Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
www.sem.edu.pl

Czworościan i kule

W dniu 8 stycznia 2011 roku odbyły się zawody II stopnia VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, w których uczestniczyło 669 uczniów. Spośród nich 187 zostało zakwalifikowanych do zawodów stopnia III.

W czasie zawodów II stopnia uczniowie rozwiązywali pięć zadań, a my chcielibyśmy przedstawić rozwiązania jednego z nich.

Zadanie 5 miało treść następującą:

Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$ w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.

Kluczem do rozwiązania tego zadania okazała się pewna własność czworościanu foremnego:

Wszystkie wysokości czworościanu foremnego przecinają się w jednym punkcie, a punkt ten dzieli każdą z wysokości w stosunku $3:1$, licząc od wierzchołka. Punkt ten jest jednocześnie środkiem kuli wpisanej i opisanej na czworościanie foremnym.

Dowód własności pozostawiamy Czytelnikom.

Rozwiązanie 1
Ponieważ w czworościan $ABCD$ można wpisać kulę S o środku O i promieniu 1, wysokość tego czworościanu wynosi 4 (na podstawie przytoczonej własności). Przekształćmy czworościan foremny $ABCD$ przez jednokładność względem punktu A o skali $\frac{1}{2}$. W efekcie otrzymamy czworościan $AB'C'D'$ (rysunek 1). Korzystając z własności jednokładności, wnioskujemy, że płaszczyzna $B'C'D'$ przecina wysokość AH w punkcie G w taki sposób, że $AH = \frac{1}{2}AG$, a kula S jest również styczna do płaszczyzny $B'C'D'$. Zatem kula S_1 wpisana w czworościan $AB'C'D'$ ma promień $\frac{1}{2}$ i ma tylko jeden punkt wspólny z kulą S.

Analogicznie pokazujemy, że istnieją cztery kule o promieniu $\frac{1}{2}$ umieszczone w każdym „rogu" czworościanu $ABCD$. Każda z tych kul ma tylko jeden punkt wspólny z kulą S. Ponieważ kula S ma promień 1, więc można umieścić w niej dwie kule o promieniu $\frac{1}{2}$, które mają tylko jeden punkt wspólny.

Zatem otrzymaliśmy sześć kul, które spełniają warunki zadania.

Rozwiązanie 2
Niech $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ będą odpowiednio środkami krawędzi AB, BC, CD, DA, CA, BD. Przekształćmy kulę S i czworościan $ABCD$ przez
a) jednokładność o środku A_1 i skali $\frac{1}{2}$,
b) jednokładność o środku C_1 i skali $\frac{1}{2}$.

Efektem tych przekształceń będą dwa czworościany (rysunek 2), które mają tylko jeden punkt wspólny – jest to środek kuli S. Zatem kule wpisane w te czworościany nie mają punktów wspólnych.

Przekształćmy teraz kulę S przez
a) jednokładność o środku A_1 i skali $\frac{1}{2}$,
b) jednokładność o środku E_1 i skali $\frac{1}{2}$.

Obrazami środka kuli S będą środki kul o promieniach $\frac{1}{2}$ znajdujące się w połowie odcinków OA_1 i OE_1. Wykażemy teraz, że kule te nie mają punktów wspólnych.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyliczamy, że czworościan foremny o wysokości 4 ma krawędź długości $2\sqrt{6}$. Zatem odległość punktów A_1 i E_1 wynosi $\sqrt{6}$. Środki boków OA_1 i OE_1 w trójkącie OA_1E_1 pozostają w odległości $\frac{\sqrt{6}}{2}$, która jest większa od 1.

Zatem we wnętrzu czworościanu $ABCD$ można umieścić sześć kul: każda z nich jest obrazem kuli wpisanej w czworościan $ABCD$ w jednokładności o skali $\frac{1}{2}$ i środku będącym środkiem krawędzi czworościanu.

Nasuwa się pytanie, czy we wnętrzu podanego czworościanu $ABCD$ dałoby się zmieścić więcej kul.

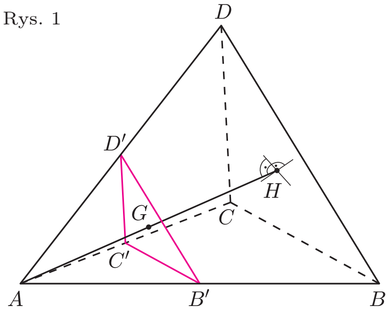
Okazuje się, że 4 kule umieszczone w narożach czworościanu jak w rozwiązaniu 1 oraz 6 kul z rozwiązania 2 nie mają punktów wspólnych. Łatwo zauważyć, że środki dwóch sąsiednich kul są środkami boków AO i A_1O w trójkącie AOA_1, a ich odległość jest równa $\frac{\sqrt{6}}{2}$, czyli jest większa od 1.

Zadanie z rozmieszczeniem 10 kul można również rozwiązać przez obliczenie wysokości czworościanu „opisanego" na piramidzie złożonej z 10 kul (rysunek 3). Wystarczy zauważyć, że czworościan „opisany" na piramidzie jest obrazem czworościanu o krawędzi 2, którego wierzchołkami są środki czterech narożnych kul, w jednokładności o środku w punkcie przecięcia wysokości każdego z czworościanów. Wysokość takiego czworościanu wynosi $\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$ i jest mniejsza od 4, czyli czworościan ten mieści się w czworościanie opisanym w treści zadania.

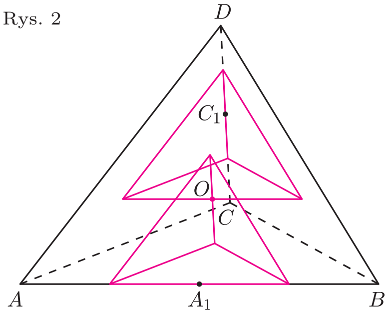
Zadanie z rozmieszczeniem 6 kul rozwiązało niewielu uczestników II etapu OMG. Można podejrzewać, że z rozwiązaniem zadania w wersji trudniejszej – o 10 kulach – poradziłoby sobie więcej osób, bo ustawienie tych kul w piramidę jest pomysłem naturalnym.

Jacek DYMEL, Michał NIEDŹWIEDŹ

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3