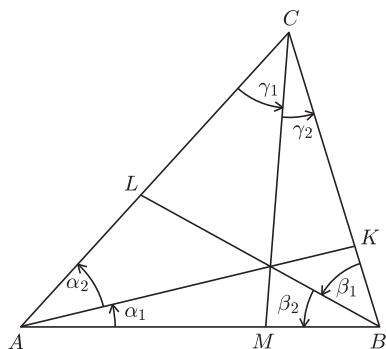


Rys. 1

Na najnowszym plakacie SEM widnieje dwanaście konfiguracji geometrycznych, których wspólną cechą jest to, że narysowane czerwone proste przecinają się w jednym punkcie (zob. okładka). W niniejszym tekście proponujemy cztery metody, które można wykorzystać do dowodu tej własności, jak również wskazówki ułatwiające ich zastosowanie.

- Rozwiązując zadania, których ilustrację stanowi pierwszy wiersz plakatu, warto pamiętać o tym, **kiedy na czworokącie wypukłym można opisać okrąg**.

Spójrzmy na środkowy z rysunków pierwszego wiersza plakatu (i również na rysunek 1). Aby wykazać, że proste  $MD$ ,  $BK$  i  $CL$  przecinają się w jednym punkcie, należy zauważyć, iż punkt  $P$ , w którym przecinają się proste  $MD$  i  $BK$ , leży jednocześnie na okręgu opisanym na kwadracie  $ABCD$  oraz na okręgu opisanym na kwadracie  $AKLM$ . Wówczas  $\sphericalangle LPM = \sphericalangle LAM = 45^\circ$  (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku). Podobnie  $\sphericalangle DPC = \sphericalangle DAC = 45^\circ$ . Stąd  $\sphericalangle LPM = \sphericalangle DPC$ , czyli punkty  $L, P, C$  są współliniowe.

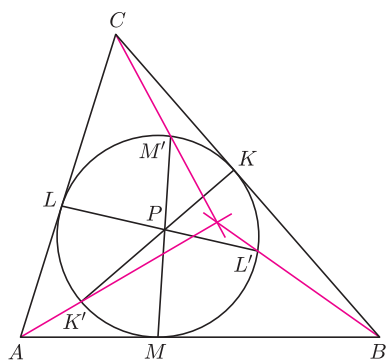


Rys. 2

- W kolejnych trzech zadaniach przydaje się **trygonometryczna wersja twierdzenia Cevy**, w której klasyczny warunek dotyczący długości wektorów jest zastąpiony przez warunek wiążący sinusy pewnych kątów: *jeśli w trójkącie  $ABC$  punkty  $K, L, M$  leżą odpowiednio na prostych  $BC, CA$  i  $AB$ , to proste  $AK, BL$  i  $CM$  przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1,$$

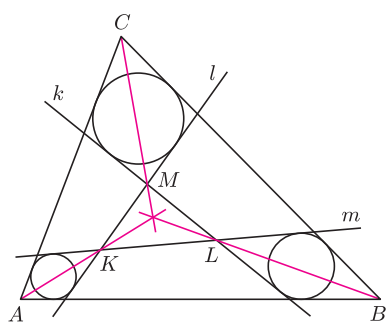
gdzie kąty  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  są kątami skierowanymi odpowiednio między półprostymi  $AB$  i  $AK, AK$  i  $AC, BC$  i  $BL, BL$  i  $BA, CA$  i  $CM$  oraz  $CM$  i  $CB$  (rys. 2).



Rys. 3.  $K, L, M$  to punkty styczności,  $P$  – obrany dowolnie.

Spójrzmy teraz na środkowy rysunek drugiego wiersza plakatu (i rysunek 3). Aby wykazać, że proste  $AK', BL'$  oraz  $CM'$  przecinają się w jednym punkcie, wystarczy skorzystać z tego twierdzenia dla trójkątów  $AML, MBK, LKC, MKL$  i odpowiednio punktów  $K', L', M'$  oraz  $P$ . Tezę otrzymamy po kilku przekształceniach i uwzględnieniu równości kątów.

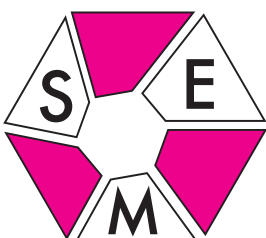
- Rozwiązanie zadań, znajdujących się na plakacie w trzecim wierszu, ułatwia następujący fakt: *jeśli dwa trójkąty mają boki odpowiednio równoległe, to można je nałożyć za pomocą **jednokładności** lub przesunięcia*.



Rys. 4.  $k, l$  i  $m$  są styczne do okręgów.

Spójrzmy na środkowy rysunek trzeciego wiersza plakatu (i rysunek 4). Przytoczony fakt wykorzystamy, aby wykazać, że proste  $AK, BL$  i  $CM$  przecinają się w jednym punkcie. W tym celu musimy znaleźć dwa trójkąty o odpowiednich bokach równoległych. Pierwszym z nich będzie trójkąt  $ABC$ . Drugi powstanie poprzez poprowadzenie stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt  $KLM$ , równoległych do boków pierwszego trójkąta. Wykorzystując jednokładności o środkach w punktach  $K, L$  i  $M$ , należy zauważyć, że każdy wierzchołek nowego trójkąta leży na jednej z interesujących nas prostych  $AK, BL$  i  $CM$ .

- Ostatnie trzy konfiguracje stanowią szczególne **przypadki twierdzenia Brianchona**: *w sześciokącie opisanym na okręgu główne przekątne przecinają się w jednym punkcie*, co ilustruje prawy rysunek ostatniego rzędu plakatu.



Powyższe twierdzenie zachodzi także, gdy kąty przy niektórych wierzchołkach sześciokąta mają miarę  $180^\circ$ . Dwa takie „zdegenerowane” przypadki – trójkąt i czworokąt – przedstawione zostały na plakacie. Narysujcie, jak będzie to wyglądało dla pięciokąta.

Joanna ZAKRZEWSKA