Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Oczywiście, nikogo nie zdziwi, że równania kwadratowe

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{czy} \quad 5x^2 - 54x + 144 = 0,$$

mimo że mają piękne „delty”, równe odpowiednio 25 i 36, rozwiązywane w liczbach naturalnych mają tylko po jednym pierwiastku. Jednak zwyczaj sprawdzania, czy uzyskane rozwiązania faktycznie pasują do rozwiązywanego zadania, nie jest zbyt rozpowszechniony.

Oto dwa przykłady, gdzie sprawdzenie takie nie jest wcale łatwe.

Ile jest parkietów?

Parkiet to tutaj pokrycie płaszczyzny nienakrywającymi się wielokątami foremnymi, które jest *normalne* (czyli stykają się one całymi bokami) i *regularne* (to znaczy w każdym wierzchołku zbiega się tyle samo tak samo ułożonych wielokątów).

Jeśli w każdym wierzchołku zbiega się n wielokątów, mających odpowiednio $k_1, \ldots, k_n$ boków, to spełniona jest równość

$$\frac{k_1 - 2}{k_1} \cdot 180^\circ + \ldots + \frac{k_n - 2}{k_n} \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

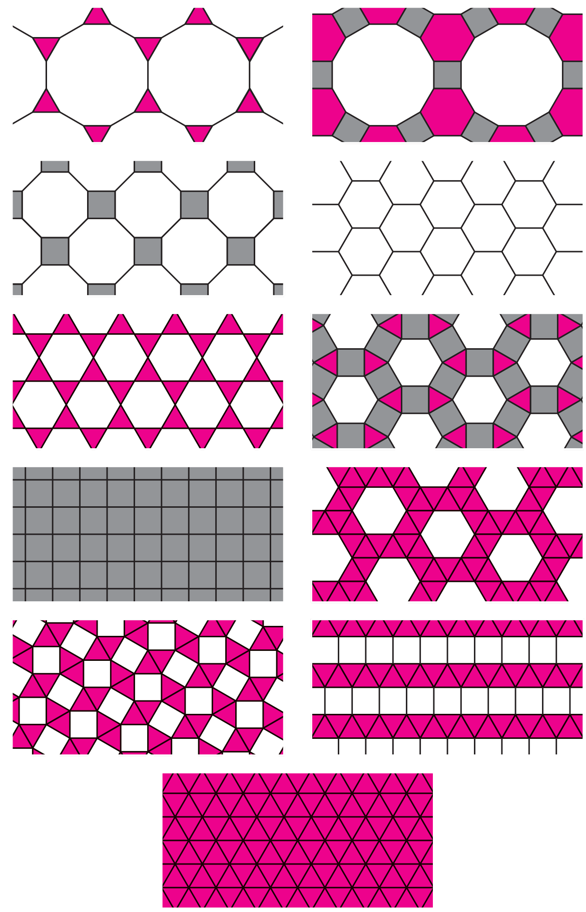
czyli

$$\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \frac{n-2}{2},$$

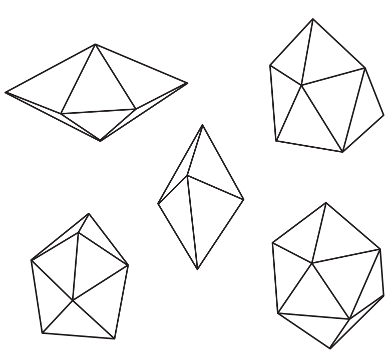
i to równanie należy (dla każdego n) rozwiązać w liczbach całkowitych większych od 2.

Równanie to jest jednak „za dobre”. Nie ma parkietu, w którego wierzchołkach zbiegałoby się więcej niż sześć wielokątów foremnych, bo już nawet $7 \cdot (1/3)$ jest mniejsze od $5/2$, a dla większych n jest jeszcze gorzej. Rozwiązania mogą być tylko dla n równego 3, 4, 5 lub 6. Ale nie na tym koniec. Gdy już znajdziemy te rozwiązania (jak?), okaże się, że na siedemnaście, a mianowicie $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$, $(3,12,12)$, $(4,5,20)$, $(4,6,12)$, $(4,8,8)$, $(5,5,10)$, $(6,6,6)$, $(3,3,4,12)$, $(3,3,6,6)$, $(3,4,4,6)$, $(4,4,4,4)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$, $(3,3,3,3,3,3)$, tylko dziesięciu odpowiadają rozwiązania (to te na rysunkach obok), a jest ich… jedenaście!

Jak widać, rachunki rachunkami, ale do rozwiązania zadania potrzebne jest coś jeszcze.



Wielościany z trójkątów równobocznych



Gdy chcemy obliczyć, ile jest wypukłych wielościanów o ścianach będących trójkątami równobocznymi, możemy skorzystać z zależności między liczbą ich wierzchołków w, krawędzi k i ścian s: oznaczmy w_n liczbę wierzchołków, w których zbiega się n ścian – wtedy

$$w = w_3 + w_4 + w_5,\ 2k = 3s = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5 \text{ i, naturalnie, } w - k + s = 2,$$

co razem daje

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12,$$

a to równanie ma aż 19 rozwiązań, wśród których zaledwie 8 (wyróżnionych) $\mathbf{(0,0,12)}$, $(0,1,10)$, $\mathbf{(0,2,8)}$, $\mathbf{(0,3,6)}$, $\mathbf{(0,4,4)}$, $\mathbf{(0,5,2)}$, $\mathbf{(0,6,0)}$, $(1,0,9)$, $(1,1,7)$, $(1,2,5)$, $(1,3,3)$, $(1,4,1)$, $(2,0,6)$, $(2,1,4)$, $(2,2,2)$, $\mathbf{(2,3,0)}$, $(3,0,3)$, $(3,1,1)$, $\mathbf{(4,0,0)}$ odpowiada jakimś wielościanom wypukłym. Dowód, że więcej nie ma, jest dość zawiły – orientacyjne rysunki pięciu z tych wielościanów są obok (pozostałe to czworościan, ośmiościan i dwudziestościan).

Jeszcze raz zachęcamy – piszcie do nas o swoich doświadczeniach.

Zarząd Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej