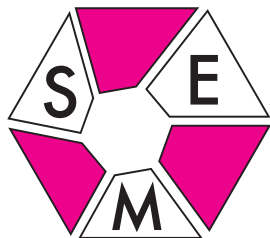


Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



W dniu 19 marca 2011 roku w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie przy ulicy Grzegorzewskiej 10 odbył się finał VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W czasie trzech godzin uczestnicy zawodów zmagali się z pięcioma zadaniami finałowymi, z których jedno (naszym zdaniem najtrudniejsze) omawiamy poniżej.

Zadanie 5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$

Większość poprawnych rozwiązań tego zadania była podobna do rozwiązania zaproponowanego przez Komitet Główny OMG.

Rozwiązanie firmowe. Niech P i Q będą końcami dowolnej średnicy rozważanego koła. Wtedy dla dowolnego punktu X płaszczyzny mamy $PX + XQ \geq PQ = 2$. Nierówność ta jest tzw. nierównością trójkąta dla trójki punktów P, Q i X . Więc dla $i = 1, 2, \dots, 100$ otrzymujemy $PA_i + QA_i \geq 2$. Dodając te nierówności stronami, wnioskujemy, że

$$(PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100}) + (QA_1 + QA_2 + \dots + QA_{100}) \geq 200.$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że co najmniej jeden z punktów P lub Q spełnia warunki zadania.

Uczestnicy zawodów znaleźli kilka innych rozwiązań tego zadania. Chcielibyśmy przedstawić jedno z nich. Rozwiązanie to opiera się na definicji środka ciężkości układu punktów materialnych. Załóżmy, że w punktach A_1, A_2, \dots, A_n umieszczono masy m_1, m_2, \dots, m_n . Oznaczmy przez m masę całego układu punktów $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ oraz przez O środek kartezjańskiego układu współrzędnych. Wtedy środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych nazywamy taki punkt S , że

$$\vec{OS} = \frac{m_1}{m}\vec{OA_1} + \frac{m_2}{m}\vec{OA_2} + \dots + \frac{m_n}{m}\vec{OA_n}.$$

Nietrudno zauważyć, że wtedy dla dowolnego punktu P zachodzi

$$\vec{PS} = \frac{m_1}{m}\vec{PA_1} + \frac{m_2}{m}\vec{PA_2} + \dots + \frac{m_n}{m}\vec{PA_n}.$$

Rozwiązanie z wykorzystaniem środka ciężkości. Niech środek układu współrzędnych O znajduje się w środku rozważanego koła. W każdym z punktów A_1, A_2, \dots, A_{100} umieszczamy masę 1. Niech S będzie środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych. Zauważamy, że S jest punktem wewnętrznym koła, gdyż z nierówności trójkąta mamy $OS \leq \frac{1}{100}(OA_1 + OA_2 + \dots + OA_{100}) < 1$. Niech P będzie dowolnym punktem z brzegu rozważanego koła. Wtedy z definicji S mamy $100\vec{PS} = \vec{PA_1} + \vec{PA_2} + \dots + \vec{PA_{100}}$. Ponownie korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100PS.$$

Wystarczy więc tak wybrać punkt P , aby $PS \geq 1$, co zawsze jest możliwe (patrz rysunek).

* * *

W trakcie trwania zawodów finałowych VI OMG, o godzinie 11.00 w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie odbyło się Pierwsze Walne Zgromadzenie Delegatów Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej. Obecnych było 19 delegatów, co stanowi około 80% wszystkich wybranych delegatów.

Walne Zgromadzenie Delegatów SEM jednogłośnie przyjęło sprawozdanie z działalności Zarządu SEM oraz sprawozdanie z działalności Komisji Rewizyjnej SEM za ostatni rok sprawozdawczy.

W czasie dyskusji programowej poruszono dwa ważne tematy. Pierwszy to stworzenie internetowej bazy danych członków SEM ułatwiającej komunikację pomiędzy członkami. Drugim była organizacja czwartej konferencji SEM.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Andrzej FRYSZKOWSKI

