W tym roku szkolnym odbywa się V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG). Mamy więc mały jubileusz. I jest on udany. Rozwiązania zadań z I stopnia nadesłało 1121 uczniów, z których 622 zakwalifikowało się do zawodów II stopnia. Jest to liczba rekordowa, prawie dwa razy wyższa niż w roku ubiegłym (i we wcześniejszych edycjach). To niezwykle cieszy i pokazuje, że OMG zaistniała w gimnazjalnej świadomości. Zadania OMG, mimo że bazują na programie nauki matematyki w gimnazjum, dość znacznie swoim charakterem różnią się od typowych zadań szkolnych. Ich rozwiązanie wymaga sporej pomysłowości i oryginalności myślenia. Rosnący udział i wysoki poziom przygotowania uczestników pokazują, że jest wśród uczniów gimnazjum i wśród nauczycieli, wychowawców tych uczniów, zapotrzebowanie na podejmowanie intelektualnych wyzwań oraz poznawanie i rozwijanie swoich twórczych możliwości. Wśród zadań olimpijskich są łatwiejsze i takie, których rozwiązanie wymaga więcej wysiłku, uporu i pomysłowości. Spośród zadań I stopnia aktualnej edycji najłatwiejsze okazało się zadanie nr 3, a najtrudniejsze zadanie nr 6.

Oto te zadania.

Zadanie 3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=101 \\ ab+cd=200. \end{cases}$$

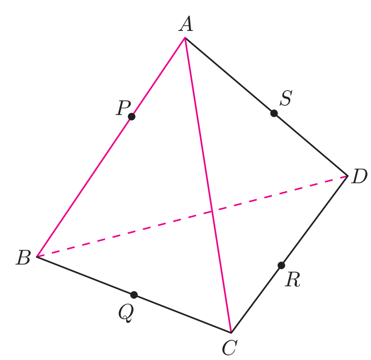
Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

Zadanie 6. Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

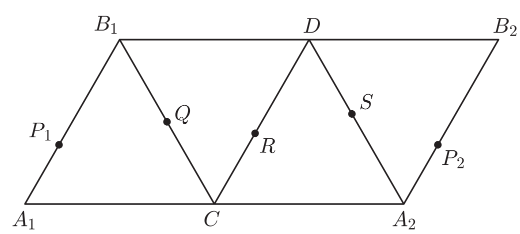
A to szkice ich rozwiązań.

Zadanie 3. Z pierwszego równania wynika, że albo dokładnie jedna, albo dokładnie trzy spośród danych liczb są nieparzyste. Jeśli nieparzystych liczb jest 3, to wtedy liczba $ab+cd$ jest nieparzysta, co przeczy drugiemu równaniu. Wobec tego wśród danych liczb jest dokładnie jedna nieparzysta.

Zadanie 6. Przekrojem czworościanu jest czworokąt, więc płaszczyzna przecięła cztery krawędzie czworościanu. Niech punkty P, Q, R, S będą położone na krawędziach czworościanu, jak na rysunku 1. Rozetnijmy kolorowe krawędzie czworościanu. Otrzymamy siatkę z rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

Czworokąt $A_1A_2B_2B_1$ jest równoległobokiem. Jeśli będziemy sklejać tę siatkę, aby otrzymać czworościan, to skleimy wierzchołki A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2. Wówczas skleją się punkty P_1 i P_2. Wobec tego czworokąt $A_1A_2P_2P_1$ jest równoległobokiem i $|P_1P_2| = |A_1A_2| = 2$.

Obwód łamanej zamkniętej $PQRSP$ (niekoniecznie płaskiej) jest równy długości łamanej P_1QRSP_2. Obwód ten będzie najmniejszy (równy 2), gdy punkty Q, R, S będą leżały na odcinku P_1P_2. Wówczas odcinki PQ i RS będą równoległe do krawędzi AC, a więc będą leżały na jednej płaszczyźnie. Taki czworokąt $PQRS$ będzie czworokątnym przekrojem o najmniejszym obwodzie.

A może ktoś znajdzie inne, ciekawsze, bardziej pomysłowe, czy też ładniejsze rozwiązania?

Więcej informacji o OMG można znaleźć na jej stronie internetowej pod adresem www.omg.edu.pl