Zbigniew Karczmarczyk
Prywatne Gimnazjum i Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie

O pewnym uogólnieniu nierówności Cauchy'ego – Schwarza – Buniakowskiego i co z tego może wynikać

W programie konferencji znajduje się referat pani Urszuli Kapały „Zadania zachęcające do uogólnień". W nawiązaniu do tego referatu chciałbym zaproponować kilka uwag o dobrze znanej nierówności, którą nietrudno można uogólnić, następnie z tego uogólnienia wyciągnąć kilka wniosków.

Czytelnikowi dobrze znana jest nierówność zwana nierównością Cauchy'ego – Schwarza – Buniakowskiego, a mianowicie nierówność

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \qquad (1)$$

prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Równość w tej nierówności jest wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \in R$ taka, że $a_k = t \cdot b_k$ dla każdego $k = 1,2,\ldots,n$.

Chyba najbardziej znany dowód tej nierówności polega na stwierdzeniu, że funkcja $f(x) = (a_1x + b_1)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2$, $x \in R$ przyjmuje wartości nieujemne dla każdego $x \in R$, a ponieważ także $f(x) = \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 + 2(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)$, więc wyróżnik tego trójmianu (o ile tylko $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$) jest niedodatni czyli, $\Delta = 4\left[(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 - \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)\right] \le 0$ skąd wynika prawdziwość nierówności (1).

Mniej znany jest inny dowód nierówności (1), który chciałbym tu przypomnieć, a metodę użytą w tym dowodzie chciałbym wykorzystać do pokazania pewnych uogólnień tej nierówności.

Wiadomo, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$xy \le \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \qquad (2)$$

Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a_k = 0$ dla każdego $k = 1,\ldots,n$ lub $b_k = 0$ dla każdego $k = 1,\ldots,n$, to nierówność (1) jest oczywiście prawdziwa.

Załóżmy więc, że $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ i $b_1^2 + \ldots + b_n^2 > 0$. Niech $A = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ i $B = \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$.

Przyjmując $x_k = \frac{|a_k|}{A}$ i $y_k = \frac{|b_k|}{B}$ dla każdego $k = 1,\ldots,n$ i stosując do liczb x_k, y_k nierówność (2) otrzymujemy

$$\frac{|a_k|}{A} \cdot \frac{|b_k|}{B} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_k^2}{A^2} + \frac{b_k^2}{B}\right).$$

Dodając te nierówności stronami dla $k = 1,\ldots,n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k| \cdot |b_k|}{A \cdot B} \le \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{A^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{B^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$$

Skąd wynika, że

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot|b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\ .$$

Ponieważ prawdziwa jest nierówność

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot|b_k|\ ,$$

więc także prawdziwe są nierówności

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

co kończy dowód nierówności (1).

Załóżmy teraz, że $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n,c_1,...,c_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi. Niech

$$A=\sqrt[3]{a_1^3+...+a_n^3},\ B=\sqrt[3]{b_1^3+...+b_n^3},\ C=\sqrt[3]{c_1^3+...+c_n^3}.$$

Stosując znaną nierówność $xyz \le \frac{1}{3}\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)$, prawdziwą dla dowolnych liczb dodatnich *x*, *y*, *z*, do liczb $x_k=\frac{a_k}{A},\ y_k=\frac{b_k}{B},\ z_k=\frac{c_k}{C}$ otrzymujemy

$$\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}\cdot\frac{c_k}{C} \le \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a_k^3}{A^3}+\frac{b_k^3}{B^3}+\frac{c_k^3}{C^3}\right) \quad \text{dla} \quad k=1,...,n.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A}\cdot\frac{b_k}{B}\cdot\frac{c_k}{C} \le \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{A^3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^3}{B^3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k^3}{C^3}\right)=\frac{1}{3}\cdot(1+1+1)=1,$$

skąd wynika, że

$$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k c_k \le \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n}a_k^3}\cdot\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n}b_k^3}\cdot\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n}c_k^3}$$

czyli, że

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k c_k\right)^3 \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^3\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^3\right) \qquad (3)$$

dla dowolnych liczb dodatnich $a_1,...,a_n, b_1,...,b_n, c_1,...,c_n$.

Metoda dowodu nierówności (3) sugeruje możliwość uzyskania nierówności od niej ogólniejszej. Wiadomo, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1,...,x_k$ prawdziwa jest nierówność

$$x_1 \cdot ... \cdot x_k \le \frac{x_1^k + ... + x_k^k}{k}, \tag{4}$$

równoważna nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dla k liczb dodatnich.

Rozważmy teraz liczby dodatnie $a_{11}, a_{12},..., a_{1n}, a_{21}, a_{22},..., a_{2n},..., a_{k1}, a_{k2},..., a_{kn}$ i przyjmijmy, że

$$A_m = \sqrt[k]{a_{m1}^k + a_{m2}^k + ... + a_{mn}^k} \quad \text{dla} \quad m = 1,2,...,k \quad \text{oraz, że} \quad x_m = \frac{a_{mi}}{A_m} \quad \text{dla} \quad i = 1,...,n \quad \text{oraz} \quad m = 1,...,k.$$

Stosując nierówność (4) do liczb x_m, $m = 1,...,k$, otrzymujemy $\frac{a_{1i}}{A_1} \cdot ... \cdot \frac{a_{ki}}{A_k} \le \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{a_{1i}^k}{A_1^k} + ... + \frac{a_{ki}^k}{A_k^k} \right)$
a dodając te nierówności stronami po i od 1 do n otrzymujemy

$$\frac{a_{11} \cdot ... \cdot a_{k1} + ... + a_{1n} \cdot ... \cdot a_{kn}}{A_1 \cdot ... \cdot A_k} \le \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{a_{11}^k + ... + a_{k1}^k}{A_1^k} + ... + \frac{a_{1n}^k + ... + a_{kn}^k}{A_k^k} \right) = 1.$$

Otrzymujemy stąd kolejno nierówności

$$a_{11} \cdot ... \cdot a_{k1} + ... + a_{1n} \cdot ... \cdot a_{kn} \le \sqrt[k]{a_{11}^k + ... + a_{1n}^k} \cdot ... \cdot \sqrt[k]{a_{k1}^k + ... + a_{kn}^k}$$

$$\left(a_{11} \cdot ... \cdot a_{k1} + ... + a_{1n} \cdot ... \cdot a_{kn}\right)^k \le \left(a_{11}^k + ... + a_{1n}^k\right) \cdot ... \cdot \left(a_{k1}^k + ... + a_{kn}^k\right)$$

co można zapisać krótko

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} a_{ij} \right)^k \le \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k . \tag{5}$$

Z nierówności (5) można uzyskać wiele ciekawych nierówności rozpatrując szczególne przypadki. Kilka takich przypadków rozpatrzę zostawiając czytelnikowi możliwość tworzenia innych.

1. Załóżmy, że $m < k$, $m \in N$ oraz, że

$$\begin{array}{ll} a_{11} = ... = a_{m1} = a_1 & a_{m+1,1} = ... = a_{k1} = b_1 \\ .... & .... \\ a_{1n} = ... = a_{mn} = a_n & a_{m+1,n} = ... = a_{kn} = b_n \end{array}$$

gdzie $a_1,...,a_n, b_1,...,b_n \in R_+$.

Wtedy nierówność (5) przyjmuje postać

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^m b_j^{k-m}\right)^k \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right)^m \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^k\right)^{k-m} \qquad (6)$$

W szczególności np. dla $k = 5$ i $m = 2$ otrzymujemy

$$\left(a_1^2 b_1^3 + \ldots + a_n^2 b_n^3\right)^5 \leq \left(a_1^5 + \ldots + a_n^5\right)^2 \cdot \left(b_1^5 + \ldots + b_n^5\right)^3.$$

2. Załóżmy, że $m < n$ i $m \in N$ oraz, że

$$\begin{array}{ll} a_{11} = \ldots = a_{1m} = a_1 & a_{1,m+1} = \ldots = a_{1n} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} = \ldots = a_{km} = a_k & a_{k,m+1} = \ldots = a_{kn} = b_k \end{array}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in R_+$.

Wtedy nierówność (5) przyjmuje postać

$$\left[m \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i + (n-m) \cdot \prod_{i=1}^{k} b_i\right]^k \leq \prod_{i=1}^{k} \left[m a_i^k + (n-m) \cdot b_i^k\right] \qquad (7)$$

W szczególności np. dla $n = 5$ i $m = 2$ otrzymujemy

$$\left(2a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k + 3b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_k\right)^k \leq \left(2a_1^k + 3b_1^k\right) \cdot \ldots \cdot \left(2a_k^k + 3b_k^k\right)$$

3. Załóżmy, że

$$\begin{array}{ll} a_{11} = a_1 & a_{21} = \ldots = a_{k1} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} = a_n & a_{2n} = \ldots = a_{kn} = 1 \end{array}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n \in R_+$.

Wtedy nierówność (5) przyjmuje postać

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^k \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right) \cdot n^{k-1}$$

co po prostych przekształceniach daje nierówność między średnią arytmetyczną a średnią rzędu k dla n liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$, a mianowicie nierówność

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^k}{n}} \qquad (8)$$

4. Możemy nieco uogólnić poprzedni przykład. Załóżmy, że $m < k$, $m \in N$ oraz, że

$$a_{11} = \ldots = a_{m1} = a_1 \qquad\qquad a_{m+1,1} = \ldots = a_{k1} = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n} = \ldots = a_{mn} = a_n \qquad\qquad a_{m+1,n} = \ldots = a_{kn} = 1$$

gdzie $a_1,\ldots,a_n \in R_+$. Nierówność (5) przyjmuje wtedy postać

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^m\right)^k \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right)^m \cdot n^{k-m}$$

co po prostych przekształceniach daje nierówność

$$\sqrt[m]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^m}{n}} \le \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^k}{n}} \tag{9}$$

czyli nierówność między średnią rzędu m i średnią rzędu k, gdzie $m < k$, dla dowolnych n liczb dodatnich $a_1,\ldots a_n$.

5. Załóżmy, że

$$a_{11} = \ldots = a_{1,n-1} = 1 \qquad\qquad a_{1n} = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots$$
$$a_{k1} = \ldots = a_{k,n-1} = 1 \qquad\qquad a_{kn} = a_k$$

gdzie $a_1,\ldots,a_k \in R_+$. Nierówność (5) przyjmuje wtedy postać

$$\left(n-1+\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^k \le \prod_{i=1}^{k}\left(n-1+a_i^k\right) \tag{10}$$

6. Załóżmy, że $k = n$ oraz, że

$a_{jj} = a_j$ dla $j = 1,\ldots,n$ i $a_{ij} = 1$ dla $i, j = 1,\ldots,n$ takich, że $i \neq j$, gdzie $a_1,\ldots a_n \in R_+$.

Nierówność (5) przyjmuje wtedy postać

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^n \le \prod_{j=1}^{n}\left(a_j^n + n - 1\right) \tag{11}$$

7. Jeśli w nierówności (11) przyjmiemy $a_1 = \ldots = a_n = a$, gdzie $a > 0$, to otrzymamy kolejno nierówności

$$(na)^n \le \left(a^n + n - 1\right)^n$$
$$na \le a^n + n - 1$$
$$a^n \ge n(a-1)+1$$

Przyjmując $a = x+1$, gdzie $x > -1$ (bo $a > 0$) otrzymujemy znaną nierówność Bernoulliego

$$(1+x)^n \ge nx+1 \tag{12}$$

8. Załóżmy, że

$$a_{11} = a_1,\ a_{12} = a_2, ...,\ a_{1n} = a_n$$
$$a_{21} = b_1, a_{22} = b_2, ..., a_{2n} = b_n$$
$$a_{ij} = 1 \text{ dla } i = 3,...,k \text{ oraz } j = 1,...,n, \text{ gdzie } a_1,...,a_n, b_1,...,b_n \in R_+.$$

Nierówność (5) przyjmuje teraz postać

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^k \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^k\right) n^{k-2}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy nierówność

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}{n} \le \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} b_j^k}{n}} \tag{13}$$

9. Przyjmując w nierówności (5)

$$a_{11} = a_1, ..., a_{1n} = a_n$$
$$a_{21} = b_1, ..., a_{2n} = b_n$$
$$a_{31} = c_1, ..., a_{3n} = c_n$$

gdzie $a_j, b_j, c_j \in R_+$ dla $j = 1,...,n$ zaś pozostałe wyrazy równe 1 otrzymujemy nierówność

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j c_j\right)^k \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^k\right) n^{k-3}$$

a po przekształceniach

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j c_j}{n} \le \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} b_j^k}{n}} \cdot \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^k}{n}} \tag{14}$$

10. Uogólnimy powyższy przykład zakładając w nierówności (5) , że $m < k,\ m \in N$, oraz, że

$$a_{11},...,a_{m1}, a_{12},...,a_{m2},...,a_{1n},...,a_{mn} \in R_+, \text{ zaś } a_{ij} = 1 \text{ dla } i = m+1,...,k \text{ i } j = 1,...,n.$$

Otrzymujemy wtedy nierówność

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^k \le \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k\right) n^{k-m}$$

co po przekształceniach można zapisać w postaci

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}}{n} \le \prod_{i=1}^{m} \sqrt[k]{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k}{n}} \tag{15}$$

Tych 10 przykładów pokazuje jak z jednej dość ogólnej nierówności możemy uzyskiwać nierówności już znane, bądź też uzyskiwać nierówności, które mogą być odkryciem dla ucznia. Zachęcam do poszukiwania nowych, ciekawych nierówności, które można otrzymać z nierówności (5).