Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Nie ulega wątpliwości, że w edukacji matematycznej najważniejszą rzeczą jest matematyka. A w matematyce najważniejsza nie jest wcale symbolika, terminologia, znajomość algorytmów, erudycja, lecz sposób myślenia. Aby go kształcić, nie potrzeba być głęboko wprowadzonym w matematykę, niekonieczna jest znajomość licznych twierdzeń i wzorów. Nawet najprostsze spostrzeżenia pozwalają na rozwiązanie wielu zadań. A przecież matematyka, jak głosił na wykładzie programującym matematykę XX wieku Dawid Hilbert, cała powstała właśnie z rozstrzygania zadań i wszelkie jej pojęcia powstały, aby konkretnym zadaniom podołać.

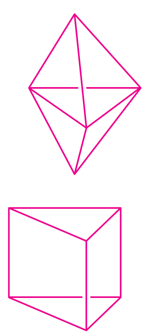
Krawędzie wielościanu

Ile jest wielościanów mających 9 *krawędzi, wszystkie o długości* 1*? Wylicz je i wykaż, że nie ma więcej.*

Aby to zadanie rozwiązać, wystarczy wiedzieć, że
jeśli którąś ze ścian wielościanu jest n-kątem, to ma on co najmniej $2n$ krawędzi,
co jest oczywiste, bo z każdego wierzchołka ściany n-kątnej musi wychodzić co najmniej jedna krawędź niebędąca jej bokiem.

Skoro tak, to każda ze ścian szukanego wielościanu jest albo trójkątem, albo kwadratem. Jeśli jest x tych pierwszych i y tych drugich, to spełnione jest równanie
$$3x + 4y = 18,$$
bo przecież każda krawędź to bok dwóch ścian.

Ponieważ rozwiązanie ma składać się z liczb całkowitych, więc y musi dzielić się przez 3. Zatem $y = 0$ lub $y = 3$ (bo $4 \cdot 6 > 18$). W pierwszym przypadku mamy $x = 6$, a w drugim $x = 2$. I więcej rozwiązań być nie może. Na obrazku widać oba otrzymane wielościany.



Jeszcze prościej rozwiązać zadanie

Udowodnij, że nie ma wielościanu o 7 *krawędziach.*

Podobnie jak poprzednio, stwierdzamy, że wszystkie ściany ewentualnego wielościanu muszą być trójkątami (bo $8 > 7$), a więc ich liczba musi spełniać równanie
$$3x = 14,$$
które nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Co kończy dowód.

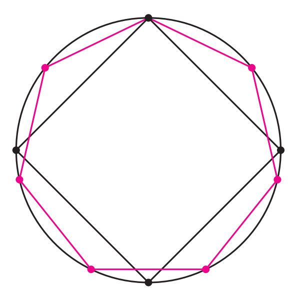
Liczby względnie pierwsze...

... to takie, których największym wspólnym dzielnikiem jest 1. Zatem 1 jest względnie pierwsze z każdą niezerową liczbą całkowitą. Zdarza się tak, że wszystkie liczby względnie pierwsze z daną i mniejsze od niej – oprócz, oczywiście, liczby 1 – są liczbami pierwszymi. Tak jest np. dla liczby 30: względnie pierwsze z nią i mniejsze od niej są tylko 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29. Ale też nie każda liczba ma tę własność: liczba 5 jest względnie pierwsza np. z liczbą 4 (która nie jest pierwsza), 16 jest względnie pierwsza np. z 9, a 22 z 15.

Ciekawym zadaniem jest poszukanie jak największej liczby takich liczb, dla których mniejsze od nich i względnie pierwsze z nimi są tylko – pomijając 1 – liczby pierwsze. Chyba takimi liczbami są (proszę sprawdzić!) 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24. A czy są jeszcze jakieś inne o tej własności? W internecie można znaleźć informację, że – po dołączeniu 30 – innych nie ma. Ale czy to prawda? A jeśli tak, to jak tego dowieść?

⋆ ⋆ ⋆

Na rysunku obok jest kwadrat i siedmiokąt foremny. Okazuje się, że jeden z łuków między wierzchołkami tych wielokątów to $1/(4 \cdot 7) = 1/28$ całego okręgu, a więc rysując je, otrzymaliśmy tym prostym sposobem 28-kąt foremny.



Ale to nie przypadek:
jeśli k i n są względnie pierwsze, to jeden z łuków między wierzchołkami k-kąta foremnego i n-kąta foremnego, wpisanych w ten sam okrąg i mających wspólny wierzchołek, stanowi $1/(k \cdot n)$ całego okręgu.

Dlaczego tak jest?

Tyle propozycji. Byłoby miło, gdybyśmy wszyscy wrzucali do wspólnej puli pomysły, jakie okazały się w naszej pracy szczególnie udane. Nie możemy wprawdzie obiecać, że je przedstawimy w tym kąciku – jest on przecież bardzo mały – ale z pewnością pomogą one lepiej przygotować nasze kolejne spotkania, takie jak to pierwsze pod Piotrkowem.

Piszcie do nas!

Zarząd Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej