O dwóch metodach rozwiązywania zadań

Wojciech Guzicki

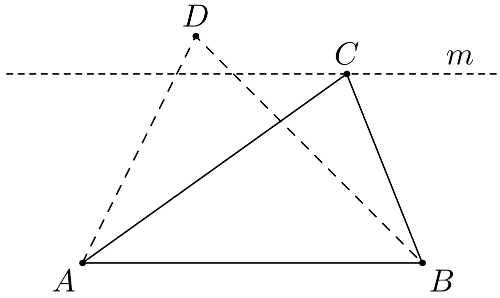
Wiele zadań matematycznych można rozwiązać za pomocą podobnych metod. W tym wykładzie zostaną omówione dwie metody rozwiązywania zadań. Pierwsza z nich – metoda ekstremum – polega na tym, że w rozwiązaniu wybieramy obiekt najmniejszy lub największy pod pewnym względem, a następnie, analizując jego własności, dochodzimy do rozwiązania. Ta metoda ma więc charakter matematyczny. Druga metoda, będąca raczej tzw. dyrektywą heurystyczną, pokazuje pewną ogólną strategię postępowania przy rozwiązywaniu zadań. Strategia, która będzie tu omówiona, polega na tym, że rozwiązanie zadania rozpoczynamy od przeanalizowania szeregu przykładów, dostrzeżenia pewnych prawidłowości występujących w tych przykładach i sformułowania hipotezy. Postawienie trafnej hipotezy, którą musimy udowodnić już w tradycyjny sposób, znacznie przybliża nas do rozwiązania.

Pierwszą z omawianych w tym wykładzie metod rozwiązywania zadań matematycznych jest tzw. metoda ekstremum. Polega ona na tym, że w rozważanej sytuacji wybieramy obiekt największy (lub najmniejszy) pod pewnym względem. Następnie analizujemy własności tego wybranego obiektu; ta analiza doprowadza nas do rozwiązania. Bardzo często (będzie tak w wielu przykładach, które wskażemy) przyjmujemy, że teza dowodzonego twierdzenia nie jest prawdziwa i doprowadzamy do sprzeczności wskazując obiekt większy (ew. mniejszy) od wybranego.

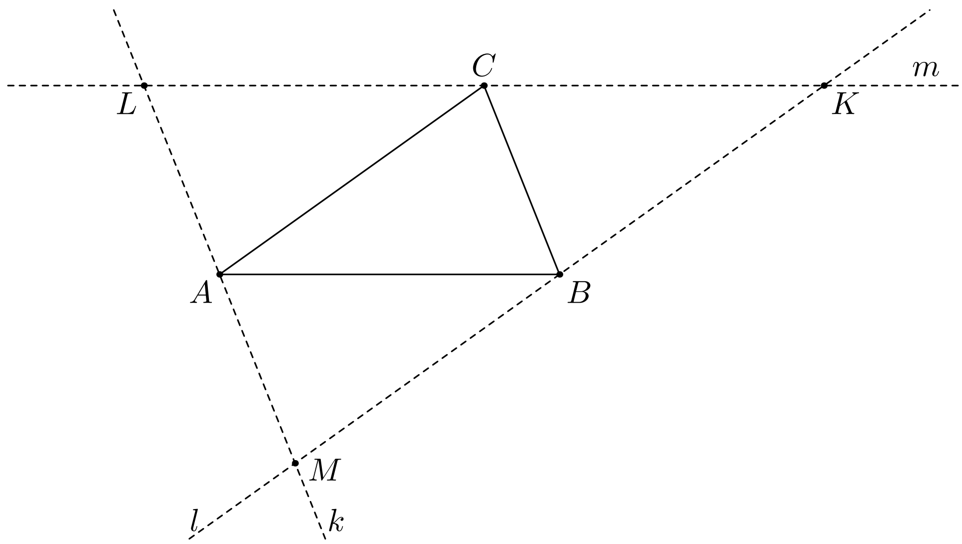
W rozwiązaniu zadania metodą ekstremum podstawowym problemem jest kwestia istnienia obiektu największego lub najmniejszego. Na ogół istnienie tego obiektu będzie wynikało stąd, że istnieje tylko skończenie wiele obiektów, które rozważamy. Wszystkie niejasności najlepiej jednak wyjaśnią przykładowe zadania.

1. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy punkty są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnij, że wszystkie punkty leżą w pewnym trójkącie o polu ≤ 4.

Rozwiązanie. Rozważamy wszystkie trójkąty, których wierzchołkami są trzy z rozważanych n punktów. Oczywiście istnieje skończenie wiele takich trójkątów (z pewnością jest ich mniej niż n^3). Zatem wśród tych trójkątów istnieje trójkąt o największym polu. Niech trójkąt ABC ma zatem największe pole (jeśli istnieje kilka trójkątów o tym samym największym polu, to wybieramy którykolwiek z nich). Oczywiście $P_{ABC} \leq 1$. Przez wierzchołek C prowadzimy prostą m równoległą do prostej AB. Wtedy wszystkie punkty rozważanego zbioru leżą po tej samej stronie prostej m, co punkty A i B (z włączeniem prostej m). Przypuśćmy bowiem, że pewien punkt D leży po przeciwnej stronie prostej m.



Wówczas $P_{ABD} > P_{ABC}$, gdyż trójkąty ABC i ABD mają wspólną podstawę AB, ale wysokość trójkąta ABD jest większa od wysokości trójkąta ABC. To jednak jest sprzeczne z wyborem trójkąta ABC, którego pole miało być największe. Poprowadźmy teraz prostą k przechodzącą przez wierzchołek A i równoległą do prostej BC oraz prostą l przechodzącą przez wierzchołek B i równoległą do prostej AC. Punkty przecięcia prostych k, l i m są wierzchołkami trójkąta KLM.



Tak jak wyżej dowodzimy, że wszystkie rozważane punkty leżą po tej stronie prostej k co punkty B i C oraz po tej samej stronie prostej l co punkty A i C (z włączeniem tych prostych). Inaczej mówiąc, wszystkie te punkty leżą w trójkącie KLM (w jego wnętrzu lub na brzegu). Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że

$$\triangle ABC \equiv \triangle KBC \equiv \triangle CAL \equiv \triangle BMA,$$

skąd wynika, że $P_{KLM} = 4 \cdot P_{ABC} \leq 4$, c. b. b. o.

2. (I OMG) W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n \geq 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

Rozwiązanie. To zadanie, pochodzące z pierwszej Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, rozwiążemy trzema sposobami. Dwa pierwsze wykorzystują metodę ekstremum.

Sposób I. Wybieramy punkt A, z którego wychodzi najwięcej odcinków jednego koloru. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że z punktu A wychodzi k odcinków czerwonych oraz że z żadnego punktu nie wychodzi więcej niż k odcinków tego samego koloru. Niech S będzie zbiorem punktów połączonych czerwonym odcinkiem z punktem A. Jeśli S jest zbiorem wszystkich pozostałych punktów, to każde dwa punkty można połączyć albo odcinkiem czerwonym, albo łamaną złożoną z dwóch odcinków czerwonych: z jednego z tych punktów do punktu A i następnie z punktu A do drugiego z tych punktów. Przypuśćmy zatem, że istnieje punkt $B \notin S$. Oczywiście odcinek AB jest niebieski. Pokażemy, że w zbiorze S istnieje punkt C połączony z punktem B odcinkem czerwonym. Wtedy punkty A i B będą połączone łamaną ACB złożoną z dwóch odcinków czerwonych. Zatem każdy punkt będzie połączony z punktem A albo odcinkiem czerwonym, albo łamaną złożoną z dwóch odcinków czerwonych. Stąd tak jak wyżej wynika, że każde dwa punkty są połączone łamaną złożoną z co najwyżej czterech odcinków czerwonych.

Przypuśćmy zatem, że taki punkt C nie istnieje. Punkt B jest zatem połączony odcinkiem niebieskim z punktem A oraz z każdym punktem zbioru C. A więc z punktu B wychodzi co najmniej $k+1$ odcinków niebieskich. To jednak jest sprzeczne z wyborem punktu A. Ta sprzeczność kończy rozwiązanie.

Sposób II. Wybieramy punkt A, który jest połączony z największą liczbą punktów łamaną złożoną z odcinków (lub tylko z jednego odcinka) jednego koloru. Dokładniej, dla każdego punktu P rozważamy dwa zbiory: zbiór C_P punktów połączonych z punktem P łamaną złożoną z odcinków czerwonych oraz zbiór N_P punktów połączonych z punktem P łamaną złożoną z odcinków niebieskich. Niech c_P oznacza liczbę punktów w zbiorze C_P i n_P liczbę punktów w zbiorze N_P. Niech wreszcie m_P będzie większą z liczb c_P i n_P.

Wybieramy ten punkt A, dla którego liczba m_A jest największa (taki punkt A istnieje, bo mamy tylko n punktów, a wśród n liczb naturalnych istnieje liczba największa).

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że punkt A jest połączony z k punktami łamaną złożoną z odcinków koloru czerwonego i żaden punkt nie jest połączony z większą liczbą punktów łamaną złożoną z odcinków ustalonego koloru. Jeśli $k=n-1$, to znaczy, że punkt A jest połączony ze wszystkimi punktami łamaną koloru czerwonego i stąd łatwo wynika, że każde dwa punkty są połączone łamaną koloru czerwonego.

Przypuśćmy zatem, że $k<n-1$, tzn. istnieje punkt B, który nie jest połączony z punktem A łamaną koloru czerwonego. Niech S będzie zbiorem punktów połączonych z punktem A łamaną koloru czerwonego. Oczywiście odcinek AB jest niebieski. Ponadto dla dowolnego punktu $C \in S$ odcinek BC też jest niebieski; w przeciwnym razie punkt A byłby połączony z punktem B łamaną czerwoną. Zatem z punktu B wychodzi co najmniej $k+1$ odcinków niebieskich (k odcinków do punktów zbioru S oraz odcinek AB), co jest sprzeczne z wyborem punktu A. Ta sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III. Ten sposób nie wymaga metody ekstremum. Wybierzmy dowolny punkt A. Niech S będzie zbiorem punktów połączonych z punktem A łamaną złożoną z odcinków (lub tylko z jednego odcinka) czerwonych. Jeśli do zbioru S należą wszystkie pozostałe punkty, to każde dwa punkty są połączone łamaną czerwoną. Przypuśćmy zatem, że istnieje punkt $B \notin S$. Oczywiście odcinek AB jest niebieski. Pokażemy, że każde dwa punkty można połączyć łamaną koloru niebieskiego.

Zauważmy najpierw, że jeśli $C \in S$, to odcinek BC jest niebieski. W przeciwnym razie punkt A byłby połączony z punktem B łamaną koloru czerwonego. Stąd wynika, że jeśli $C \in S$, to punkty A i C można połączyć łamaną ABC koloru niebieskiego. Jeśli zaś $C \notin S$, to oczywiście odcinek AC jest niebieski. Ponieważ każdy punkt jest połączony z punktem A łamaną niebieską, więc dowolne dwa punkty można połączyć łamaną tego koloru.

3. (II OMG) W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Rozwiązanie. Wybieramy punkt A, z którego wychodzi najwięcej narysowanych odcinków. Pokażemy najpierw, że z punktu A wychodzą co najmniej 4 odcinki. Przypuśćmy więc, że jest inaczej. Z każdego punktu wychodzą zatem co najwyżej 3 odcinki. Ponieważ mamy 6 punktów, więc łącznie mamy co najwyżej $6 \cdot 3 = 18$ końców tych odcinków, a więc mamy co najwyżej 9 narysowanych odcinków. To jednak jest sprzeczne z założeniem.

Z punktu A wychodzą zatem co najmniej 4 odcinki: AB, AC, AD i AE. Teraz zauważamy, że 6 punktów można połączyć dokładnie $\binom{6}{2} = 15$ odcinkami. Zatem wśród 6 odcinków BC, BD, BE, CD, CE i DE narysowano co najmniej jeden. Końce tego odcinka wraz z punktem A są wierzchołkami narysowanego trójkąta, c. b. d. o.

4. (II OMG) Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie jest możliwe. Niech a będzie największą spośród liczb przyporządkowanych wierzchołkom. Niech b i c będą liczbami przyporządkowanymi wierzchołkom sąsiednim, przy czym $b \geq c$. Ponieważ $c > 0$, więc $a = b - c < b$, co jest sprzeczne z wyborem punktu a. Ta sprzeczność dowodzi, że przyporządkowanie spełniające warunki zadania nie jest możliwe.

5. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

Rozwiązanie. Wybieramy miasto A, z którego wychodzi najwięcej bezpośrednich dróg do innych miast. Niech S będzie zbiorem wszystkich miast, do których można dojechać z miasta A bezpośrednią drogą. Jeśli każde miasto (oprócz A) należy do zbioru S, to A jest szukanym miastem. W przeciwnym razie bierzemy dowolne miasto $B \notin S$. Oczywiście z miasta B wychodzi bezpośrednia droga do miasta A. Pokażemy, że w zbiorze S istnieje miasto C, z którego prowadzi bezpośrednia droga do B (a więc z miasta A można dojechać do B przez miasto C). Gdyby bowiem tak nie było, to z miasta B prowadziłaby bezpośrednia droga do każdego miasta ze zbioru S oraz do miasta A, czyli co najmniej o jedną drogę więcej niż z miasta A. To jednak przeczy temu, że z miasta A wychodzi najwięcej dróg. Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Uwaga. Zauważmy, że rozwiązanie tego zadania jest bardzo podobne do sposobu I rozwiązania zadania 2.

6. (XXXVII OM) W turnieju uczestniczy $2n$ graczy; każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów nie przekracza n^2.

Rozwiązanie. Wybieramy gracza A, który rozegrał najwięcej gier. Niech k będzie liczbą gier rozegranych przez gracza A i niech S będzie zbiorem graczy, z którymi gracz A grał. Niech T będzie zbiorem tych graczy, z którymi gracz A nie grał. Oczywiście zbiór T ma $2n-k-1$ elementów. Zauważmy, że gracze ze bioru S nie grali ze sobą. Gdyby bowiem gracze $B,C \in S$ grali ze sobą, to razem z graczem A tworzyliby trójkę graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze. Zatem w każdym meczu musiał uczestniczyć gracz A lub któryś z graczy ze zbioru T. Każdy z tych graczy rozegrał jednak co najwyżej k gier. Zatem liczba wszystkich gier jest nie większa od $k+(2n-k-1)\cdot k$ i musimy udowodnić nierówność

$$k+(2n-k-1)\cdot k \le n^2.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny.

$$k+2nk-k^2-k \le n^2,$$

$$2nk-k^2 \le n^2,$$

$$0 \le n^2-2nk+k^2,$$

$$0 \le (n-k)^2.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód twierdzenia.

7. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych szkołach razem co najmniej $n+1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

Rozwiązanie. Wybieramy ucznia mającego największą liczbę znajomych w jednej z pozostałych szkół. Przypuśćmy, że tym uczniem jest uczeń A ze szkoły S_1. Zakładamy, że w szkole S_2 zna on k uczniów, przy czym liczba k jest wspomnianą największą liczbą znajomych. Ponieważ uczeń A nie może znać $n+1$ uczniów w szkole S_2, więc zna co najmniej jednego ucznia w szkole S_3; niech tym uczniem będzie B. Uczeń B zna co najwyżej k osób w szkole S_1, a więc zna co najmniej $n+1-k$ uczniów w szkole S_2. Gdyby znajomi uczniów A i B w szkole S_2 tworzyli dwa zbiory rozłączne, to szkoła S_2 musiałaby mieć co najmniej $k+n+1-k=n+1$ uczniów, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem w szkole S_2 istnieje uczeń znający zarówno A jak i B; wraz z uczniami A i B tworzy szukaną trójkę uczniów.

8. (XLI OM) W pewnym turnieju uczestniczyło n zawodników. Każdy z nich rozegrał jedną partię z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Udowodnij, że albo można podzielić uczestników turnieju na takie dwie grupy A i B, że każdy zawodnik z grupy A wygrał z każdym zawodnikiem z grupy B, albo można ustawić uczestników w ciąg $u_1,u_2,\ldots,u_n$ tak, że u_1 wygrał z u_2, u_2 wygrał z u_3, $\ldots$, u_{n-1} wygrał z u_n, u_n wygrał z u_1.

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenie: $u\to v$ oznacza, że zawodnik u wygrał z zawodnikiem v. Następnie **cyklem** długości m nazwiemy ciąg $u_1,u_2,\ldots,u_m$ zawodników o tej własności, że

$$u_1\to u_2\to\ldots\to u_{n-1}\to u_m\to u_1.$$

Rozpatrujemy teraz następujące przypadki.

Przypadek 1. Nie istnieje żaden cykl długości $m>1$. Udowodnimy, że wtedy istnieje zawodnik u, który wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami. Niech bowiem u będzie zawodnikiem, który wygrał największą liczbę partii. Jeśli zawodnik u nie wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami, to istnieje zawodnik v, który wygrał z u: $v\to u$. Niech teraz w będzie dowolnym zawodnikiem, z którym u wygrał: $u\to w$. Gdyby w wygrał z v, to mielibyśmy cykl długości 3: $v\to u\to w\to v$. Zatem v wygrał z w.

Pokazaliśmy zatem, że zawodnik v wygrał ze wszystkimi zawodnikami, z którymi wygrał u oraz wygrał też z samym u. Zatem zawodnik v wygrał więcej partii niż zawodnik u, co jest sprzeczne z założeniem, że u wygrał najwięcej partii. Ta sprzeczność wynikła z przypuszczenia, że zawodnik u nie wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami. Pokazaliśmy w ten sposób, że zawodnik u rzeczywiście wygrał ze wszystkimi zawodnikami. Szukany podział zbioru zawodników na dwie grupy otrzymujemy biorąc grupę A składającą się tylko z zawodnika u i grupę B składającą się z pozostałych zawodników.

Przypadek 2. Istnieje cykl długości n. Wtedy wszystkich zawodników można ustawić w ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, że

$$u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n \to u_1.$$

Przypadek 3. Istnieją cykle długości $m > 1$, ale nie istnieje cykl długości n. Niech wtedy

$$u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_m \to u_1$$

będzie najdłuższym cyklem. Oczywiście $m < n$. Niech v będzie zawodnikiem, który nie występuje w tym cyklu. Przypuśćmy, że $u_1 \to v$. Gdyby $v \to u_2$, to otrzymalibyśmy dłuższy cykl:

$$u_1 \to v \to u_2 \to \ldots \to u_n \to u_1.$$

Zatem $u_2 \to v$. Gdyby $v \to u_3$, to znów mielibyśmy dłuższy cykl:

$$u_1 \to u_2 \to v \to u_3 \to \ldots \to u_n \to u_1.$$

Zatem $u_3 \to v$. W podobny sposób pokazujemy kolejno, że każdy zawodnik z cyklu wygrał z v. W taki sam sposób pokazujemy, że jeśli $v \to u_1$, to zawodnik v wygrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu.

Definiujemy teraz dwa zbiory zawodników:

$$A_0 = \{v:\ v \to u_1\}, \quad B_0 = \{v:\ u_1 \to v\}.$$

Każdy zawodnik ze zbioru A_0 wygrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu, a każdy zawodnik ze zbioru B_0 przegrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu. Pokażemy następnie, że każdy zawodnik ze zbioru A_0 wygrał z każdym zawodnikiem ze zbioru B_0. Niech bowiem $u \in A_0$ i $v \in B_0$. Gdyby $v \to u$, to mielibyśmy cykl:

$$u \to u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n \to v \to u,$$

długości większej od m. Zatem rzeczywiście $u \to v$.

Teraz wreszcie możemy zdefiniować podział na zbiory A i B. Jeśli zbiór B_0 jest niepusty, to do zbioru A zaliczamy wszystkich zawodników ze zbioru A_0 i wszystkich zawodników z cyklu, a do zbioru B zaliczamy wszystkich zawodników ze zbioru B_0. Jeśli zaś zbiór B_0 jest pusty, to przyjmujemy $A = A_0$ oraz $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

9. Na szachownicy wymiaru $n \times n$ ustawiono pewną liczbę wież w taki sposób, że jeśli pole o współrzędnych (i, j) jest wolne, to w wierszu i-tym i w kolumnie j-tej razem znajduje się co najmniej n wież. Udowodnij, że na szachownicy znajduje się co najmniej $n^2/2$ wież.

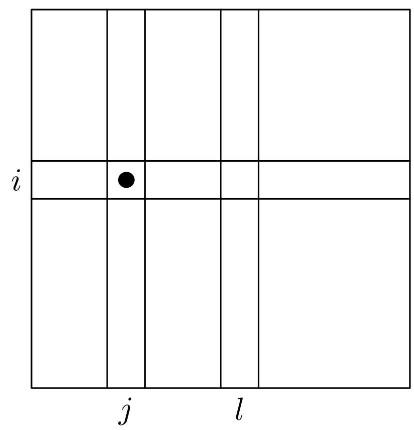
Rozwiązanie. Wybieramy rząd (tzn. wiersz lub kolumnę) z najmniejszą liczbą wież. Niech np. będzie to wiersz, w którym znajduje się k wież. To znaczy, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się co najmniej k wież. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. $k \geq \frac{n}{2}$. Wtedy w każdym wierszu znajduje się co najmniej $\frac{n}{2}$ wież. Sumując teraz liczby wież we wszystkich wierszach, przekonamy się, że na całej szachownicy znajduje się co najmniej

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

wież.

Przypadek 2. $k < \frac{n}{2}$. Załóżmy, że w wierszu i-tym znajduje się k wież. Popatrzmy na dwie przykładowe kolumny: kolumnę j-tą, w której na przecięciu z i-tym wierszem stoi wieża, oraz kolumnę l-tą, w której na przecięciu z i-tym wierszem nie ma wieży.



W kolumnie j-tej znajduje się co najmniej k wież. Takich kolumn jest dokładnie k (bo w wierszu i-tym znajduje się dokładnie k wież). Zatem w takich kolumnach znajduje się łącznie co najmniej k^2 wież.

Pole o współrzędnych (i,l) jest wolne. Z założenia wynika, że w wierszu i-tym i w kolumnie l-tej znajduje się łącznie co najmniej n wież. Ponieważ w wierszu i-tym znajduje się dokładnie k wież, więc w kolumnie l-tej znajduje się co najmniej $n-k$ wież. Takich kolumn jest dokładnie $n-k$. Zatem w takich kolumnach znajduje się łącznie $(n-k)^2$ wież.

Stąd wynika, że na całej szachownicy znajduje się łacznie co najmniej $k^2+(n-k)^2$

wieź. Musimy więc pokazać, że dla dowolnej liczby k takiej, że $1 \le k \le n$ zachodzi nierówność

$$k^2 + (n-k)^2 \ge \frac{n^2}{2}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$k^2 + (n-k)^2 \ge \frac{n^2}{2},$$

$$k^2 + n^2 - 2nk + k^2 \ge \frac{n^2}{2},$$

$$n^2 - 2nk + 2k^2 \ge \frac{n^2}{2},$$

$$2n^2 - 4nk + 4k^2 \ge n^2,$$

$$n^2 - 4nk + 4k^2 \ge 0,$$

$$(n-2k)^2 \ge 0.$$

Ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych n i k, więc dowodzona nierówność jest też prawdziwa, co kończy dowód.

10. (XLV OM) W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

Rozwiązanie. Wybieramy największą liczbę rozłącznych par znajomych:

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_m, b_m\}.$$

Jeśli $m = n$, to te pary kwaterujemy w oddzielnych pokojach. Niech więc $m < n$. Z maksymalności m wynika, że żadne dwie pozostałe osoby nie znają się. Wybieramy dwie z nich: x i y. W każdej parze $\{a_i, b_i\}$ zliczamy znajomych x i y. Jeśli w każdej parze osoby x i y znają co najwyżej 2 osoby, to mają łącznie co najwyżej $2m$ znajomych, wbrew założeniu. Istnieje zatem para, w której znają łącznie co najmniej 3 osoby. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że osoba x zna obie osoby a_i i b_i, a osoba y zna osobę a_i. Zastępując parę $\{a_i, b_i\}$ parami $\{x, b_i\}$ oraz $\{y, a_i\}$, otrzymujemy $m+1$ rozłącznych par znajomych, wbrew wyborowi liczby m. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $m = n$.

11. (XLVII OM) W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

Rozwiązanie. Wybieramy największą liczbę m taką, że istnieje zbiór $\{x_1,\ldots,x_m\}$ osób, w którym każde dwie osoby znają się. Niech P będzie zbiorem pozostałych osób i niech N_i będzie zbiorem osób, których nie zna osoba x_i dla $i=1,\ldots,m$. Wtedy zbiory $N_1,\ldots,N_m$ wyczerpują cały zbiór P oraz $|N_i|<n-1$ dla $i=1,\ldots,m$. Mamy zatem

$$kn=m+|P|\leq m+|N_1|+\ldots+|N_m|<m+m(n-1)=mn.$$

Zatem $k<m$, czyli $k+1\leq m$, co kończy dowód.

Druga metoda rozwiązywania zadań nie ma charakteru ściśle matematycznego. Jest to raczej tzw. *dyrektywa heurystyczna* polegająca na wskazaniu uczniowi ogólnej strategii prowadzącej do rozwiązania. Strategia ta polega na tym, by w odpowiednio wielu przykładach dopatrzeć się pewnej reguły ogólnej, pozwalającej na postawienie hipotezy przybliżającej nas do rozwiązania. Oczywiście wykazanie, że postawiona hipoteza jest rzeczywiście prawdziwa, nie może odwoływać się już do tych przykładów, ale musi być uzyskane ogólnie, za pomocą tradycyjnych metod dowodzenia. Zaczniemy od zadania z zawodów II stopnia XVI Olimpiady Matematycznej.

12. (XVI OM) Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie. Obliczmy $4p^2+1$ i $6p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p:

p	$4p^2+1$	$6p^2+1$
2	17	25
3	37	55
5	101	151
7	197	295
11	485	727
13	677	1015
17	1157	1735
19	1445	2167

Zauważmy, że w każdym wierszu jedna z liczb ma na końcu cyfrę 5, a więc jest podzielna przez 5. Możemy zadać naturalne pytanie, czy wynika to z tego, że liczba stojąca w pierwszej kolumnie jest pierwsza, czy ma to charakter ogólniejszy. Spróbujmy zatem obliczyć liczby $4n^2+1$ i $6n^2+1$ dla kolejnych n:

n	$4n^2+1$	$6n^2+1$	n	$4n^2+1$	$6n^2+1$
1	5	7	11	485	727
2	17	25	12	577	865
3	37	55	13	677	1015
4	65	97	14	785	1177
5	101	151	15	901	1351
6	145	217	16	1025	1537
7	197	295	17	1157	1735
8	257	385	18	1297	1945
9	325	487	19	1445	2167
10	401	601	20	1601	2401

Nasza hipoteza potwierdziła się. Sformułujmy ją zatem ogólnie:

- dla każdej liczby naturalnej n co najmniej jedna z liczb n, $4n^2+1$ i $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.

Tak sformułowaną hipotezę można udowodnić kilkoma sposobami.

Sposób I. Rozpatrujemy kilka przypadków w zależności od tego, jaka jest ostatnia cyfra liczby n.

1. Ostatnią cyfrą liczby n jest 0 lub 5. Wtedy liczba n jest podzielna przez 5.

2. Ostatnią cyfrą liczby n jest 1 lub 9. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 1, a więc ostatnią cyfrą liczby $4n^2+1$ jest 5. Liczba $4n^2+1$ jest zatem podzielna przez 5.

3. Ostatnią cyfrą liczby n jest 2 lub 8. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 4, a więc ostatnią cyfrą liczby $6n^2+1$ jest 5. Zatem liczba $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.

4. Ostatnią cyfrą liczby n jest 3 lub 7. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 9, a więc ostatnią cyfrą liczby $6n^2+1$ jest 5. Stąd wynika, że liczba $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.

5. Ostatnią cyfrą liczby n jest 4 lub 6. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 6, a więc ostatnią cyfrą liczby $4n^2+1$ jest 5 i liczba $4n^2+1$ jest podzielna przez 5.

Sposób II. Rozpatrujemy trzy przypadki w zależności od tego, jaką resztę przy dzieleniu przez 5 daje liczba n.

1. Liczba n daje resztę 0 przy dzieleniu przez 5. Wtedy n dzieli się przez 5.

2. Liczba n daje resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $n=5k+1$ lub $n=5k+4$ dla pewnej liczby naturalnej k. Stąd łatwo wynika, że $n^2=5l+1$ dla pewnej liczby całkowitej l. Zatem

$$4n^2+1=4(5l+1)+1=20l+5=5(4l+1),$$

a więc liczba $4n^2+1$ dzieli się przez 5.

3. Liczba n daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $n=5k+2$ lub $n=5k+3$ dla pewnej liczby naturalnej k. W oby przypadkach istnieje taka liczba całkowita l, że $n^2=5l+4$. Zatem

$$6n^2+1=6(5l+4)+1=30l+25=5(6l+5),$$

a więc liczba $6n^2+1$ dzieli się przez 5.

Sposób III. Rozwiązanie sposobem II można łatwo zapisać za pomocą kongruencji. Mamy znów trzy przypadki:

1. $n \equiv 0 \pmod 5$. Wtedy liczba n dzieli się przez 5.

2. $n \equiv \pm 1 \pmod 5$. Wtedy $n^2 \equiv 1 \pmod 5$, skąd wynika, że $4n^2+1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$, a więc liczba $4n^2+1$ dzieli się przez 5.

3. $n \equiv \pm 2 \pmod 5$. Wtedy $n^2 \equiv 4 \pmod 5$, skąd wynika, że $6n^2+1 \equiv 25 \equiv 0 \pmod 5$, a więc liczba $6n^2+1$ dzieli się przez 5.

Dokończenie rozwiązania jest teraz oczywiste: w każdym wierszu jedna liczba jest podzielna przez 5 i jest liczbą pierwszą. Musi to być zatem liczba 5. Jest to możliwe tylko w wierszu, w którym występują liczby 5, 101 i 151. Nietrudno sprawdzić, że 101 i 151 są rzeczywiście liczbami pierwszymi. Zatem istnieje tylko jedna liczba pierwsza p taka, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są też liczbami pierwszymi; jest nią $p=5$.

Dostrzeżenie liczby podzielnej przez 5 w każdym wierszy nie było trudne; rzucała się w oczy ostatnia cyfra 5 w drugiej i trzeciej kolumnie. Trudniej dostrzec regułę w następującym zadaniu:

13. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $8p^2+1$ jest również liczbą pierwszą.

Rozwiązanie. Obliczmy $8p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p:

p	$8p^2+1$
2	33
3	73
5	201
7	393
11	969
13	1353
17	2313
19	2889

Jeżeli dostrzeżemy, że w drugiej kolumnie wszystkie liczby, oprócz 73, są podzielne przez 3, to możemy sformułować regułę ogólną:

- dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n i $8n^2+1$ jest podzielna przez 3.

Następujące obliczenie potwierdza tę regułę:

n	$8n^2+1$	n	$8n^2+1$
1	9	11	969
2	33	12	1153
3	73	13	1353
4	129	14	1569
5	201	15	1801
6	289	16	2049
7	393	17	2313
8	513	18	2593
9	649	19	2889
10	801	20	3201

Liczby 9, 33, 3, 129, 201, 6, 393, 513, 9, 801, 969, 12, 1353, 1569, 15, 2049, 2313, 18, 2889 i 3201 są podzielne przez 3. Po sformułowaniu tej reguły możemy dokończyć rozwiązanie zadania tak jak w sposobie II lub III poprzedniego zadania. Jedyną liczbą pierwszą p spełniającą warunki zadania jest $p=3$.

Dostrzeżenie podzielności przez 3 jest wprawdzie trudniejsze niż dostrzeżenie cyfry 5 na końcu każdej z rozważanych liczb, ale mimo wszystko nie jest bardzo trudne; dysponujemy przecież bardzo prostą cechą podzielności przez 3. Podzielność przez 3 liczb 33, 201, 393 i 969 też rzuca się w oczy. Znacznie trudniej dostrzec podobną regułę wtedy, gdy nie mamy odpowiedniej cechy podzielności.

14. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $3p^2+1$, $5p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie. Obliczmy $3p^2+1$, $5p^2+1$ i $6p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p:

p	$3p^2+1$	$5p^2+1$	$6p^2+1$
2	13	21	25
3	28	46	55
5	76	126	151
7	148	246	295
11	364	606	727
13	508	846	1015
17	868	1446	1735
19	1084	1806	2167

Zauważenie tym razem, że w każdym wierszu jedna liczba jest podzielna przez 7, jest już dużo trudniejsze. Może nieco łatwiej dostrzec to wtedy, gdy przeprowadzimy podobne obliczenia dla kolejnych liczb naturalnych n:

n	$3n^2+1$	$5n^2+1$	$6n^2+1$
1	4	6	7
2	13	21	25
3	28	46	55
4	49	81	97
5	76	126	151
6	109	181	217
7	148	246	295
8	193	321	385
9	244	406	487
10	301	501	601

n	$3n^2+1$	$5n^2+1$	$6n^2+1$
11	364	606	727
12	433	721	865
13	508	846	1015
14	589	981	1177
15	676	1126	1351
16	769	1281	1537
17	868	1446	1735
18	973	1621	1945
19	1084	1806	2167
20	1201	2001	2401

Podzielność przez 7 liczb 7, 21, 28, 49 i 217 można dostrzec od razu. A potem postawienie właściwej hipotezy zależy od spostrzegawczości... Udowodnić tę hipotezę możemy tak jak w zadaniu 12.

15. (II OMG) Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające układ równań

$$\begin{cases} q = p^2 + 6 \\ r = q^2 + 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Dla kolejnych n wypiszmy liczby n, n^2+6 i $(n^2+6)^2+6$:

n	n^2+6	$(n^2+6)^2+6$	n	n^2+6	$(n^2+6)^2+6$
1	7	55	11	127	16135
2	10	106	12	150	22506
3	15	231	13	175	30631
4	22	490	14	202	40810
5	31	967	15	231	53367
6	42	1770	16	262	68650
7	55	3031	17	295	87031
8	70	4906	18	330	108906
9	87	7575	19	367	134695
10	106	11242	20	406	164842

Łatwo zauważamy, że w każdym wierszu jedna liczba dzieli się przez 5. Teraz możemy wysłowić hipotezę:

- Dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n, n^2+6 i $(n^2+6)^2+6$ jest podzielna przez 5.

Tę hipotezę można teraz łatwo udowodnić za pomocą metod opisanych w zadaniu 12. Zatem jedyną liczbą pierwszą p taką, że liczby $q=p^2+6$ i $r=q^2+6$ też są pierwsze, jest 5.

16. (XLVI OM) Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad x_n=\frac{2n-3}{2n}\cdot x_{n-1} \quad \text{dla } n=2,3,4,\ldots\ .$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$ zachodzi nierówność

$$x_1+x_2+\ldots+x_n<1.$$

Rozwiązanie. Obliczmy najpierw kilka początkowych wyrazów ciągu (x_n):

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{1}{8}, \quad x_3=\frac{1}{16}, \quad x_4=\frac{5}{128},$$
$$x_5=\frac{7}{256}, \quad x_6=\frac{21}{1024}, \quad x_7=\frac{33}{2048}, \quad x_8=\frac{429}{32768}.$$

Następnie dla kolejnych n obliczymy różnicę $1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$:

$$\begin{aligned}
1-x_1 &= \frac{1}{2},\\
1-(x_1+x_2) &= \frac{3}{8},\\
1-(x_1+x_2+x_3) &= \frac{5}{16},\\
1-(x_1+\ldots+x_4) &= \frac{35}{128},\\
1-(x_1+\ldots+x_5) &= \frac{63}{256},\\
1-(x_1+\ldots+x_6) &= \frac{231}{1024},\\
1-(x_1+\ldots+x_7) &= \frac{429}{2048},\\
1-(x_1+\ldots+x_8) &= \frac{6435}{32768}.
\end{aligned}$$

Można teraz zauważyć, że

$$\begin{aligned}
1-x_1 &= \frac{1}{2}=x_1,\\
1-(x_1+x_2) &= \frac{3}{8}=3x_2,\\
1-(x_1+x_2+x_3) &= \frac{5}{16}=5x_3,\\
1-(x_1+\ldots+x_4) &= \frac{35}{128}=7x_4,\\
1-(x_1+\ldots+x_5) &= \frac{63}{256}=9x_5,\\
1-(x_1+\ldots+x_6) &= \frac{231}{1024}=\frac{11\cdot 21}{1024}=11x_6,\\
1-(x_1+\ldots+x_7) &= \frac{429}{2048}=\frac{13\cdot 33}{2048}=13x_7,\\
1-(x_1+\ldots+x_8) &= \frac{6435}{32768}=\frac{15\cdot 429}{32768}=15x_8.
\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem postawić hipotezę ogólną:

$$1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)=(2n-1)\cdot x_n,$$

czyli

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1-(2n-1)\cdot x_n.$$

Ponieważ $x_n>0$, więc teza twierdzenia wynika natychmiast z naszej hipotezy. Udowodnimy teraz naszą hipotezę przez indukcję. Warunek początkowy sprawdziliśmy wyżej. W dowodzie kroku indukcyjnego skorzystamy z definicji ciągu:

$$x_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+2}\cdot x_n,$$

czyli

$$(2n-1)\cdot x_n=(2n+2)\cdot x_{n+1}.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}&=1-(2n-1)\cdot x_n+x_{n+1}=\\&=1-(2n+2)\cdot x_{n+1}+x_{n+1}=\\&=1-(2n+1)\cdot x_{n+1},\end{aligned}$$

c. b. d. o.

17. (LII OM) Rozpatrujemy ciągi liczb całkowitych $x_0,x_1,\ldots,x_{2000}$ spełniające warunki

$$x_0=0 \quad \text{oraz} \quad |x_n|=|x_{n-1}+1| \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots,2000.$$

Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $|x_1+x_2+\ldots+x_{2000}|$.

Rozwiązanie. Dla kolejnych liczb n wypiszmy wszystkie możliwe ciągi $x_0,x_1,\ldots,x_n$ spełniające warunki zadania. Dla każdego z tych ciągów Obliczmy także sumę $S_n=x_0+x_1+\ldots+x_n$.

Dla $n=1$ mamy dwa ciągi:

$$\begin{array}{ll}0,1 & S_1=1\\ 0,-1 & S_1=-1\end{array}$$

Dla $n=2$ mamy 3 ciągi:

$$\begin{array}{ll}0,1,2 & S_2=3\\ 0,1,-2 & S_2=-1\\ 0,-1,0 & S_2=-1\end{array}$$

Dla $n=3$ mamy 6 ciągów:

$$\begin{array}{ll}0,1,2,3 & S_3=6\\ 0,1,2,-3 & S_3=0\\ 0,1,-2,1 & S_3=0\\ 0,1,-2,-1 & S_3=-2\\ 0,-1,0,1 & S_3=0\\ 0,-1,0,-1 & S_3=-2\end{array}$$

Dla $n=4$ mamy 10 ciągów:

$0,1,2,3,4$	$S_4=10$
$0,1,2,3,-4$	$S_4=2$
$0,1,2,-3,2$	$S_4=2$
$0,1,2,-3,-2$	$S_4=-2$
$0,1,-2,1,2$	$S_4=2$
$0,1,-2,1,-2$	$S_4=-2$
$0,1,-2,-1,0$	$S_4=-2$
$0,-1,0,1,2$	$S_4=2$
$0,-1,0,1,-2$	$S_4=-2$
$0,-1,0,-1,0$	$S_4=-2$

Wreszcie dla $n=5$ mamy 20 ciągów:

$0,1,2,3,4,5$	$S_5=15$	$0,1,-2,1,-2,1$	$S_5=-1$
$0,1,2,3,4,-5$	$S_5=5$	$0,1,-2,1,-2,-1$	$S_5=-3$
$0,1,2,3,-4,3$	$S_5=5$	$0,1,-2,-1,0,1$	$S_5=-1$
$0,1,2,3,-4,-3$	$S_5=-1$	$0,1,-2,-1,0,-1$	$S_5=-3$
$0,1,2,-3,2,3$	$S_5=5$	$0,-1,0,1,2,3$	$S_5=5$
$0,1,2,-3,2,-3$	$S_5=-1$	$0,-1,0,1,2,-3$	$S_5=-1$
$0,1,2,-3,-2,1$	$S_5=-1$	$0,-1,0,1,-2,1$	$S_5=-1$
$0,1,2,-3,-2,-1$	$S_5=-3$	$0,-1,0,1,-2,-1$	$S_5=-3$
$0,1,-2,1,2,3$	$S_5=5$	$0,-1,0,-1,0,1$	$S_5=-1$
$0,1,-2,1,2,-3$	$S_5=-1$	$0,-1,0,-1,0,-1$	$S_5=-3$

Widzimy, że suma S_n zależy wyłącznie od odtatniego wyrazu ciągu. Odnalezienie tej zależności nie jest trudne, gdy narysujemy w układzie współrzędnych punkty (x_n, S_n). Okaże się, że ta zależność ma postać $S_n = \frac{1}{2}(x_n^2 + 2x_n - n)$.

Druga prawidłowość, która się rzuca w oczy to ta, że ostatnie wyrazy ciągów wyczerpują zbiór $\{-n, -n+2, -n+4, \ldots, n-2, n\}$. Udowodnienie przez indukcję tych hipotez nie jest już trudne; dokończenie rozwiązania zadania stanie się wtedy łatwym ćwiczeniem dla Czytelnika.

18. (LVIII OM) Udowodnij, że jeśli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

Rozwiązanie. Dla różnych par liczb b i c obliczmy wartość wyrażenia $b^2 + bc + c^2$, a następnie wypiszmy wszystkie możliwe rozkłady otrzymanej liczby na iloczyn liczb a i d.

Dla każdej otrzymanej w ten sposób czwórki liczb a, b, c i d obliczymy $a^2+b^2+c^2+d^2$ i wypiszemy wszystkie dzielniki tej liczby. A oto zebrane wyniki dla $b,c \leq 3$:

b,c	b^2+bc+c^2	a,d	$a^2+b^2+c^2+d^2$	dzielniki
1,1	3	1,3	12	1,2,3,4,6,12
1,2	7	1,7	55	1,5,11,55
2,2	12	1,12	153	1,3,9,17,51,153
		2,6	48	1,2,3,4,6,8,12,16,24,48
		3,4	33	1,3,11,33
1,3	13	1,13	180	1,2,3,4,5,6,9,10,18,20, 30,36,45,60,90,180
2,3	19	1,19	375	1,3,5,15,25,75,125,375
3,3	27	1,27	748	1,2,4,11,17,22,34,44,68, 187,374,748
		3,9	108	1,2,3,4,6,9,12,18,27,36, 54,108

Można teraz zaobserwować, że wśród dzielników liczby $a^2+b^2+c^2+d^2$ zawsze znajduje się liczba $a+b+c+d$. Teraz nietrudno już znaleźć rozkład

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)(a-b-c+d) &= a^2-b^2-c^2+d^2+2ad-2bc= \\ &= a^2-b^2-c^2+d^2+2(b^2+bc+c^2)-2bc= \\ &= a^2-b^2-c^2+d^2+2b^2+2bc+2c^2-2bc= \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2,\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

19. (LX OM) Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Niech $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1)$$

przez n. Znaleźć wszystkie takie wartości n, że ciąg $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1,2,3,\ldots,n-1)$.

Rozwiązanie. Wypiszmy dla kolejnych $n \geq 2$ reszty z dzielenia przez n liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1).$$

Oto te reszty:

$$\begin{aligned}
2:&\quad 1,\\
3:&\quad 1,0,\\
4:&\quad 1,3,2,\\
5:&\quad 1,3,1,0,\\
6:&\quad 1,3,0,4,3,\\
7:&\quad 1,3,6,3,1,0,\\
8:&\quad 1,3,6,2,7,5,4,\\
9:&\quad 1,3,6,1,6,3,1,0,\\
10:&\quad 1,3,6,0,5,1,8,6,5,\\
11:&\quad 1,3,6,10,4,10,6,3,1,0,\\
12:&\quad 1,3,6,10,3,9,4,0,9,7,6,\\
13:&\quad 1,3,6,10,2,8,2,10,6,3,1,0,\\
14:&\quad 1,3,6,10,1,7,0,8,3,13,10,8,7,\\
15:&\quad 1,3,6,10,0,6,13,6,0,10,6,3,1,0,\\
16:&\quad 1,3,6,10,15,5,12,4,13,7,2,14,11,9,8,\\
17:&\quad 1,3,6,10,15,4,11,2,11,4,15,10,6,3,1,0,\\
18:&\quad 1,3,6,10,15,3,10,0,9,1,12,6,1,15,12,10,9,\\
19:&\quad 1,3,6,10,15,2,9,17,7,17,9,2,15,10,6,3,1,0,\\
20:&\quad 1,3,6,10,15,1,8,16,5,15,6,18,11,5,0,16,13,11,10.
\end{aligned}$$

Dostrzegamy, że reszty te są permutacjami liczb $1,2,3,\ldots,n-1$ dla $n\in\{2,4,8,16\}$. To daje nam pierwszą hipotezę: szukanymi liczbami są potęgi liczby 2. Następnie zauważamy, że jeśli liczba n jest nieparzysta, to otrzymany ciąg reszt kończy się liczbą 0, a więc nie jest permutacją liczb niezerowych. Pozostają nam liczby parzyste nie będące potęgami dwójki. Takie liczby mają dzielnik właściwy będący liczbą pierwszą nieparzystą. Teraz można zauważyć, że jeśli liczba n jest podzielna przez nieparzystą liczbę pierwszą $p<n$, to w otrzymanym ciągu reszt jest „za dużo" liczb podzielnych przez p. Jeśli $n=pm$ to wśród liczb $1,2,3,\ldots,n-1$ jest $m-1$ liczb podzielnych przez p, natomiast wśród otrzymanych

przez nas reszt jest $2m-1$ liczb podzielnych przez p. Do rozwiązania zadania potrzebne jest więc udowodnienie trzech hipotez:

1. jeśli liczba n jest potęgą dwójki, to reszty z dzielenia przez n liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1)$$

tworzą permutację liczb $1,2,3,\ldots,n-1$ (do tego wystarczy pokazać, że są różne od zera i nie ma wśród nich dwóch jednakowych);

2. jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $1+2+3+\ldots+(n-1)$ jest podzielna przez n;

3. jeśli liczba $n=pm$, gdzie p jest nieparzystą liczbą pierwszą oraz $p<n$, to wśród liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \ldots, \quad 1+2+\ldots+(n-1)$$

znajduje się $2m-1$ liczb podzielnych przez p.

Udowodnienie tych hipotez pozostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

20. (I OMG) Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba 14^n-9 jest pierwsza.

Rozwiązanie. Przyjrzyjmy się liczbom postaci 14^n-9 dla kolejnych liczb naturalnych n:

n	14^n	14^n-9
1	14	5
2	196	187
3	2744	2735
4	38416	38407
5	537824	537815
6	7529536	7529527
7	105413504	105413495
8	1475789056	1475789047

Dostrzegamy, że ostatnimi cyframi liczb 14^n-9 są na przemian 5 i 7. Mamy więc pierwszą hipotezę:

- jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 14^n-9 dzieli się przez 5.

Nietrudno sprawdzić przez indukcję, że ta hipoteza jest prawdziwa. Popatrzmy teraz, co się dzieje dla parzystych n. Nietrudno zauważyć, że

$$14^2-9=196-9=187=11\cdot 17.$$

Trochę więcej wysiłku wymaga znalezienie rozkładu

$$14^4-9=38416-9=38407=193\cdot 199.$$

Jeśli teraz dostrzeżemy prawidłowość

$$14^2-9=11\cdot 17=(14-3)(14+3),$$
$$14^4-9=193\cdot 199=(196-3)(196+3)=(14^2-3)(14^2+3)$$

i potwierdzimy ją następnymi dwoma przykładami

$$14^6-9=7529527=2741\cdot 2747=(2744-3)(2744+3)=(14^3-3)(14^3+3),$$
$$14^8-9=1475789047=38413\cdot 38419=(38416-3)(38416+3)=(14^4-3)(14^4+3),$$

to będziemy mogli zapisać wzór ogólny:

$$14^{2n}-9=(14^n-3)(14^n+3).$$

Jest to szczególny przypadek wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Wiele osób oczywiście dostrzeże ten wzór od razu.