Joanna Zakrzewska

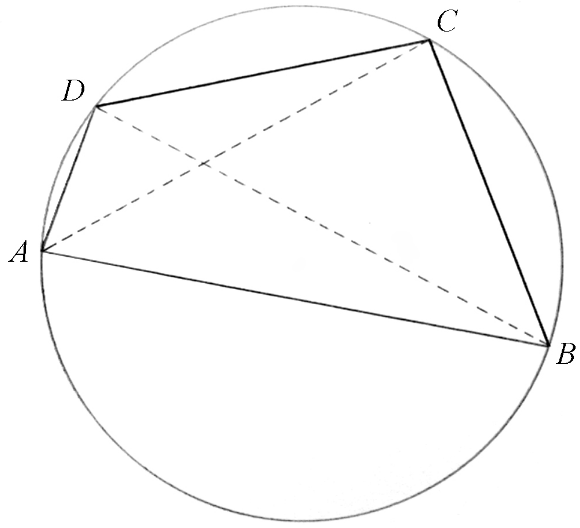
Wspólny punkt

Na najnowszym, trzecim już, plakacie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (zob. www.sem.edu.pl) widnieje dwanaście konfiguracji geometrycznych. Ich wspólną cechą jest to, że czerwone proste przecinają się w jednym punkcie. Własność tę w każdym przypadku można oczywiście wykazać na wiele sposobów. Przykłady zostały jednak tak dobrane, że każdy wiersz stanowić może ilustrację konkretnej metody dowodzenia.

Pierwsza z nich polega na zastosowaniu znanego twierdzenia mówiącego o tym, kiedy na czworokacie wypukłym można opisać okrąg.

Twierdzenie.

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z równoważnych warunków:
(a) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180°$,
(b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



rys. 1

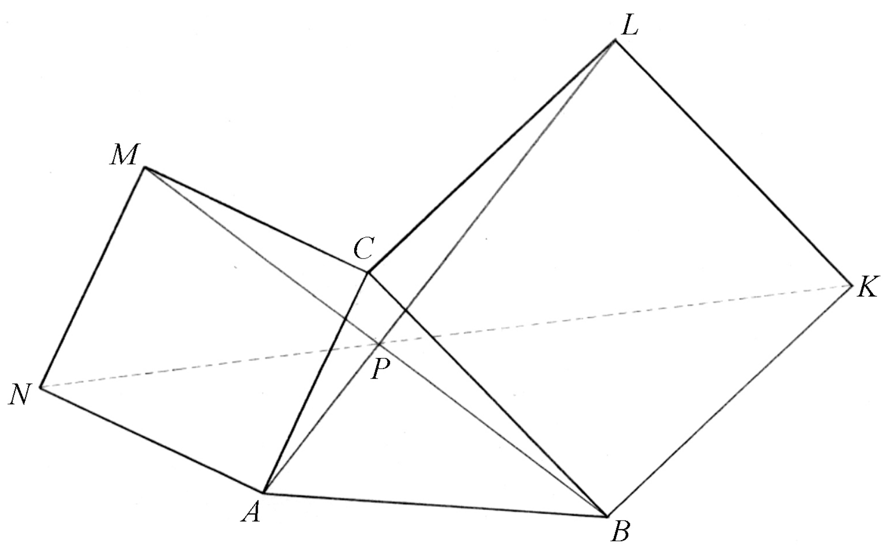
Zobaczmy, jak można wykorzystać to twierdzenie w interesującym nas zagadnieniu.

Zadanie 1.

Na bokach BC i CA trójkąta ABC, po jego zewnętrznej stronie, zbudowano kwadraty $BKLC$ i $CMNA$. Wykazać, że proste KN, AL i BM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.

Niech P będzie punktem przecięcia prostych AL i BM (rys. 2). Wystarczy wykazać, że prosta KN również przechodzi przez punkt P. Mamy $MC = AC$, $BC = LC$ oraz $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MCA + \sphericalangle ACB = 90° + \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCL = \sphericalangle ACL$. Stąd, na mocy cechy bok-kąt-bok, trójkąty MCB i ACL są przystające. Wobec tego $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CAP$, czyli na czworokącie $CMAP$ można opisać okrąg. Jest to oczywiście ten sam okrąg, na którym leży również punkt N. Punkt P leży zatem na okręgu opisanym na kwadracie $CMNA$. Podobnie pokazujemy, że punkt P leży na okręgu opisanym na kwadracie $BKLC$.



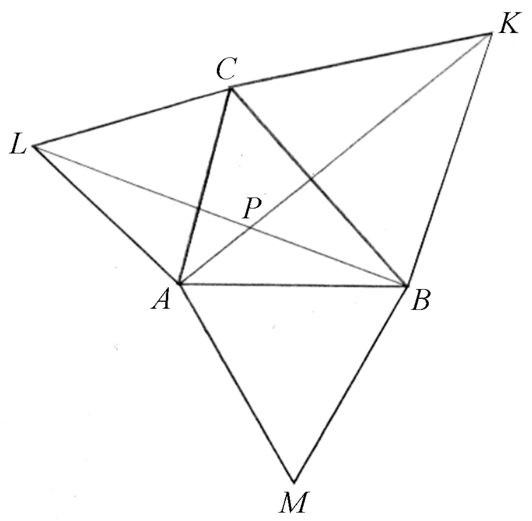
rys. 2

Przyjrzyjmy się teraz kątom NMA i NPA. Są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Zauważmy, że $\sphericalangle NMA = 45^\circ$. Stąd $\sphericalangle NPA = 45^\circ$. Analogicznie mamy $\sphericalangle LPK = 45^\circ$. Zatem $\sphericalangle NPA = \sphericalangle LPK$, czyli punkty N, P i K leżą na jednej prostej.

Zadanie 2.

Na bokach trójkąta ABC, po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty równoboczne BKC, CLA oraz AMB. Wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.



rys. 3

Niech P będzie punktem przecięcia prostych AK i BL (rys. 3). Podobnie jak w poprzednim zadaniu, nietrudno zauważyć, że na mocy cechy bok-kąt-bok trójkąty LCB i ACK są przystające. Mamy zatem $\sphericalangle CLP = \sphericalangle CAP$, czyli na czworokącie $CLAP$ można opisać okrąg. Stąd $\sphericalangle CLA + \sphericalangle APC = 180°$, więc $\sphericalangle APC = 120°$. Analogicznie pokazujemy, że okrąg opisać można na czworokącie $PBKC$ oraz, że $\sphericalangle CPB = 120°$.

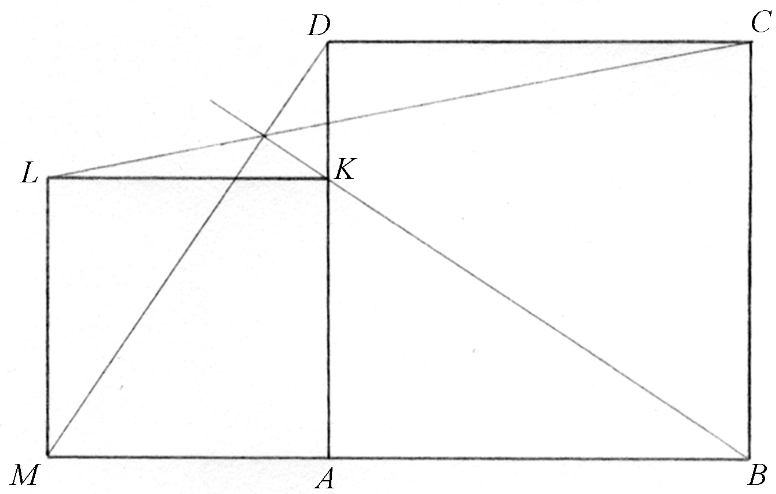
Rozważmy teraz czworokąt $AMBP$. Widzimy, że $\sphericalangle APB = 360° - \sphericalangle APC - \sphericalangle CPB = 120°$. Stąd $\sphericalangle APB + \sphericalangle AMB = 180°$. Na czworokącie $AMBP$ można zatem opisać okrąg. Mamy więc $\sphericalangle APM = \sphericalangle ABM = 60°$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Podobnie $\sphericalangle KPC = \sphericalangle KBC = 60°$. Stąd $\sphericalangle APM = \sphericalangle KPC$, czyli punkty C, P i M są współliniowe.

Uwaga.

Gdy miara żadnego kąta w trójkącie nie przekracza $120°$, powstały w ten sposób punkt P jest *punktem Torricellego*, czyli punktem na płaszczyźnie o takiej własności, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta ABC jest najmniejsza.

Zadanie 3. (do samodzielnego rozwiązania)

Dane są kwadraty $ABCD$ oraz $AKLM$, o wspólnym wierzchołku A, położone w taki sposób, że punkt K leży na odcinku AD (rys. 4). Wykazać, że proste MD, BK i CL przecinają się w jednym punkcie.



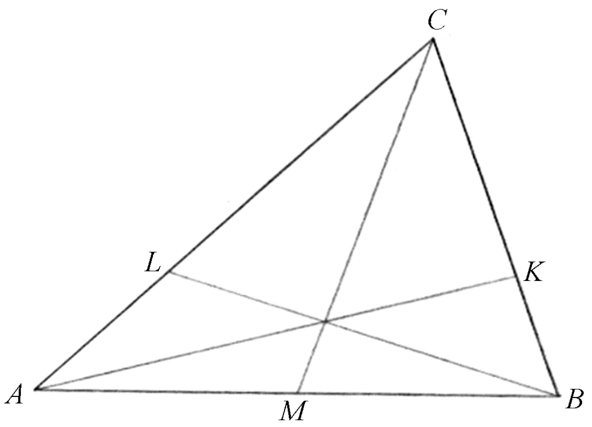
rys. 4

Kolejne trzy zadania stanowią przykład zastosowania trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy. Zacznijmy od przypomnienia klasycznego sformułowania tego twierdzenia.

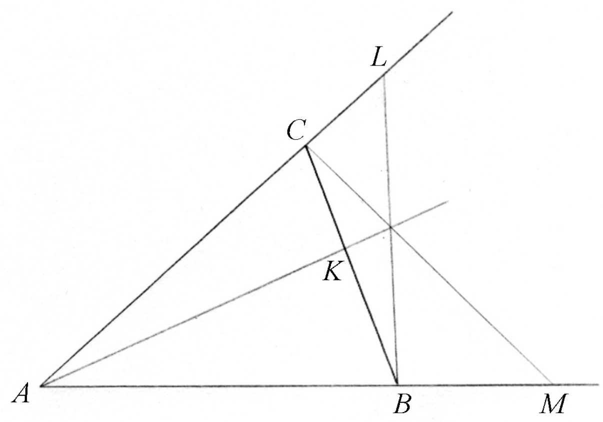
Twierdzenie Cevy.

Dany jest trójkąt ABC. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych BC, CA i AB (rys. 5 i 6). Proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}} = 1.$$



rys. 5



rys. 6

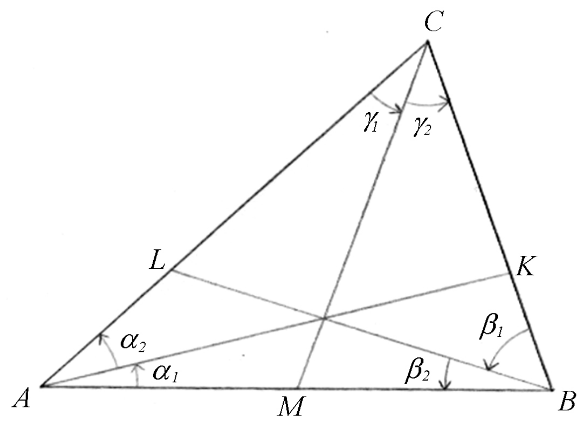
W trygonometrycznej wersji powyższego twierdzenia znany warunek, wiążący długości wektorów, zastępujemy równoważnym mu warunkiem, dotyczącym sinusów pewnych kątów.

Twierdzenie Cevy. (wersja trygonometryczna)

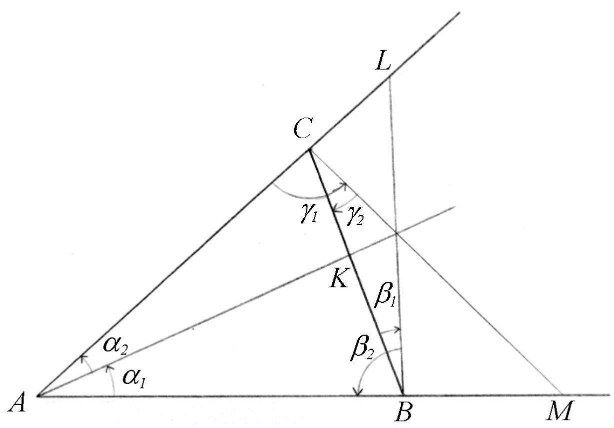
Dany jest trójkąt ABC. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych BC, CA i AB. Proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1,$$

gdzie kąty α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 są kątami skierowanymi odpowiednio między półprostymi AB i AK, AK i AC, BC i BL, BL i BA, CA i CM oraz CM i CB.



rys. 7



rys. 8

Dowód.

Wystarczy pokazać, że warunki:

(1) $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

oraz

(2) $$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}}=1$$

są równoważne. Załóżmy, że punkty K, L, M leżą na bokach trójkąta ABC (rys. 7). Wówczas

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA}.$$

Udowodnimy twierdzenie w tym szczególnym przypadku. W pełnej ogólności dowód przebiega podobnie.

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Trójkąty AMC i MBC mają wspólną wysokość, więc $\frac{AM}{MB} = \frac{[AMC]}{[MBC]}$. Stąd

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot MC \cdot \sin\gamma_1}{\frac{1}{2} \cdot MC \cdot BC \cdot \sin\gamma_2} = \frac{AC \cdot \sin\gamma_1}{BC \cdot \sin\gamma_2}.$$

Analogicznie pokazujemy, że $\frac{BK}{KC} = \frac{BA \cdot \sin\alpha_1}{CA \cdot \sin\alpha_2}$, $\frac{CL}{LA} = \frac{CB \cdot \sin\beta_1}{AB \cdot \sin\beta_2}$. Korzystając z udowodnionych równości otrzymujemy

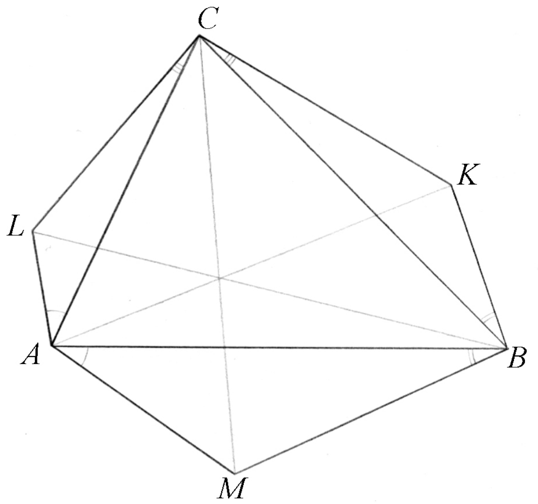
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Wynika stąd natychmiast równoważność warunków (1) i (2).

Zadania wykorzystujące trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy pozostawiamy czytelnikom do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 4.

Na bokach trójkąta ABC, po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty BKC, CLA oraz AMB, przy czym $\sphericalangle LAC = \sphericalangle BAM$, $\sphericalangle MBA = \sphericalangle CBK$, $\sphericalangle KCB = \sphericalangle ACL$ (rys. 9). Wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.



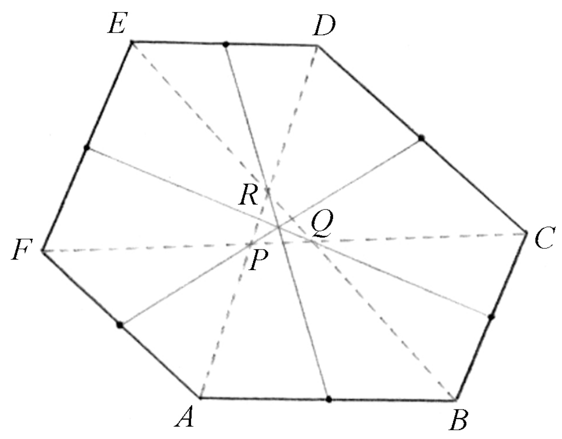
rys. 9

Wskazówka.

Fakt, że w trójkącie ABC trójki prostych AK, BK i CK, AL, BL i CL oraz AM, BM i CM przecinają się w jednym punkcie pozwala w każdym z tych przypadków wykorzystać twierdzenie Cevy. Otrzymane w ten sposób równości prowadzą do rozwiązania.

Zadanie 5.

Dany jest sześciokąt $ABCDEF$, w którym boki AB, BC i CD są równoległe odpowiednio do boków DE, EF i FA (rys. 10). Wykazać, że proste łączące środki równoległych boków przecinają się w jednym punkcie.



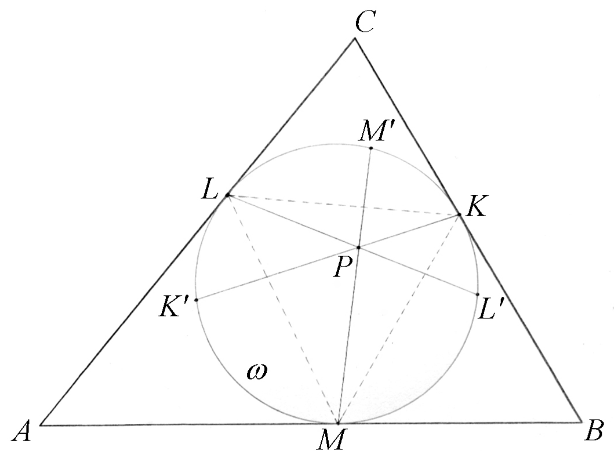
rys. 10

Wskazówka.

Przy oznaczeniach, jak na rysunku, należy zacząć od wykazania, że rozważane proste przechodzą przez wierzchołki trójkąta PQR.

Zadanie 6.

Dany jest okrąg ω wpisany w trójkąt ABC, styczny do jego boków AB, BC i CA odpowiednio w punktach M, K i L, oraz punkt P leżący wewnątrz tego okręgu. Cięciwy KP, LP i MP przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach K', L' i M' (rys. 11). Wykazać, że proste AK', BL' oraz CM' przecinają się w jednym punkcie.



rys. 11

Wskazówka.

Należy zastosować trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy do trójkąta AML i punktu K', trójkąta MBK i punktu L', trójkąta LKC i punktu M' oraz trójkąta MKL

i punktu P. Po kilku przekształceniach otrzymanych zależności, uwzględnieniu równości kątów oraz ponownym wykorzystaniu twierdzenia Cevy otrzymamy tezę.

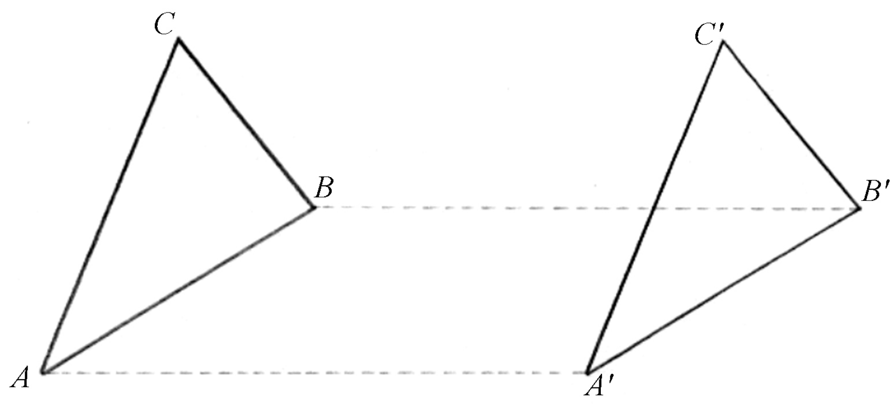
Kolejna metoda, którą się zajmiemy, polega na wykorzystaniu pewnej własności jednokładności.

Twierdzenie.

Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, przy czym $AB//A'B'$, $BC//B'C'$, $CA//C'A'$. Wówczas istnieje jednokładność lub przesunięcie takie, że przy tym przekształceniu $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

Dowód.

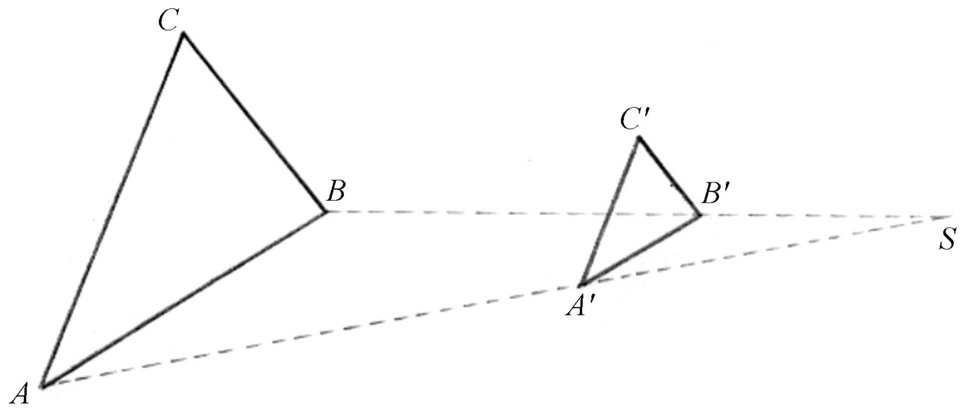
Rozpatrzymy dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że proste AA' oraz BB' są równoległe (rys. 12). Czworokąt $AA'B'B$ jest wówczas równoległobokiem, czyli $AA' = BB'$. Rozważmy przesunięcie o wektor $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Oczywiście przy tym przekształceniu $A \to A'$, $B \to B'$.



rys. 12

Obrazem prostej AC musi być prosta do niej równoległa i przechodząca przez obraz punktu A. Będzie to zatem prosta $A'C'$. Analogicznie, obrazem prostej BC jest prosta $B'C'$. Stąd przy rozważanym przesunięciu $C \to C'$.

Załóżmy teraz, że proste AA' oraz BB' nie są równoległe i oznaczmy przez S punkt ich przecięcia (rys. 13). Rozważmy jednokładność o skali $k = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}}$ (druga równość wynika z twierdzenia Talesa) i środku w punkcie S. Przy tej jednokładności $A \to A'$ oraz $B \to B'$. Ponadto, podobnie jak w poprzednim przypadku, obrazem prostej AC jest prosta $A'C'$, a prostej BC - prosta $B'C'$, zatem $C \to C'$.



rys. 13

Uwaga.

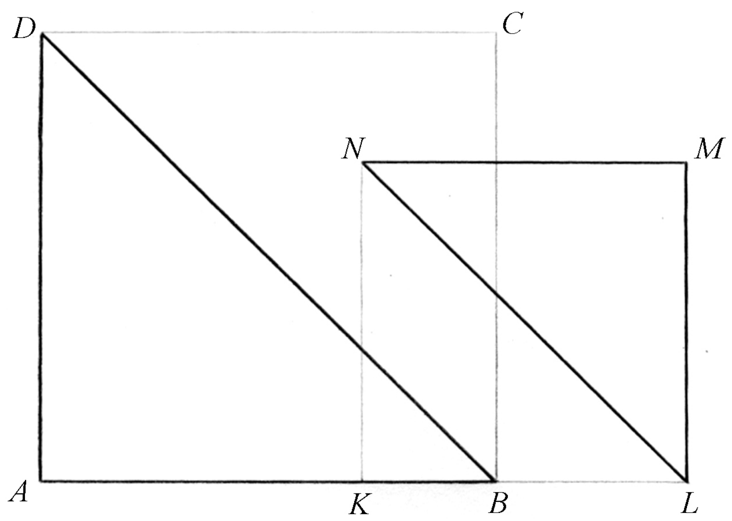
Należy pamiętać, że dla czworokątów o odpowiednich bokach równoległych podobna własność nie zachodzi - aby przekształcenie takie istniało, muszą być spełnione dodatkowe warunki.

Zobaczmy, jak udowodnione przed chwilą twierdzenie można wykorzystać w zadaniach.

Zadanie 7.

Dane są kwadraty $ABCD$ oraz $KLMN$, przy czym punkt K należy do odcinka AB, zaś punkt B - do odcinka KL. Wykazać, że proste AM, BN i DL przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.



rys. 14

Zauważmy, że trójkąty DAB oraz LMN spełniają założenia powyższego twierdzenia. Mamy bowiem $DA//LM$, $AB//MN$ oraz $BD//NL$ (rys. 14). Wynika stąd natychmiast teza zadania.

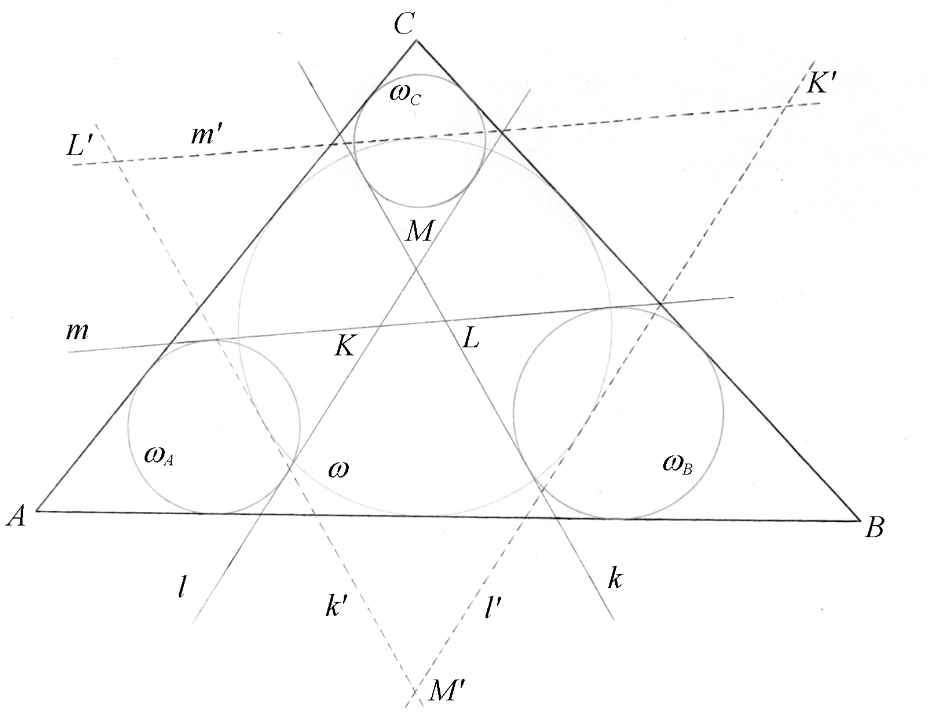
W kolejnym zadaniu dostrzec interesujących nas trójkątów nie będzie już tak łatwo.

Zadanie 8.

Okręgi ω_A, ω_B i ω_C leżą wewnątrz trójkąta ABC i są styczne odpowiednio do jego boków AB i AC, BA i BC oraz CA i CB. Proste k, l, m - niezawierające boków trójkąta wspólne styczne zewnętrzne odpowiednio okręgów ω_B i ω_C, ω_C i ω_A oraz ω_A i ω_B, przecinają się, tworząc trójkąt KLM (rys. 15). Wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez ω okrąg wpisany w trójkąt ABC, przez k', l' i m' - proste styczne do okręgu ω, równoległe odpowiednio do prostych k, l, m, zaś przez K', L' i M' - punkty ich przecięcia.



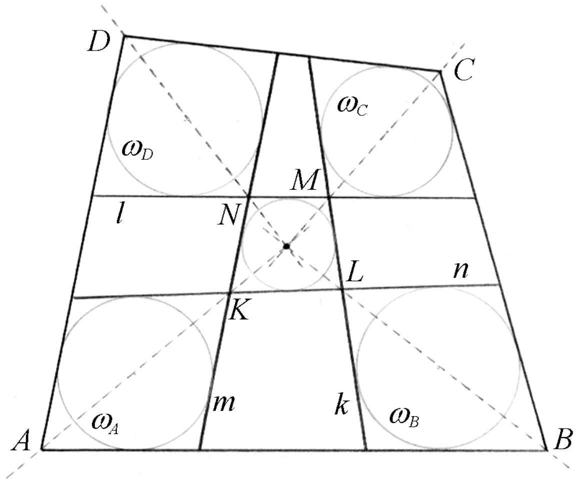
rys. 15

Rozważmy jednokładność o środku w punkcie A, przekształcającą okrąg ω_A na okrąg ω. Nietrudno stwierdzić, że obrazami prostych l i m przy tej jednokładności są odpowiednio proste l' i m'. Obrazem punktu K jest zatem punkt K'. Prosta KK' musi przechodzić przez środek jednokładności A, czyli punkty A, K i K' są współliniowe. Podobnie pokazujemy współliniowość punktów B, L i L' oraz C, M i M'. Wystarczy teraz pokazać, że proste KK', LL' oraz MM' przecinają się w jednym punkcie. Trójkąt $K'L'M'$ powstał jednak w taki sposób, by jego boki były równoległe do odpowiadających im boków trójkąta KLM. Teza zadania wynika więc natychmiast z udowodnionego powyżej twierdzenia.

Zadanie 9. (do samodzielnego rozwiązania)

Okręgi ω_A, ω_B, ω_C i ω_D leżą wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i są styczne odpowiednio do jego boków AB i AD, BA i BC, CB i CD oraz DA i DC. Proste k, l, m, n

- niezawierające boków czworokąta wspólne styczne zewnętrzne odpowiednio okręgów ω_B i ω_C, ω_C i ω_D, ω_D i ω_A oraz ω_A i ω_B, przecinają się, tworząc czworokąt $KLMN$ (rys. 16). W czworokąt ten wpisany jest okrąg ω. Wykazać, że proste AK, BL, CM i DN przecinają się w jednym punkcie.



rys. 16

Wskazówka:

Zadanie to rozwiązuje się podobnie jak poprzednie. Należy zacząć od wykazania, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Ostatnie trzy konfiguracje stanowią szczególne przypadki twierdzenia Brianchona.

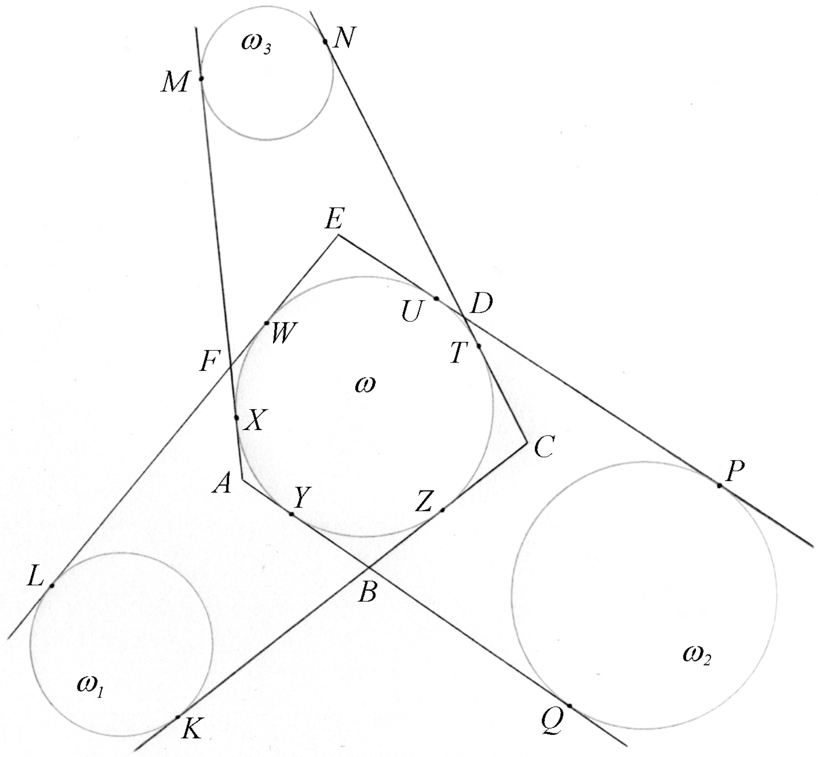
Twierdzenie Brianchona.

W sześciokącie opisanym na okręgu główne przekątne przecinają się w jednym punkcie.

Dowód.

Oznaczmy okrąg przez ω, wierzchołki opisanego nań sześciokąta przez A, B, C, D, E, F, zaś punkty styczności przez T, U, W, X, Y, Z (rys. 17). Niech okrąg ω_1 będzie styczny do prostych BC i EF w punktach K, L, okrąg ω_2 - do prostych AB i DE w punktach Q, P tak, aby $KB = BQ$, zaś okrąg ω_3 - do prostych CD i AF w punktach N, M tak, aby $PD = DN$. Wówczas, korzystając z faktu równości odcinków stycznych poprowadzonych z ustalonego punktu do danego okręgu, nietrudno wykazać, że $LW = KZ = QY = PU = NT = MX$. Dodatkowo mamy $FW = FX$. Stąd $LF = LW - FW = MX - FX = FM$.

Zauważmy, że $EW = EU$. Stąd, biorąc pod uwagę wykazaną przed chwilą równość $LW = PU$, otrzymujemy $EL = EP$. Punkt E należy zatem do osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2. Punkt B również należy do tej osi, gdyż $BK = BQ$. Widzimy więc, że prosta EB jest osią potęgową rozważanych okręgów. Analogicznie pokazujemy, że prosta CF jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω_3, zaś prosta AD - okręgów ω_2 i ω_3. Możemy zatem skorzystać z twierdzenia mówiącego o tym, że osie potęgowe trzech okręgów, których środki nie są współliniowe, przecinają się w jednym punkcie. Wynika zeń natychmiast teza zadania.



rys. 17

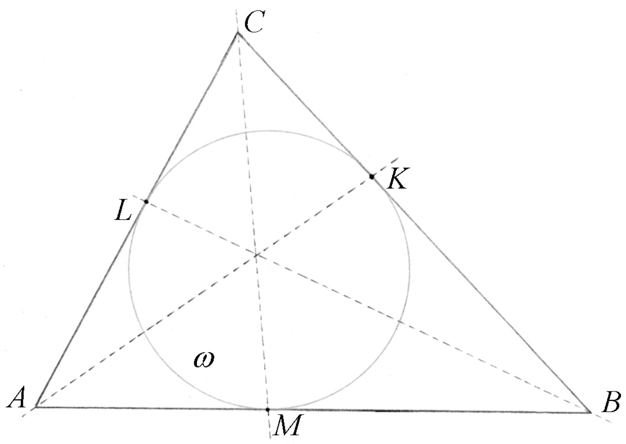
Uwaga.

Powyższe twierdzenie zachodzi również wtedy, gdy kąty przy niektórych wierzchołkach sześciokąta mają miarę $180°$.

Zadanie 10.

Dany jest okrąg ω wpisany w trójkąt ABC, styczny do jego boków AB, BC i CA odpowiednio w punktach M, K i L. Wykazać, że proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.



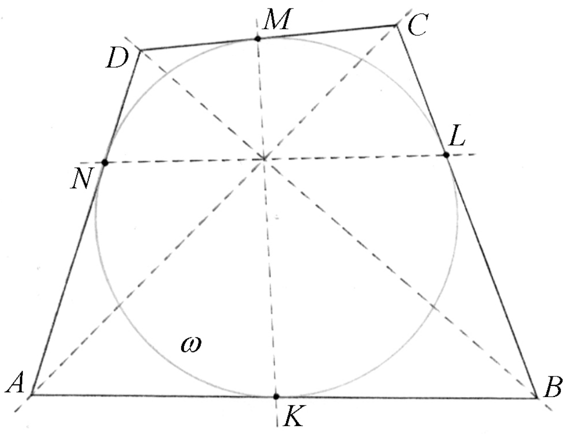
rys. 18

Rozważmy sześciokąt $AMBKCL$, w którym $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BKC = \sphericalangle CLA = 180^\circ$ (rys. 18). Jest on opisany na okręgu ω. Z twierdzenia Brianchona wynika zatem natychmiast teza zadania.

Zadanie 11.

Dany jest okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$, styczny do jego boków AB, BC, CD i DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykazać, że proste AC, BD, KM i LN przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.



rys. 19

Przyjrzyjmy się najpierw sześciokątowi $ABLCDN$, w którym $\sphericalangle BLC = \sphericalangle DNA = 180^\circ$ (rys. 19). Jest on opisany na okręgu ω. Z twierdzenia Brianchona wynika, że proste AC, DN oraz LN przecinają się w jednym punkcie. Rozważając sześciokąt $AKBCMD$, analogicznie pokazujemy, że przez punkt ich przecięcia przechodzi także prosta KM.