R}^4$ znane jest oszacowanie $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 6$. Wiadomo też, że istnieją funkcje f i g takie, że $f(n) \to 0$ przy $n \to +\infty$ oraz $g(n) \to 0$ przy $n \to +\infty$ i

$(1,2 + f(n))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + g(n))^n$.

Liczby chromatyczne dla innych zbiorów są nie tylko zdefiniowane, ale i badane – w szczególności dla $\mathbb{Q}^n$. Wiadomo mianowicie, że $\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$. Co może zaskakujące, $\chi(\mathbb{Q}^3)$ wynosi też 2, ale $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$. Natomiast dla $n \geqslant 5$ liczba $\chi(\mathbb{Q}^n)$ jeszcze niedawno nie była znana i nic mi nie wiadomo o tym, by ktoś ostatnio ten problem rozstrzygnął.

Można rozważać – i jest to robione – zagadnienia związane z liczbami chromatycznymi przy dodatkowych restrykcjach. Dlaczego bowiem nie zażądać od zbiorów pomalowanych na ten sam kolor spełniania pewnych warunków? Na przykład, by rozważane zbiory domknięte (dopuszczamy wtedy pomalowanie pewnych punktów więcej niż jednym kolorem). Przy tym założeniu, ową najmniejszą liczbę kolorów oznaczamy przez $\chi_D(\mathbb{R}^n)$. Możemy zażądać, by jednokolorowe zbiory były mierzalne w sensie Lebesgue'a ($\chi_M(\mathbb{R}^n)$). Daje to cały skarbiec problemów, z których bardzo wiele czeka na rozstrzygnięcie. Wiadomo na przykład, że $\chi_D(\mathbb{R}^2) \geqslant 6$ oraz $\chi_M(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$. Można stąd wysnuć wniosek, że jeśli $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$, to przykład odpowiedniego kolorowania (o ile w ogóle uda się go podać) będzie nad wyraz osobliwy...

Na zakończenie, wróćmy jeszcze na chwilę do izometrii. Tym razem na troszkę bardziej zaawansowanym szczeblu.

Przestrzeni metrycznych (czyli takich „z wprowadzoną w nich odległością") jest wiele. Są wśród nich znacznie „większe" od $\mathbb{R}^n$. Zwróćmy uwagę na jedną spośród „nieskończenie wymiarowych", bardzo ważną dla matematyki w ogóle, i dobrze znaną „zawodowcom" – standardowo oznaczaną przez ℓ^2. Jest to zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych takich, że szereg kwadratów takiego ciągu jest zbieżny. Formalnie:

$$\ell^2 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$$

Dlaczego właśnie taka przestrzeń będzie dla nas interesująca? Otóż „odległość" w niej definiuje się następująco: jeśli $(x_n), (y_n)$ są ciągami z ℓ^2, to

$$d((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

Można powiedzieć, że w pewnym sensie jest to uogólnienie „klasycznej" odległości euklidesowej na nieskończony wymiar. Bo przecież w odległości euklidesowej bierzemy po prostu ciągi skończone i tak samo definiujemy dystans między nimi, tyle że kończymy w odpowiednim miejscu (w przypadku prostej na miejscu pierwszym, w przypadku płaszczyzny – na drugim).

Jak wygląda sprawa problemu izometrii w przypadku ℓ^2? Otóż okazuje się, że tu sytuacja wygląda inaczej niż dla przestrzeni o skończonym wymiarze. Spełnianie własności (DOPP) nie gwarantuje tego, że funkcja będzie izometrią!

Co ciekawe, konstrukcja odpowiedniego przykładu jest podobna do tej, która została przeprowadzona w przypadku przekształceń w wyższy wymiar. Należy po prostu znaleźć wystarczająco duży zbiór punktów takich, że dla każdej pary w tym zbiorze odległość między dwoma elementami wynosi 1 i do tego zbioru „wysłać" w odpowiedni sposób cała dziedzinę. Przestrzeń nieskończenie wymiarowa okazuje się być wystarczająco duża, by to zrobić w niej samej i nie wchodzić w wyższe wymiary.

Najpierw zbiór. Rozważmy wszystkie ciągi takie, że na $i-$tym miejscu stoi $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a na pozostałych zera:

$(0, 0 \ldots, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \ldots)$.

Są to elementy ℓ^2. Co więcej, jeśli weźmiemy dwa różne takie ciągi, to odległość między nimi to $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ciągów tych jest tyle, ile liczb naturalnych, czyli przeliczalnie wiele.

Teraz wykorzystamy pewną podstawową własność przestrzeni ℓ^2: jest to przestrzeń ośrodkowa, istnieje w niej przeliczalny podzbiór gęsty. Nie wchodząc w szczegóły, wynika stąd w szczególności, że istnieje przeliczalny zbiór $A \subset \ell^2$ taki, że jeśli w punktach zbioru A „zaczepimy" kule o środkach w tych punktach i promieniach $\frac{1}{2}$, to w sumie kule te pokryją całą przestrzeń ℓ^2. Jeśli Czytelnik nie zetknął się z tą własnością, powinien po prostu w tym momencie w nią uwierzyć – jest to jednak fakt klasyczny i wcale nie taki trudny.

Teraz możemy zakończyć konstrukcję. Każdemu punktowi z ℓ^2 przyporządkowujemy środek kuli do której należy (jeśli należy do wielu, to jeden z nich), a potem ustalamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między tymi środkami (czyli zbiorem A) a rozważanymi przed chwilą ciągami $(0, 0 \ldots, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \ldots)$. Jeśli dwa punkty były odległe o 1, to są im przyporządkowane ciągi różne, a więc odległe o 1. Skonstruowana funkcja nie jest izometrią. Poglądowo, przedstawioną operację można utożsamić z kolorowaniem punktów przestrzeni ℓ^2 w odpowiedni sposób za pomocą nieskończenie wielu kolorów...

I tak, startując od zadania sformułowanego niezwykle elementarnie, językiem zrozumiałym dla uczniów, doszliśmy – może nawet trochę niepostrzeżenie – do serii otwartych problemów i do pojęć zaawansowanej matematyki wyższej. Niejeden uzna, że fakt, że takie rzeczy są możliwe, ma sporo wspólnego z pięknem matematyki...

---

[1] Uniwersytet Jagielloński, Instytut Matematyki, 30-348 Kraków, Łojasiewicza 6