Zdzisław Pogoda
Instytut Matematyki UJ
Ul.Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
e-mail: zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl

O zachęcaniu i zniechęcaniu do matematyki

Ucząc matematyki staramy się do niej zachęcić. Trudno sobie wyobrazić nauczyciela matematyki, który celowo zniechęcałby uczniów do swojego przedmiotu. Dlaczego więc dzieje się tak, że wielu uczniów oraz tych, którzy już mają naukę szkolną za sobą twierdzi, że właśnie w szkole zniechęcili się do matematyki? Problem jest poważny i przyczyn wiele. Zwrócimy tu uwagę na jeden z aspektów.

Czy nam się coś podoba czy nie, czy coś lubimy lub nie jest odczuciem bardzo osobistym i względnym. Jakiś utwór muzyczny, wiersz, powieść, czy film w pierwszej chwili może nam się zupełnie nie podobać, lecz później możemy uznać, że jest to dzieło interesujące, a nawet fascynujące. Oczywiście może też być odwrotnie. Zależy to od wielu czynników: sposobu prezentacji, samopoczucia w danym momencie, nastroju, kontekstu, w jakim stykamy się z dziełem. Podobnie jest z problemami matematycznymi. Jeśli zadanie-problem zostanie przedstawione w ciekawy sposób z uzasadnieniem, to jest duża szansa, że i nas zainteresuje. Szansa na zaciekawienie z pewnością wzrośnie, gdy w pełni zrozumiemy rozwiązanie, poznamy zastosowania Jeśli jednak problem ukazany będzie beznamiętnie, ponadto jego rozwiązanie będzie zawiłe, oczywiste dla rozwiązującego a dla nas nie, to istnieją małe szanse, że nas wciągnie, że się nim zafascynujemy.

Zdarza się, że zły dobór zadań trudnych, ponad siły ucznia, może go zniechęcić nawet do najprostszych problemów. Dostając zadanie z góry może założyć, że jest ponad jego siły i nawet nie będzie próbował go rozwiązywać, choć tak naprawdę może to być zadanie typowe, wymagające niewielkiego wysiłku, wręcz standardowe. Przyzwyczajony jednak do tego, że nauczyciel ciągle zaskakuje go zadaniami z „szatańskim” pomysłem, uzna, iż i tak nie da sobie rady z problemem.

Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

Zadanie 1.
Rozwiązać równanie

$$x^5 - 5x^2 + 2 = 0$$

Zadanie wygląda na typowe z tematu „rozwiązywanie równań wyższych stopni” oraz „rozkład wielomianu na czynniki”. Jednak próby rozwiązania go standardowymi metodami nie przynoszą efektu. Żaden z dzielników wyrazu wolnego nie jest pierwiastkiem równania. Pozostaje więc metoda „coś dodać i odjąć”.

Można postąpić tak:

$$
\begin{aligned}
&x^5 - 5x^2 + 2 = (x^5 - x^4 - x^3) + (x^4 - x^3 - x^2) + 2(x^3 - x^2 - x) - 2(x^2 - x - 1) = \\
&= x^3(x^2 - x - 1) + x^2(x^2 - x - 1) + 2x(x^2 - x - 1) - 2(x^2 - x - 1) = \\
&= (x^2 - x - 1)(x^3 + x^2 + 2x - 3)
\end{aligned}
$$

Jeśli jakoś udało nam się wpaść na pomysł, jak wykonać ten rozkład, to teraz mamy przed sobą równanie

$$x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$$

I tym razem nie działają sprawdzone metody. Wyraz wolny taki sam jak poprzednio nie pozwala na znalezienie pierwiastków całkowitych. Także próby rozkładu na czynniki są bezowocne. Trudno zakładać, że znane są wzory Cardana. Trzeba więc wykorzystać jakiś pomysł.

Najpierw zastosujmy podstawienie pozwalające pozbyć się członu w drugiej potędze. Takim podstawieniem jest

$$y = x + \frac{1}{3}$$

Pozwala to poprzednie równanie zastąpić następującym

$$y^3 + \frac{5}{3}y - \frac{70}{27} = 0$$

Teraz stosujemy kolejne podstawienie

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

co daje

$$\frac{5\sqrt{5}}{27}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) = \frac{70}{27}$$

a stąd

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

i teraz

$$z - \frac{1}{z} = \sqrt[3]{\frac{7 + \sqrt{69}}{\sqrt{5}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{7 + \sqrt{69}}}$$

wracając teraz do zmiennej *x* dostaniemy ostatecznie

$$x=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{69}}{\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{7+\sqrt{69}}}\right)-\frac{1}{3}$$

Pozostałe rozwiązania otrzymamy z trójmiany kwadratowego, który pojawił się w rozkładzie na czynniki. Oczywiście są to

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Tu nie powinno być problemów.

Takie zadanie i jego rozwiązanie może ucznia przerazić i całkowicie zniechęcić do innych zadań zdecydowanie prostszych, gdzie nie trzeba stosować aż tak wyszukanych chwytów. Wplatając je między standardowe zadania możemy wielu uczniów skutecznie zniechęcić do matematyki.
Jest to niewątpliwie problem w stylu olimpijskim i uczniowie przygotowani na nietypowe problemy i odpowiednio trenowani, mogą poradzić sobie z zadaniem, być może nawet bez większego trudu.
Należy tu wyraźnie zaznaczyć, że nie chodzi o krytykę podobnych zadań. Matematycy w swojej pracy często spotykają się z takimi „elementarnymi” problemami i muszą sobie z nimi radzić. Trzeba jednak bardzo uważać, kiedy i komu można zaproponować zadanie tego typu.

Przyjrzyjmy się innemu zadaniu

Zadanie 2

Liczbę 91 można na dwa sposoby przedstawić w postaci a^2+ab+b^2 , gdzie $a,b\in \boldsymbol{N}$

$$91=9^2+9\cdot 1+1^2=6^2+6\cdot 5+5^2$$

Znaleźć liczbę naturalną, którą można przedstawić w takiej postaci na trzy sposoby.

Z tematu zadania wynika, że poszukiwana liczba powinna istnieć. Tylko jak ją znaleźć. Wiele problemów z teorii liczb rozwiązuje się za pomocą różnego rodzaju sztuczek i niebanalnych pomysłów. Tak to wygląda dla osób, które nie mają na co dzień do czynienia z podobnymi zadaniami.

Najpierw zauważmy zależność

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(c^2+cd+d^2\right)=$$
$$=\left(bc-ad\right)^2+\left(bc-ad\right)\left(ad+bd+ac\right)+\left(ad+bd+ac\right)^2$$

Sprawdzamy ją bezpośrednim rachunkiem.
Teraz zdefiniujmy funkcję

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2$$

Opisaną powyżej zależność możemy zapisać wykorzystując f

$$f(a,b)\cdot f(c,d)=f(bc-ad,ad+bd+ac)$$

Prawdą jest też, że $f(x,y)=f(y,x)$, czyli

$$f(a,b)\cdot f(c,d)=f(a,b)\cdot f(d,c)=f(bd-ac,ac+bc+ad)$$

Przechodząc na liczby można zauważyć, że

$$f(1,3)\cdot f(1,2)=f(1,9)=f(5,6)$$

a także

$$f(1,9)\cdot f(2,3)=f(15,32)=f(25,23)$$

i jeszcze

$$f(5,6)\cdot f(2,3)=f(3,40)=f(8,37)$$

Ponadto $f(1,2)=7,\ f(1,3)=13,\ f(2,3)=19$. Tak więc liczba 1729=7·13·19 jest szukaną liczbą gdyż

$$f(3,40)=f(8,37)=f(15,32)=f(25,23)=1729$$

Dokładniejsze przyjrzenie się rozwiązaniu pozwala na stwierdzenie, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje taka liczba, którą można przedstawić w postaci a^2+ab+b^2 na n różnych sposobów.

Ten problem również chyba nie nadaje się, jako zachęta dla uczniów niezdecydowanych lub sceptycznie nastawionych do matematyki. Może utwierdzić ich w przekonaniu, że matematyka sprowadza się przede wszystkim do trików i zaskakujących pomysłów. Dla przygotowujących się do olimpiady lub innych konkursów może to być jednak ciekawy przykład wykorzystania pewnej techniki. Wszystko zależy komu chcemy zaproponować zadanie. Nauczyciel musi postępować bardzo ostrożnie przy doborze problemów.

Może teraz przeanalizujmy przykład geometryczny.

Zadanie 3
Udowodnić, że przy tradycyjnych oznaczeniach dla trójkąta ΔABC prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$$

gdzie $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Rozwiązanie wygląda następująco:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}p^2$$

oraz

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}p^3$$

czyli

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}p^2 = \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{\left(\frac{2}{3}p\right)^2}{p}\right) \geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$$

I jeszcze jedno zadanie

Zadanie 4

W trójkącie ΔABC niech punkty A_1, B_1 i C_1 będą punktami styczności okręgu wpisanego do odpowiednich boków. Oznaczmy jeszcze $B_1C_1 = a_1$, $A_1C_1 = b_1$ oraz $A_1B_1 = c_1$. Przy powyższych oznaczeniach udowodnić, że prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1} \geq \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Bez ograniczania ogólności możemy przyjąć, że $a \geq b \geq c$. Niech O oznacza środek okręgu wpisanego, wtedy możemy jeszcze wprowadzić oznaczenia

$$\alpha' = \angle B_1OC_1,\quad \beta' = \angle A_1OB_1,\quad \gamma' = \angle A_1OC_1$$

Zauważmy, że przy tradycyjnych oznaczeniach katów wewnętrznych w trójkącie zachodzą zależności

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \pi$$

oraz $\alpha' \le \beta' \le \gamma'$

Odcinki AO, BO i CO są prostopadłe odpowiednio do B_1C_1, C_1A_1 i A_1B_1.

Mamy natychmiast

$$a_1 = 2r\sin\frac{\alpha'}{2},\ b_1 = 2r\sin\frac{\beta'}{2},\ c_1 = 2r\sin\frac{\gamma'}{2}$$

czyli

$$a_1 \le b_1 \le c_1 \text{ oraz konsekwentnie } \frac{1}{a_1} \ge \frac{1}{b_1} \ge \frac{1}{c_1}$$

Wykorzystując teraz nierówność Czebyszewa możemy zapisać szacowanie

$$3\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\right) \ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1}\right) =$$

$$= \frac{p}{r}\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha'}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta'}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma'}{2}}\right) = \frac{p}{r}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right)$$

Wykorzystując wzór Herona i oznaczając pole trójkąta ΔABC przez S mamy zależności

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p+p-a+p-b+p-c}{4}\right)^4 = \left(\frac{4p-2p}{4}\right)^4 = \frac{p^4}{16}$$

czyli

$$\frac{p}{r} = \frac{p^2}{S} \ge 4$$

gdzie, jak poprzednio p jest połową obwodu trójkąta.

Zauważmy jeszcze, że funkcja dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ jest wypukła na przedziale $(0,\frac{\pi}{2})$, a zatem z nierówności Jensena dostaniemy kolejne szacowanie

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\geq 3\frac{1}{\cos\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}}=\frac{3}{\cos\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$$

Ostatecznie więc

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right)\geq\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

co daje szukaną nierówność.

Widać, że w zadaniu 3 jest to rachunek czysto algebraiczny, a więc geometryczność tegoż zadania jest pozorna. Ponadto jest to znów typowe zadanie-ćwiczenie dla uczestników konkursów, bo sama nierówność na pierwszy rzut oka nie ma ciekawej interpretacji geometrycznej. Liczymy, żeby wyszło. W zadaniu czwartym wykorzystujemy co prawda pewne własności trójkąta, ale podstawowe pomysły związane są z algebraicznymi nierównościami.

Takie zadanie raczej nie zachęci przeciętnego ucznia do matematyki a tym bardziej do geometrii. Będzie utwierdzało w przekonaniu, że zadania matematyczne wymagają nienaturalnych sztuczek, na które trudno wpaść.

Powyższe przykłady pokazują, że trzeba bardzo uważać, przy doborze zadań. Można, mimo dobrych chęci, uzyskać efekt daleki od oczekiwanego. Zamiast zainteresowania można niestety skutecznie zniechęcić.

Przyjrzyjmy się pewnemu twierdzeniu, którym interesował się Euler

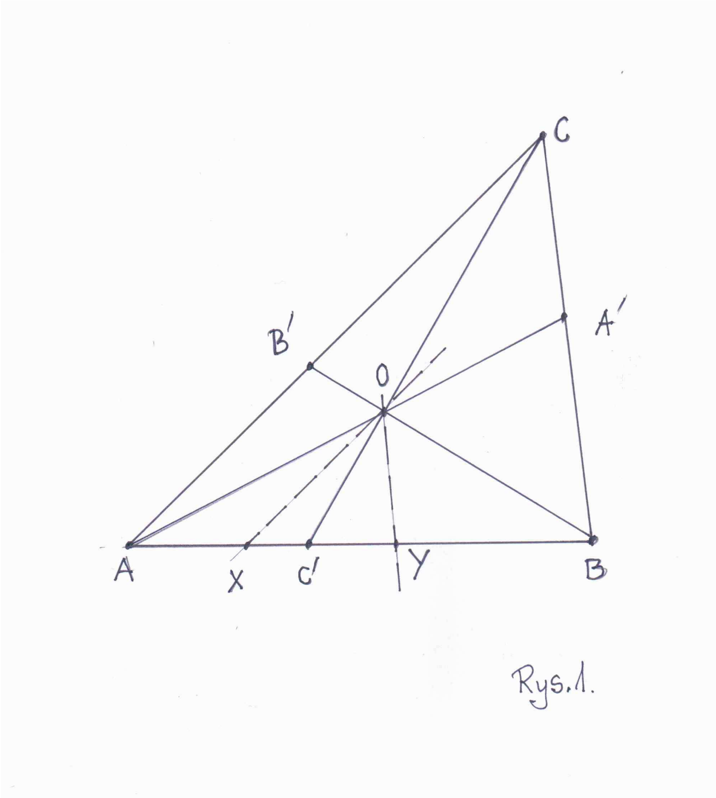
Zadanie 5

W ΔABC z wierzchołków *A*, *B* i *C* prowadzimy proste przecinające przeciwległe boki odpowiednio w punktach *A'*, *B'* i *C'* i posiadające punkt wspólny *O*. Udowodnić, że

$$\frac{OC'}{CC'}+\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}=1$$

Wbrew pozorom nie jest to zadanie na zastosowanie twierdzenia Cevy. Najprościej, za Eulerem, uzasadnia się to tak.

Przez punkt O prowadzimy proste równoległe do AC i BC i przecinające bok AB odpowiednio w punktach X i Y.



Naturalnie

$$AX + XY + YB = AB$$

a stąd oczywiście

$$\frac{AX}{AB} + \frac{XY}{AB} + \frac{YB}{AB} = 1$$

Wystarczy teraz zauważyć odpowiednie proporcje

$\frac{AX}{AB} = \frac{OB'}{BB'}$ ponieważ trójkąty ΔXOB i $\Delta ABB'$ są podobne.

Analogicznie $\frac{XY}{AB} = \frac{OC'}{CC'}$ na podstawie podobieństwa ΔXOY i ΔABC

i jeszcze $\frac{YB}{AB} = \frac{OA'}{AA'}$, bo podobne są trójkąty $\Delta ABA'$ i ΔAYO

Warto jednak dodać, że Euler uzyskał to rozwiązanie dopiero za trzecim podejściem. Pierwsze dwa rozwiązania były znacznie bardziej skomplikowane. Fakt ten jest znany

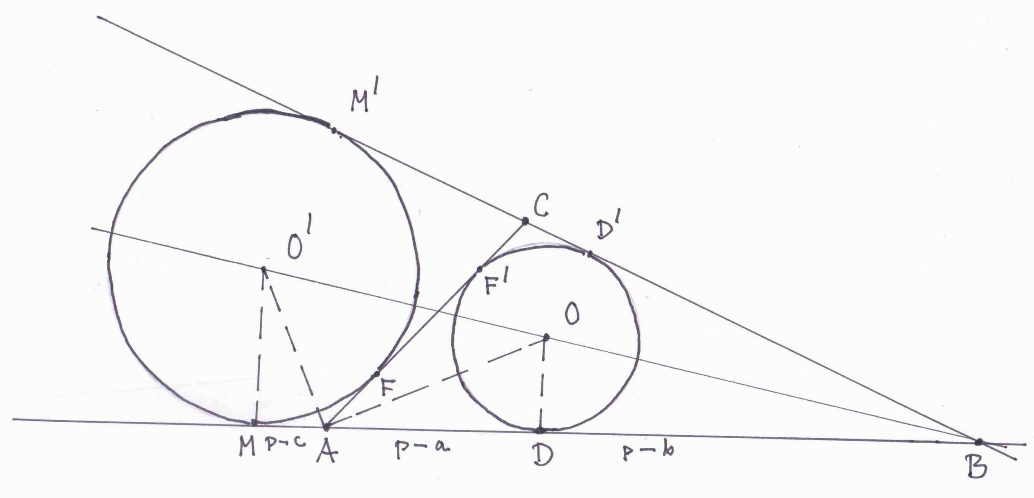
również jako twierdzenie Gergonne'a, który opublikował je w 1818 roku. Euler swoją ostateczną wersję przedstawił już w 1662 roku.
Chociaż zaprezentowane rozumowanie wymaga pomysłu, to jest dość naturalne z punktu widzenia geometrii elementarnej. Jest też proste i trudno mu odmówić elegancji.

Na koniec zajmijmy się wspomnianym wcześniej wzorem Herona. Ciekawe, że choć wzór jest dość zawiły i w praktyce szkolnej niemal nieużywany, to jest pamiętany nawet lepiej niż inne niezbędne wzory na pole trójkąta. Najczęściej wzór Herona wyprowadzany jest z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów i kilku sztuczek algebraicznych: tak przekształcamy zależności, żeby wyszło co trzeba. Interesujące byłoby przedstawienie sposobu rozumowania samego Herona. Nie znał on przecież algebry i trygonometrii. Ponadto nie wiedział przecież jaką zależność ma otrzymać. Jego wynik jest naprawdę niezwykły jak na tamte czasy (przypomnijmy Heron żył w I wieku naszej ery).
Przedstawimy rozumowanie, które pozwala wyprowadzić wzór Herona bez jego wcześniejszej znajomości. Choć jest to rozumowanie przejrzyste i bardzo logiczne, obecnie rzadko jest prezentowane.

Startujemy od znanej zależności na pole trójkąta (przy tradycyjnych oznaczeniach)

$$S = pr$$

Chcemy wyznaczyć promień r okręgu wpisanego w trójkąt za pomocą boków tego trójkąta. W tym celu do boku AC dopiszmy okrąg i oznaczmy przydatne punkty zgodnie z rysunkiem



Ryp. 2.

Podzielmy dalsze rozumowanie na kilka etapów.

Etap 1.
Zauważmy, że $AD = p - a$, $BD = p - b$ i $CD' = p - c$
Jest to prosta konsekwencja twierdzenia o odcinkach stycznych. Bowiem

$$AD + DB + BD' + D'C + CF' + F'A = 2p$$

Na podstawie wspomnianego twierdzenia

$$AD = AF', DB = BD', CD' = CF'$$

czyli

$$2AD + 2DB + 2CD' = 2p$$

a stąd

$$AD = p - (DB + CD') = p - a$$

Pozostałe równości dowodzimy podobnie.

Etap 2.
Udowodnimy, że $CF' = FA$
Znów wykorzystamy twierdzenie o odcinkach stycznych i startujemy od równości

$$BM = BM'$$

i teraz

$$MA + AD + DB = M'C + CD' + D'B$$

Ponownie wykorzystujemy twierdzenie o odcinkach stycznych

$$AF + AF' + DB = CF + CF' + CD$$

i dalej

$$AF + (AF + FF') = (CF' + F'F) + CF'$$

skąd oczywiście $CF' = AF$

Etap 3.
Zauważamy, że trójkąty ΔADO oraz $\Delta MAO'$ są podobne. Jest tak rzeczywiście, gdyż oba trójkąty są prostokątne oraz odcinki AO i AO' są prostopadłe jako dwusieczne odpowiednich kątów związanych z trójkątem.

Etap 4.
Teraz możemy już wyliczyć *r*.

Zauważmy najpierw, że z poprzednich rozważań $MA = p - c$, $AD = p - b$ oraz $DB = p - b$. Wykorzystując podobieństwo trójkątów z etapu 3 możemy zanotować proporcje

$$\frac{r_b}{p-c} = \frac{p-a}{r}$$

a z podobieństwa trójkątów ΔDBO i $\Delta MBO'$

$$\frac{r_b}{r} = \frac{p}{p-b}$$

gdzie $r_b = MO'$ jest promieniem okręgu dopisanego do boku $b = AC$.
Z pierwszej proporcji wyznaczamy r

$$r = \frac{(p-a)(p-c)}{r_b}$$

a z drugiej r_b

$$r_b = \frac{rp}{p-b}$$

ostatecznie więc

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

skąd po podstawieniu do wzoru $S = rp$ dostaniemy wzór Herona.

Naturalnie powyższy przykład nie nadaje się na zadanie dla uczniów. Jest to jednak przykład ładnego rozumowania z zakresu geometrii elementarnej. Chyba warto je przypominać przy nadarzających się okazjach. Zdolni, zainteresowani matematyką uczniowie mogą docenić urok tego rozumowania tym bardziej, że poszczególne etapy są bardzo proste i mogą być samodzielnie dowodzone pod kierunkiem nauczyciela.
Na tym kończymy przegląd przykładów, które same w sobie są interesujące i mogą być nawet inspirujące. Jednak proponowane jako zadania uczniom nieprzygotowanym, z zaskoczenia, mogą stać się powodem niechęci do matematyki i frustracji uczniów.