ZADANIA

Zad. 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$8abc \leq (a + b)(b + c)(c + a) .$$

Zad. 2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a + b + c .$$

Zad. 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2 .$$

Zad. 4. (OM Leningrad 1988) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right) \geq 64 .$$

Zad. 5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $a + b + c = 1$, zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a + 1} + \sqrt{2b + 1} + \sqrt{2c + 1} \leq \sqrt{15} .$$

Zad. 6. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzą nierówności

$$\left(\frac{n + 1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} < \prod_{i=1}^{n} i^i < \left(\frac{2n + 1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

Zad. 7. (XLI MOM, Korea Południowa, 2000). Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $a \cdot b \cdot c = 1$. Udowodnić, że

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1 .$$

Zad. 8. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P odległy od prostych BC, CA i AB odpowiednio o x, y, z. Wykazać, że

$$xyz \leq \frac{2S^2}{27R},$$

gdzie S jest polem trójkąta ABC, zaś R długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 9. Wśród prostokątów o przekątnej długości 10 wskaż ten, który ma największe pole.

Zad. 10. Wśród prostopadłościanów, w których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 12 wskaż ten, który ma największą objętość.

Zad. 11. Jak dobrać oporności trzech oporników połączonych równolegle o łącznym oporze 10 Ω, aby opór zastępczy był największy?

Zad. 12. (OM Wielka Brytania 1975) Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych równania

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2=\frac{1}{n+1}.$$

<u>Zad. 13.</u> Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases}\dfrac{64}{a}+\dfrac{81}{b}+\dfrac{100}{c} & = & 54\\ a+b+c & = & 13{,}5\end{cases}.$$

<u>Zad. 14.</u> Rozwiązać w liczbach dodatnich układ

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z} & = & 3\\ x+y+z & \leq & 12\end{cases}.$$

<u>Zad. 15.</u> (OM Bułgaria 1968) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których układ równań

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n & = & 9\\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n} & = & 1\end{cases}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla każdej znalezionej wartości n podać rozwiązanie.

Zad. 16. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{ab}\,.$$

Zad. 17. Udowodnić, ze dla dowolnych liczb rzeczywistych *a, b,* $a\geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3+b^6}{2}\geq 3ab^2-4\,.$$

Zad. 18. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a, b, c* większych od 1 zachodzi nierówność

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}\,.$$

Zad. 19. Udowodnić, że jeśli iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ jest równy 1, to

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{12})\geq 400\,.$$

Zad. 20. Udowodnij, że jeśli *a, b, c, d* są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to

$$\frac{cd}{ab}+\frac{da}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{da}\geq 4\,.$$

Zad. 21. Wśród prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i objętości 1 wskaż ten, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

Zad. 22. Wśród prostopadłościanów o polu powierzchni całkowitej 600 wskaż ten, który ma największą objętość.