Zadania zachęcające do uogólnień

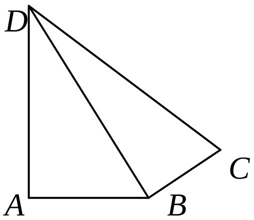
Urszula Kapała
I LO w Pleszewie

Wprowadzenie definicji lub przedstawienie dowodów twierdzeń dobrze jest poprzedzać przykładami, które pozwalają przyjrzeć się sytuacji w konkretnych przypadkach.
Po przedstawiamy dowodu jakiegoś twierdzenia znowu dobrze jest zilustrować je przykładami konkretyzujemy dane zagadnienie by w ten sposób lepiej można było zrozumieć istotę odkrytej prawidłowości. Najciekawsze i najbardziej uczące myślenia wydają się próby uogólnianie i modyfikacja dokonywane po rozwiązaniu zadania, samodzielne stawianie hipotez i ich weryfikacja.

W tym artykule przedstawię przykłady takich możliwości. Będą to propozycje uogólniań lub modyfikacji zadań, głównie z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

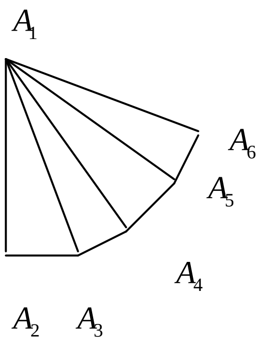
1. II OMG 3 etap zad.5
Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

Skonstruujmy ostrosłup o podstawie czworokąta *ABCD*, który jest sumą dwóch trójkątów prostokątnych tak jak na rysunku, gdzie $|\angle BAD| = 90° i |\angle CBD| = 90°$.



Niech wierzchołek *S* ostrosłupa leży tak w przestrzeni poza płaszczyzną podstawy, aby jego rzut prostokątny na tę płaszczyznę pokrywał się z punktem *D* (innymi słowy, wybieramy dowolny punkt *S* na prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez *D* i rozważamy ostrosłup *ABCD*). Wtedy trójkąty *SDA* i *SDB* są prostokątne oraz płaszczyzny zawierające te trójkąty są prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Odcinek *AB* jest prostopadły do płaszczyzny *SAD*, czyli również do każdego odcinka zawartego w tej płaszczyźnie. Stąd $|\angle SAB| = 90°$. Trójkąt *SAB* jest więc prostokątny. Analogicznie rozumując zauważamy, że trójkąt *SBC* też jest prostokątny .
Ostrosłup ten jest więc sumą dwóch ostrosłupów o podstawach będących trójkątami prostokątnymi, których wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o jednej wspólnej ścianie bocznej prostopadłej do płaszczyzny podstawy.

Teraz banalnym staje się pytanie:
Czy istnieje ostrosłup *n*-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi ?
Skonstruujmy go uogólniając poprzednie rozumowanie.
Niech podstawą ostrosłupa będzie *n*-kąt będący sumą trójkątów prostokątnych tworzonych tak jak poprzednio tzn. przyprostokątna następnego trójkąta pokrywa się z przeciwprostokątną poprzedniego tak jak na rysunku. Oznaczmy wierzchołki $A_1, A_2, A_3 ... A_n$



Trójkąty $SA_1A_2, SA_1A_3, SA_1A_4 .... SA_1A_n$ są prostokątne, gdyż odcinek SA_1 jest prostopadły do płaszczyzny podstawy. Na podstawie poprzedniego rozumowania stwierdzamy, że w ostrosłupach $A_1 A_k A_{k+1} S$ wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi.
W naszym ostrosłupie *n*- kątnym wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, gdyż powstaje on przez sklejanie tych ostrosłupów ścianami prostopadłymi do podstawy.

2. IV OMG 3 etap zad. 4

Liczby dodatnie *a*, *b* mają tę własność, że liczba $\frac{a-b}{a+b}$ jest wymierna.

Udowodnij, że liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ jest wymierna.

Liczba jest wymierna, wtedy i tylko wtedy gdy można ją zapisać w postaci ilorazu liczb całkowitych. Zatem $\frac{a-b}{a+b} = \frac{p}{q}$ gdzie $p, q \in C \wedge q \neq 0$ oraz C oznacza zbiór liczb całkowitych. Zauważmy, że ponieważ *a* i *b* są liczbami dodatnimi, $a-b<a+b$, a więc $p <q$. W efekcie $q-p$ jest różne od zera.

Teraz

$$aq - bq = pa + pb$$

$$a(q-p) = b(p+q)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p+q}{q-p}$$

Liczbę występującą w tezie można przekształcić korzystając z powyższego równości:

$$\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{2\frac{a}{b}-1}{2\frac{a}{b}+1} = \frac{2\frac{p+q}{q-p}-1}{2\frac{p+q}{q-p}+1} = \frac{3p+q}{3q+p}$$. Ponieważ $(3q+p)b=2a+b>0$. wiec $3q+p$ jest liczbą niezerową.

Liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ jest więc wymierna jako iloraz liczb całkowitych.

Nasuwa się następujące uogólnienie:

Dla dowolnych liczb dodatnich a**,** b**, takich, że** $\frac{a-b}{a+b}$ **jest liczbą wymierną**

liczba $\frac{na+mb}{ka+lb}$ **jest wymierna, gdzie** $n,m,k,l \in C \wedge ka+lb \neq 0$

Udowodnijmy to analogicznie:

$\frac{a-b}{a+b}=\frac{p}{q}$ gdzie $p,q \in C \wedge q \neq 0$

$\frac{a}{b}=\frac{p+q}{q-p}$,

Wtedy

$$\frac{na+mb}{ka+lb}=\frac{n\frac{a}{b}+m}{k\frac{a}{b}+l}=\frac{n\frac{p+q}{q-p}+m}{k\frac{p+q}{q-p}+l}=\frac{np+nq+mq-mp}{kp+kq+lq-lp}=\frac{n(p+q)-m(p-q)}{k(p+q)-l(p-q)} \in W .$$

Ponieważ $ka+lb=(k(p+q)-(p-q))b$, więc $k(a+b)-l(p-q)$ jest liczbą niezerową.

Liczba $\frac{na+mb}{ka+lb}$ jest wymierna jako iloraz liczba całkowitych.

W powyższych zadaniach uogólnienie było proste, zastosowaliśmy analogiczne rozumowania. W następnym będziemy mieć do czynienia z uogólnieniem i modyfikacją stawianego w wyjściowym zadaniu problemu.

3. IV OMG 2 etap zad 2.
Każda z liczb $x_1, x_2, ..., x_{101}$ **jest równa 1 lub –1.**
Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia:
$x_1x_2+x_2x_3+...+x_{100}x_{101}+x_{101}x_1$.

Wszystkie iloczyny występujące w rozważanym wyrażeniu są równe 1 lub –1.
Zauważmy, że gdyby wszystkie one były równe –1, to mielibyśmy
$(x_1x_2)(x_2x_3)...(x_{100}x_{101})(x_{101}x_1)=-1=(x_1x_2x_3...x_{100}x_{101})^2$,
co nie jest możliwe. Musi więc przynajmniej jeden z tych iloczynów być równy 1.
Oznacza to, że wartość ich sumy nie może być większa niż: -100+1=-99

Jest to możliwe, gdy np. $\begin{matrix} x_1=x_3=x_5=...=x_{101}=-1 \wedge \\ x_2=x_4=x_6=...=x_{100}=1 \end{matrix}$

Najmniejszą wartością wyrażenia wynosi więc –99.

Pierwsze uogólnienie jakie się nasuwa to wstawienie ***n*** **w miejsce 101.**
Jeśli ***n*** **jest parzyste to najmniejszą wartością wyrażenia jest** ***–n*****.**
Jeśli nieparzyste to ***–n*** **+2.**

Następne pytanie : Jakie są wszystkie możliwe wartości, które przyjmuje to wyrażenie ?

Uporządkujmy wartości od największej i oznaczmy przez $S_k, k \in N$:

1) $S_0 = n$. Realizacją są same jedynki w ciągu x_k (1,1,1,...,1.1)

2) $S_1 = n - 4$ - jedną jedynkę zastępujemy –1 lub zwartym ciągiem -1 wśród 1 np.
(1,-1,1,...,1,1), (1,-1,-1-1,1,1....,1)

3) $S_2 = n - 8$ - dwie –1 izolowane przez jedynki tzn. między nimi co najmniej jedna 1, nie mogą też jedna być na początku a druga na końcu (najlepiej wyobraźmy sobie, że ustawione są w kółku) lub dwie zwarte grupy –1 rozdzielone przez 1 np.
(1,-1,1,1,-1,1,1,...,1,1),(1,-1,-1,-1,1,1,....1,-1,-1-1)

……

k) $S_k = n - 2k + 2k(-1) = n - 4k$

k+1) $S_{k+1} = S_k + 2(-1) - 2 = S_k - 4$ - ponieważ dokładając izolowaną –1 lub izolowaną ich grupę dodatkowo w dwóch iloczynach pojawią się –1 i ubędą dwie jedynki.

$S_k = n - 4k, k \in \left\{0,1,...,\frac{n-1}{2}\right\}$ dla n nieparzystych i

$S_k = n - 4k, k \in \left\{0,1,...,\frac{n}{2}\right\}$ dla n parzystych

Najmniejszą wartością jest $S_{\frac{n-1}{2}} = n - 4\frac{n-1}{2} = -n + 2$ dla n nieparzystych i

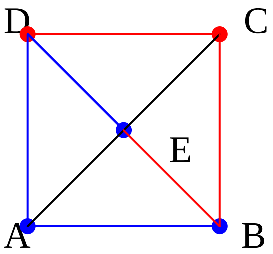
$S_{\frac{n}{2}} = n - 4\frac{n}{2} = -n$ dla n parzystych.

Końcowe k są maksymalną ilością izolowanych –1.

Niekiedy trudniej o uogólnienia. Można jednak rozważyć problem pokrewny.

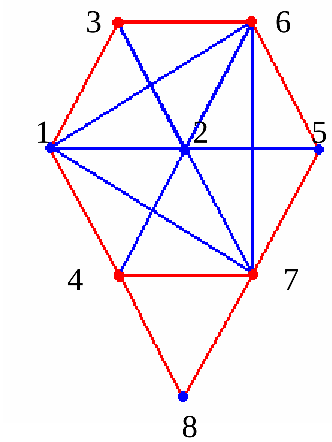
4.IV OMG 1 etap, zad 6
Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na niebiesko lub czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

Na płaszczyźnie istnieją dwa punkty tego samego koloru, oznaczmy je A i B (niech będą niebieskie).
Narysujmy kwadrat o boku AB, pozostałe wierzchołki oznaczmy przez C i D.
Punkt przecięcia przekątnych przez E. Gdyby któryś z punktów C lub D był niebieski to istnieje trójkąt o niebieskich wierzchołkach ABC lub ABD.
W przeciwnym razie punkty C i D muszą być czerwone.
Wtedy jednak niezależnie jakiego koloru jest punkt E istnieje trójkąt o wierzchołkach tego samego koloru i jest to trójkąt ABE lub CDE – rys.



Dalej można zapytać: **Czy istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są tego samego koloru?**

Przynajmniej dwa wierzchołki trójkąta są tego samego koloru. Jeśli trzy to odpowiedź na pytanie jest twierdząca.
Jeśli dwa są jednego koloru np. niebieskie to trzeci jest czerwony.
Zbuduję trójkąty równoboczne numerując kolejno kolorowane wierzchołki:



Przy takim kolejnym kolorowaniu najpóźniej trójkąt 185 jest równobocznym o wierzchołkach tego samego koloru.
Istnieje więc trójkąt równoboczny o wierzchołkach tego samego koloru.
A co z innymi trójkątami np. podobnymi do danego?

5. ZAD V OMG etap 1 zad 2
Dany jest trapez *ABCD* o podstawach *AB* i *CD*.
Wyznacz wszystkie punkty *P* leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równanie: [*PAB*]+[*PCD*]=[*PBC*]+[*PDA*] , [*XYZ*] oznacza pole trójkąta *XYZ*.

Zbiorem wszystkich punktów spełniających warunki zadania jest odcinek bez końców przechodzący przez środki przekątnych i zawarty w trapezie.

Uogólnienie – tak jest również dla czworokątów wypukłych, które nie są równoległobokami. Dla równoległoboku jest inaczej, wszystkie jego punkty wewnętrzne spełniają warunki zadania. Pozostawię to bez dowodu. Jest to zadanie z bieżącej OMG.

Nie zawsze uogólnienia są proste. Początkowe wyniki mogą być mylące, warto rozważyć więcej przypadków, a uogólnienie musi być udowodnione.
Takim zadaniem jest zadanie, które pojawiło się na Dolnośląskich Meczach Matematycznych, jeśli dobrze pamiętam w postaci:

6. Oblicz na ile obszarów rozłącznych dzielą koło cięciwy poprowadzone z 6 punktów okręgu będącego brzegiem tego koła, jeśli wiadomo, że żadne trzy z nich nie przecinają się w jednym punkcie.
Dobry rysunek daje wynik 31 i tak rozwiązał to zadanie jeden z uczniów.
Na zajęciach kółka matematycznego szukaliśmy uogólnienia, **wzoru na ilość takich obszarów w_n gdy na okręgu jest *n* punktów.**
Na podstawie rysunków stwierdziliśmy:

$w_0 = 1$

$w_1 = 1$

$w_2 = 2$

$w_3 = 4$

$w_4 = 8$

$w_5 = 16$

$w_6 = 31$

Poszukujemy uogólnienia analizując rysunki. Stwierdzamy, że każde dorysowanie cięciwy bez przejścia przez punkt przecięcia z inną cięciwą zwiększa ilość obszarów o 1, natomiast każde przejście przez punkt przecięcia do końca cięciwy lub następnego punktu przecięcia zwiększa ilość obszarów o następną jedynkę.
Stąd ponieważ na początku jest 1 obszar należy do niego dodać liczbę cięciw i liczbę punktów przecięcia tych cięciw. Liczba cięciw dana jest wzorem $\binom{n}{2}$, bo każdym dwóm różnym punktom jest przyporządkowana dokładnie 1 cięciwa i jest to przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne. Z kolei punktów przecięcia jest tyle, ile różnych podzbiorów czteroelementowych zawiera zbiór *n* punktów czyli $\binom{n}{4}$, gdyż czterem różnym punktom przyporządkowany jest wzajemnie jednoznacznie dokładnie jeden punkt przecięcia.
Otrzymujemy więc ogólnie:

$w_0 = 1$

$w_1 = 1$

$w_2 = 1 + \binom{2}{2} = 2$

$w_3 = 1 + \binom{3}{2} = 1 + 3 = 4$

$w_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ dla $n \geq 4 \wedge n \in N$

Myślę, że warto szukać zadań nadających się do uogólniania lub modyfikacji i wykorzystywać je w pracy z młodzieżą. Stopień trudności musi być jednak dobrany do zdolności i umiejętności uczniów.
Uczymy w ten sposób umiejętności stawiania i rozwiązywania problemów.

Inne propozycje zadań do samodzielnej pracy:
1) Ile pra-pra-pra-pra babć i pra-pra-pra-pra dziadków ma truteń?
2) Wieszanie firanek zawsze kojarzy mi się z zadaniem:

Jak powiesić firanki, aby odstępy między żabkami były równe (w praktyce mniej więcej) i ile żabek do tego potrzebuję? Mam okno szerokości 3m, chcę aby odległości między żabkami wynosiły co najwyżej 10 cm. Ile co najmniej żabek trzeba kupić na to okno (nie odmierzając)
3) Ile dzielników mają liczby 37, 64, 216, 540?
4) Oblicz wysokość trapezu, jeżeli suma długości jego przekątnych wynosi 4, a pole 2.

Wymyślić uogólnienia do tych zadań.
Zachęcam, aby pod tym kątem analizować również inne zadania z OMG .