# Wiele jest dróg

**czyli**

# o różnych sposobach słów kilka

Barbara Roszkowska-Lech

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

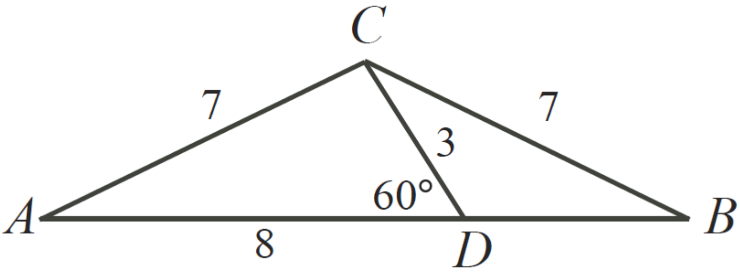
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

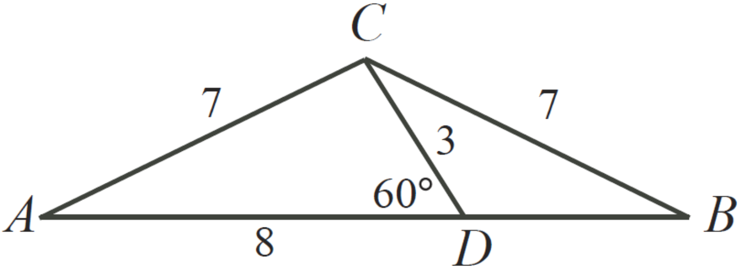
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## ZADANIE 1



## ZADANIE 1

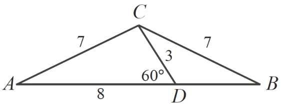



DB=?



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## ZADANIE 1




DB=x, $\angle CAD = \angle CBA = \alpha$

**Sposób 1** $\angle DCB = \frac{\pi}{3} - \alpha$

Z twierdzenia sinusów $\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sin\frac{\pi}{3}}$, czyli $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ i $\cos\alpha = \frac{13}{14}$.

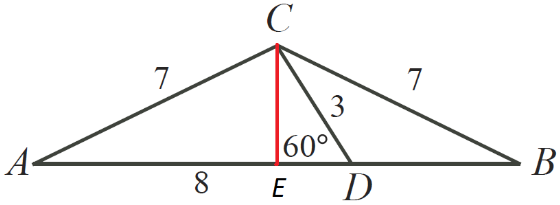
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{11}{14}$$

Z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = 3^2 + 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot\frac{11}{14} = 25,$$

czyli $x = 5$.

## ZADANIE 1




$DB = x$

## Sposób 2

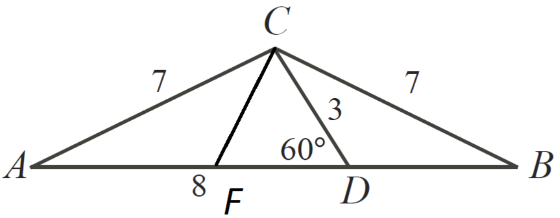
$$ED = 1,5$$

$$AE = EB = 6,5$$

$$x = 6,5 - 1,5 = 5$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## ZADANIE 1




DB=x

## Sposób 3

$$\angle CFD = \frac{\pi}{3}$$

$$FD = 3$$

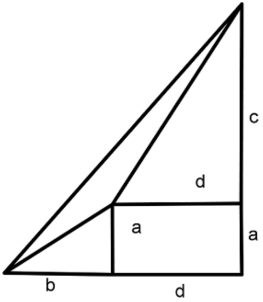
$$AF = DB = 5$$

ZADANIE 2 Udowodnić, że jeśli $a$, $b$, $c$, $d$ są liczbami dodatnimi oraz $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, to

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## Rozwiązanie




$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c+a}{b+d} < \frac{c}{d}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

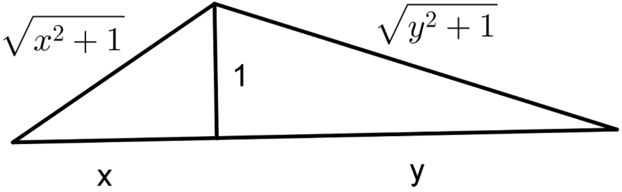
ZADANIE 3 (**VII OMG**) Czy istnieją takie liczby rzeczywiste $x, y$, dla których

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x+y?$$

ZADANIE 3 (**VII OMG**) Czy istnieją takie liczby rzeczywiste $x, y$, dla których

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = x + y?$$

Rozwiązanie



ZADANIE 4 Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}.$$

ZADANIE 4 Rozwiązać równanie

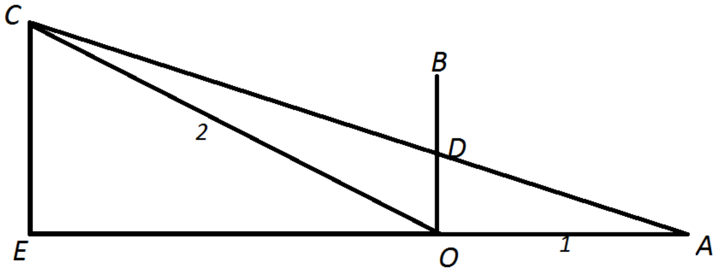
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}.$$

Rozwiązanie

Jeśli $x \leq 0$, to

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+4} \geq 1+2 > \sqrt{5+2\sqrt{3}}.$$

Zatem $x > 0$

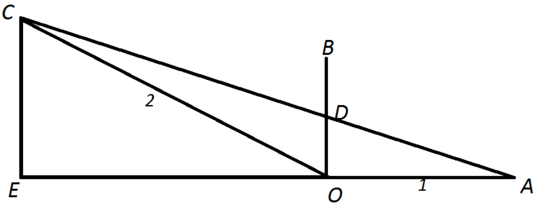



$OB = x, \qquad CO = 2, \qquad OA = 1, \qquad \angle COB = \frac{\pi}{3}$

$$BC = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$AB = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad AC = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego




$AB + BC = AC$, czyli $B = D$ oraz $x = OD$. Ponieważ $CE = 1$ oraz $EO = \sqrt{3}$, zatem z twierdzenia Talesa

$$\frac{CE}{AE} = \frac{x}{1}$$

czyli

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

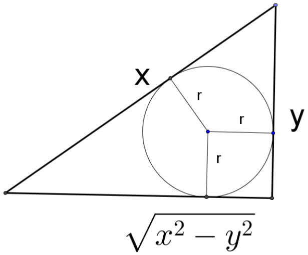
ZADANIE 5 Rozwiązać układ równań, gdzie x,y sa dodatnimi liczbami rzeczywistymi

$$y\sqrt{x^2 - y^2} = 48$$
$$x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 24$$

ZADANIE 5 Rozwiązać układ równań, gdzie x,y sa dodatnimi liczbami rzeczywistymi

$$y\sqrt{x^2-y^2}=48$$
$$x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24$$

## Rozwiązanie



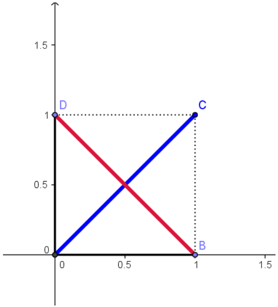
**ZADANIE 6** Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}=\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{2} \end{cases}$$

## ZADANIE 6 Rozwiązać układ równań

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{2}$$

## Rozwiązanie



ZADANIE 7 Rozwiązać układ równań

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \sqrt{1+x_3} + \sqrt{1+x_4} &= 2\sqrt{5}\\
\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + \sqrt{1-x_4} &= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 7 Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \sqrt{1+x_3} + \sqrt{1+x_4} &= 2\sqrt{5} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + \sqrt{1-x_4} &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\vec{u_i} = [\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i}]$$

Łatwo sprawdzić, że $|\vec{u_i}| = \sqrt{2}$ oraz

$$\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} + \vec{u_4} = [2\sqrt{5}, 2\sqrt{3}].$$

Czyli

$$|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} + \vec{u_4}| = |\vec{u_1}| + |\vec{u_2}| + |\vec{u_3}| + |\vec{u_4}|.$$

Ponadto wektory $\overrightarrow{u_i}$ mają jednakowe długości- są więc równe!

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ponadto wektory $\overrightarrow{u_i}$ mają jednakowe długości- są więc równe!

Teraz już łatwo dokończyć

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}).$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 8 (**Putnam Competition 1984**) Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(u,v) = (u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})^2,$$

dla $0 < u < \sqrt{2}, \qquad v > 0.$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 8 (**Putnam Competition 1984**) Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(u,v) = (u-v)^2 + \left(\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v}\right)^2,$$

dla $0 < u < \sqrt{2}$, $\qquad v > 0$.

Rozwiązanie

$f(u,v)$ to kwadrat odległości między punktami $U = (u, \sqrt{2-u^2})$ oraz $V = (v, \frac{9}{v})$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 8 (**Putnam Competition 1984**) Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(u,v) = (u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})^2,$$

dla $0 < u < \sqrt{2}, \qquad v > 0.$

Rozwiązanie

$f(u,v)$ to kwadrat odległości między punktami $U = (u, \sqrt{2-u^2})$ oraz $V = (v, \frac{9}{v})$.

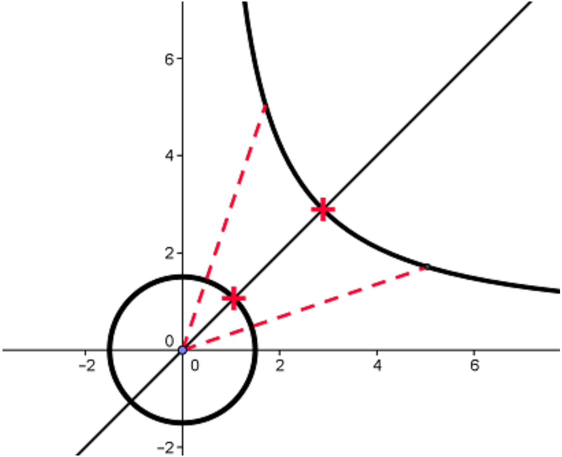
Pierwszy punkt leży na okręgu

$$x^2 + y^2 = 2$$

a drugi na gałęzi hiperboli

$$y = \frac{9}{x}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego


6
4
2
0
-2
-2
0
2
4
6

ZADANIE 9(**XLV OM**)Liczby dodatnie p oraz q spełniaja warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $m$ oraz $n$ zachodzi nierówność

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$$

Rozwiązanie W tablicy o n wierszach i m kolumnach wpisujemy z prawdopodobieństwem p liczbę 0 a z prawdopodobieństwem q liczbę 1.
Prawdopodobieństwo, że w każdym wierszu chociaż jedno zero

$$(1 - q^m)^n$$

ZADANIE 9 (**XLV OM**)Liczby dodatnie p oraz q spełniaja warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $m$ oraz $n$ zachodzi nierównośc

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1.$$

Rozwiązanie W tablicy o n wierszach i m kolumnach wpisujemy z prawdopodobieństwem p liczbe 0 a z prawdopodobieństwem q liczbę 1.
Prawdopodobieństwo, że w każdym wierszu chociaż jedno zero

$$(1 - q^m)^n.$$

Prawdopodobieństwo, że w każdej z m kolumn chociaż jedna 1

$$(1 - p^n)^m.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZADANIE 9(**XLV OM**)Liczby dodatnie p oraz q spełniaja warunek $p + q = 1$. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $m$ oraz $n$ zachodzi nierównośc

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1.$$

Rozwiązanie W tablicy o n wierszach i m kolumnach wpisujemy z prawdopodobieństwem p liczbe 0 a z prawdopodobieństwem q liczbę 1.
Prawdopodobieństwo, że w każdym wierszu chociaż jedno zero

$$(1 - q^m)^n.$$

Prawdopodobieństwo, że w każdej z m kolumn chociaz jedna 1

$$(1 - p^n)^m.$$

Jedno z tych zdarzeń musi zajść, gdyż jeśli w pewnym wierszu same jedynki to jedynka będzie w każdej kolumnie. Zatem

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1.$$