

# Pomyśl zanim sprawdzisz

(i sprawdź zanim ocenisz)

Łukasz Bożyk

student, Wydział MIM UW

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **cz**erwono, a Bartek na **niebiesko**.

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **cz**erwono, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

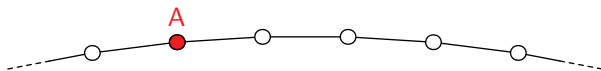
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **cz**erwono, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



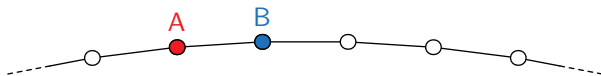
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



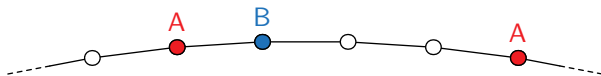
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



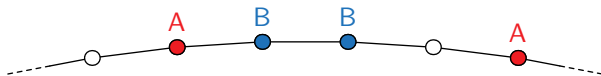
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

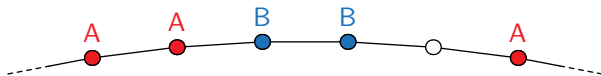
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.





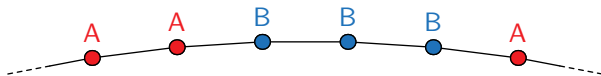
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czzerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

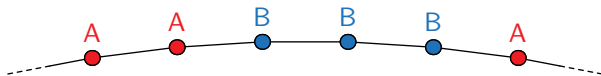
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **czczerwono**, a Bartek na **niebiesko**.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

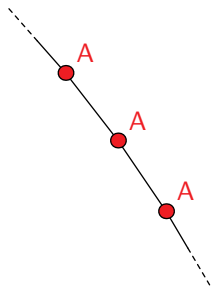
Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.



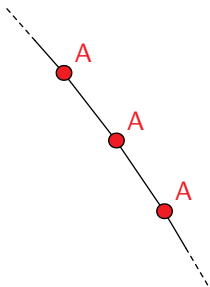
- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.

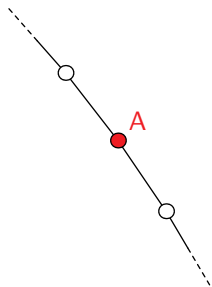


- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.

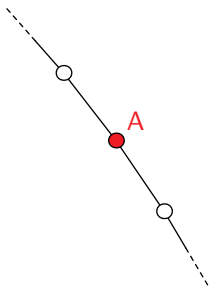


- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

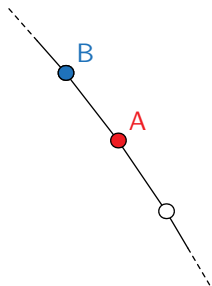




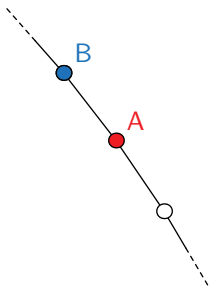
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



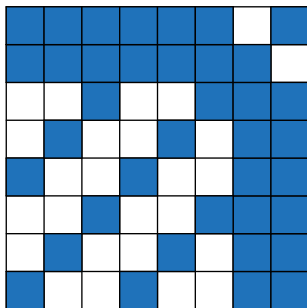
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



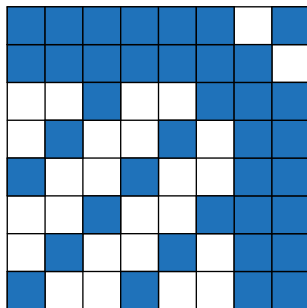
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.
- 5) Skoro przypuszczenie o wygranej Ani doprowadziło do sprzeczności, to opisana strategia Bartka jest nieprzegrywająca.

Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**.

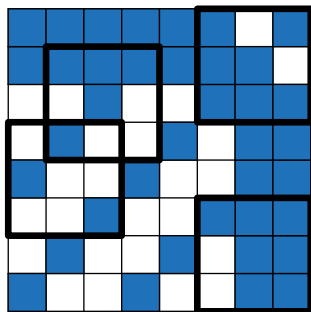
Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**.



Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach  $3 \times 3$ , złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba **białych** pól.



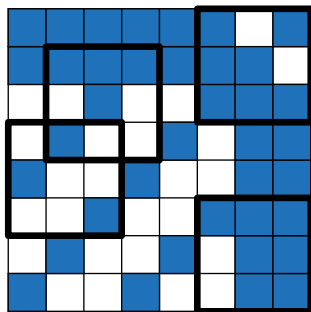
Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach  $3 \times 3$ , złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba **białych** pól.

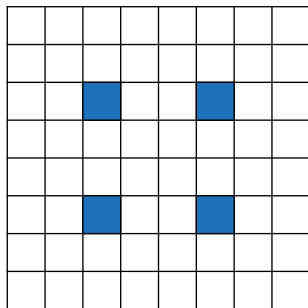




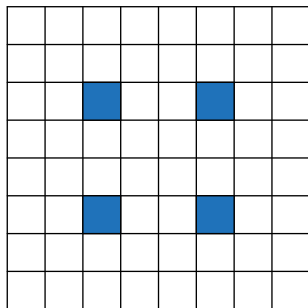
Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach  $3 \times 3$ , złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba **białych** pól.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba **niebieskich** pól w całej tablicy?  
Odpowiedź uzasadnij.

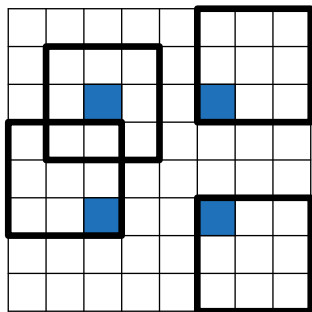




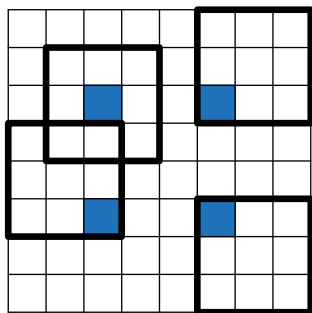
- 1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).



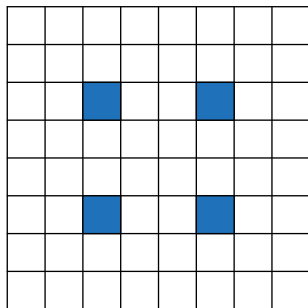
- 1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białe).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.



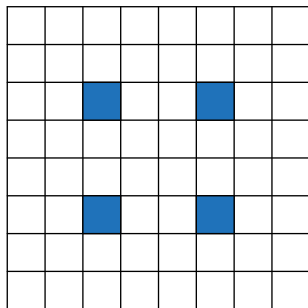
- 1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białe).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.



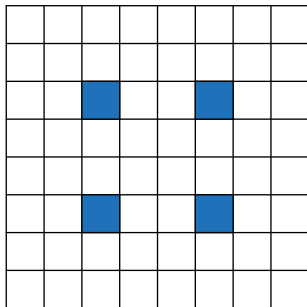
- 1) Na niebiesko pokolorujemy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.
- 3) Z warunków zadania wynika, że w każdym takim kwadracie musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ .

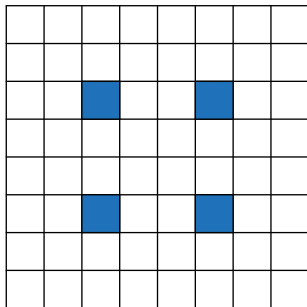


- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach.



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

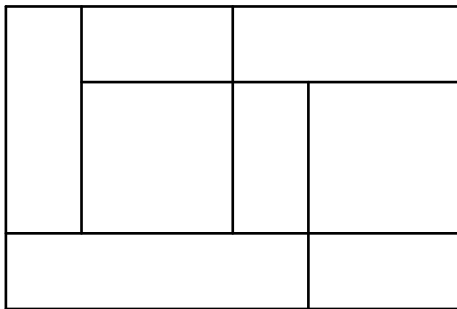




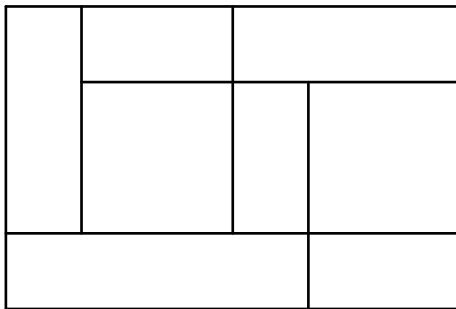
- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.
- 5) Rysunek pokazuje, że liczba 4 jest osiągalna, jest więc odpowiedzią na postawione w zadaniu pytanie.

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty.

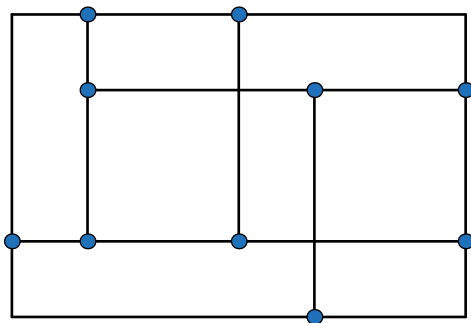
Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty.



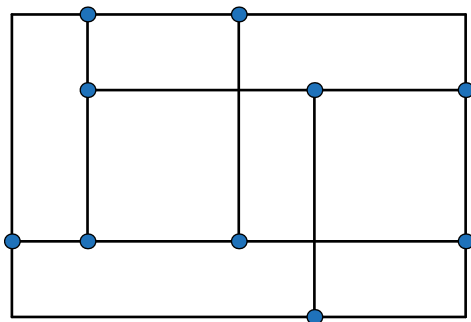
Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów.



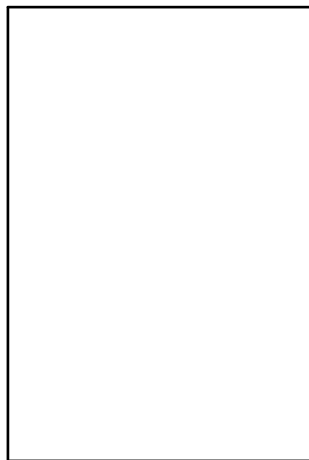
Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów.



Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.

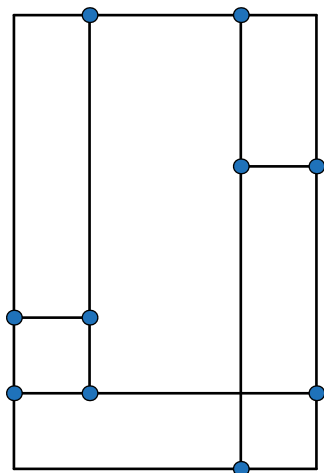


- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.

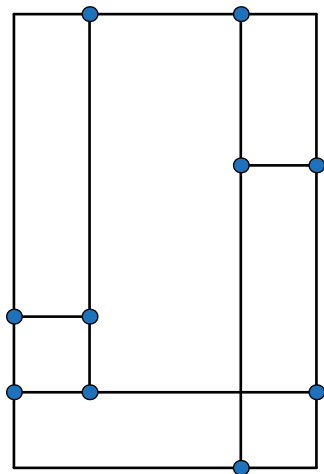


- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.
- 2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).

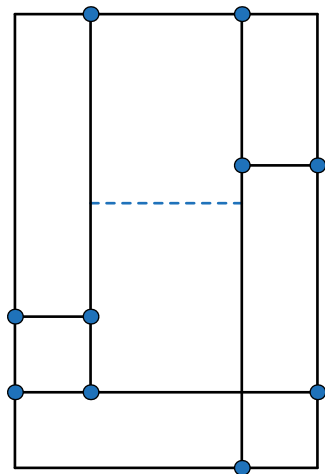




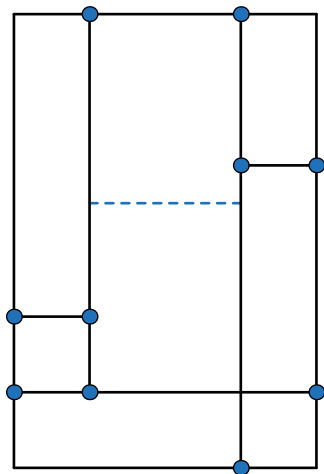
- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.
- 2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).
- 3) Załóżmy, że prostokąt jest podzielony na  $k$  małych prostokątów ( $k \geq 1$ ) w taki sposób, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



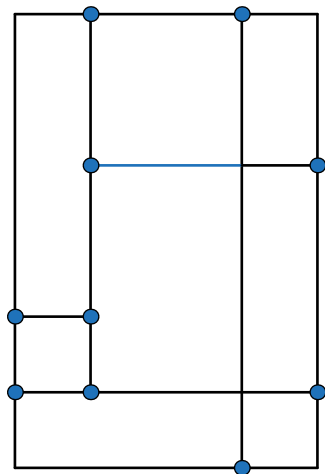
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów.



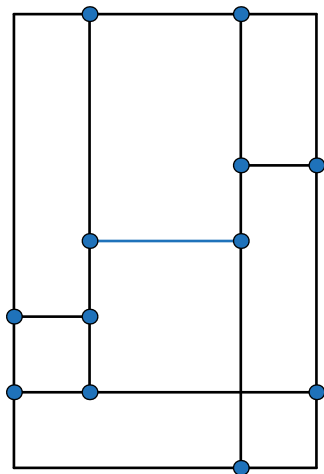
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów.



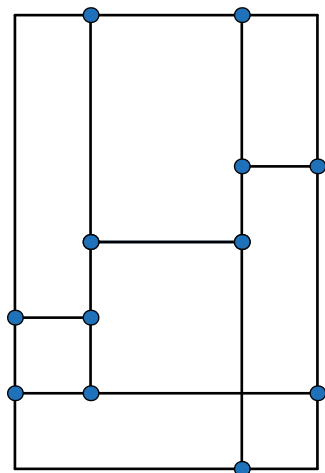
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



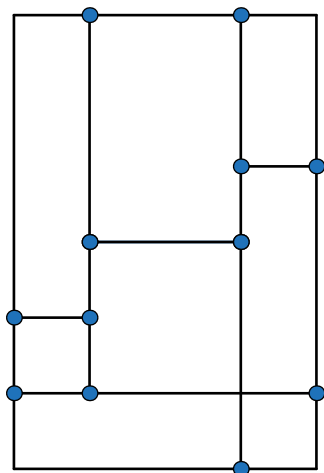
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

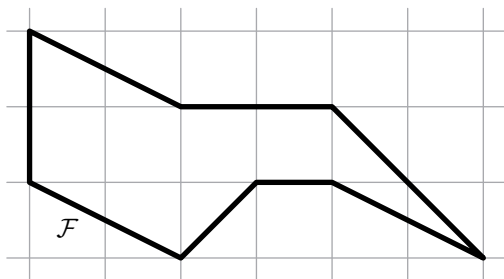


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

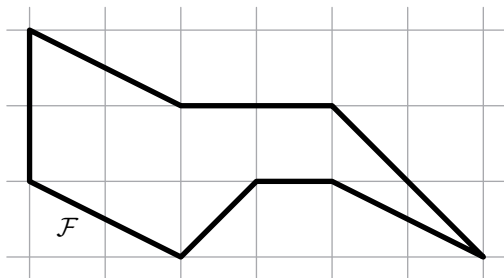


Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym.

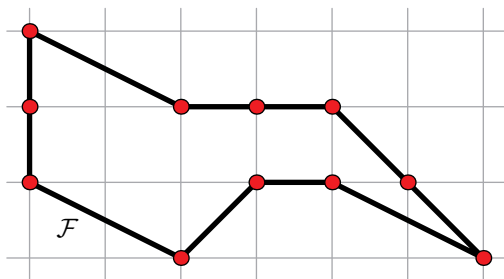
Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym.



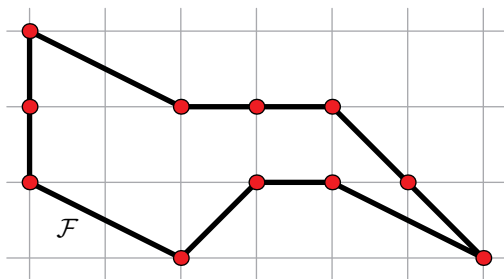
Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$



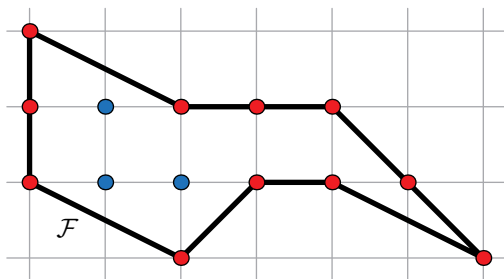
Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$



Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$ , a przez  $I$  — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.



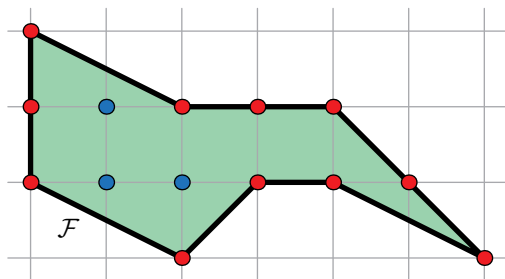
Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$ , a przez  $I$  — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

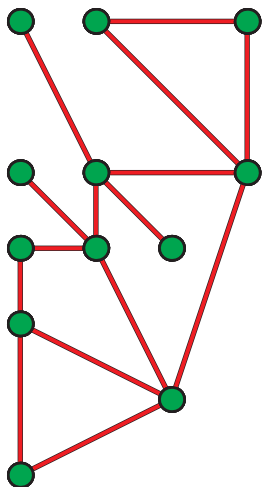


Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$ , a przez  $I$  — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

Udowodnij, że pole  $P$  wielokąta  $\mathcal{F}$  wyraża się wzorem

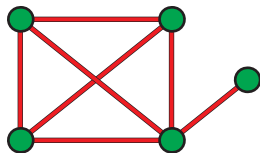
$$P = I + B/2 - 1.$$



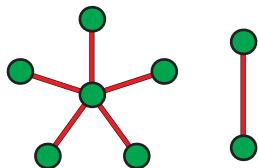
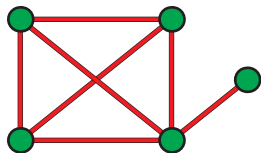


- *Graf* to (obrazowo) **wierzchołki** i **krawędzie** łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączą co najwyżej jedną krawędź.

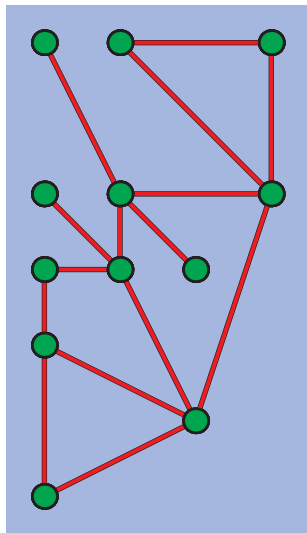




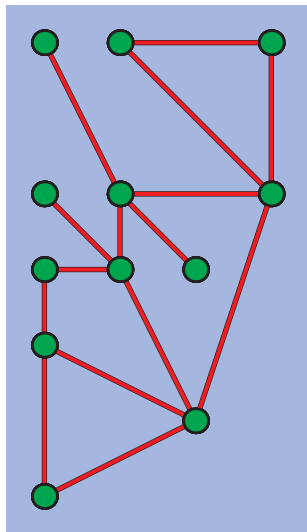
- *Graf* to (obrazowo) **wierzchołki** i **krawędzie** łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź.
- Graf *spójny* to graf „w jednym kawałku” (z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego).



- *Graf* to (obrazowo) **wierzchołki** i **krawędzie** łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź.
- Graf *spójny* to graf „w jednym kawałku” (z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego).
- Graf *płaski* to graf narysowany na płaszczyźnie tak, że żadne dwie jego krawędzie się nie przecinają.

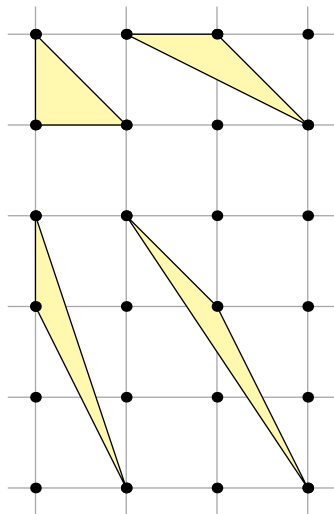


- *Ścianą* nazwiemy każdy z obszarów, na które krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę (jeden z nich jest nieograniczony).

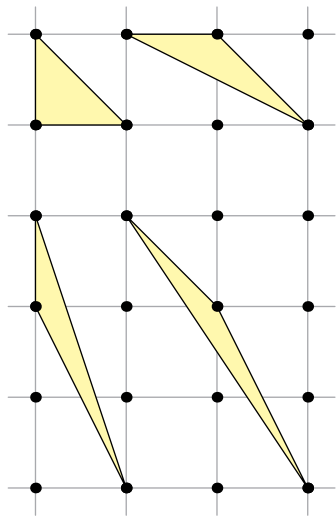


- *Ścianą* nazwiemy każdy z obszarów, na które krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę (jeden z nich jest nieograniczony).
- **Wzór Eulera**  
Jeżeli spójny graf płaski ma  $W$  wierzchołków,  $K$  krawędzi i  $S$  ścian, to

$$W - K + S = 2.$$

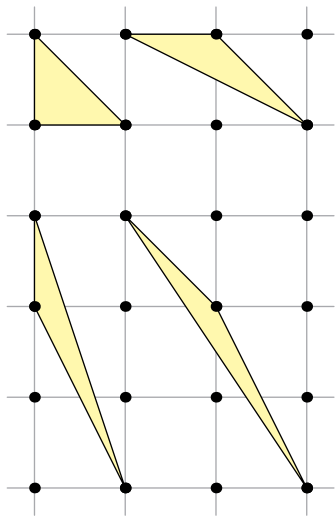


- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.



- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

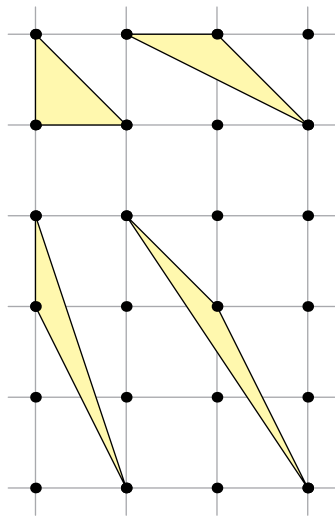
Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli  $I + B = 3$ .



- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli  $I + B = 3$ .

- **Lemat (o małych trójkątach)**  
Każdy mały trójkąt ma pole  $\frac{1}{2}$ .



- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli  $I + B = 3$ .

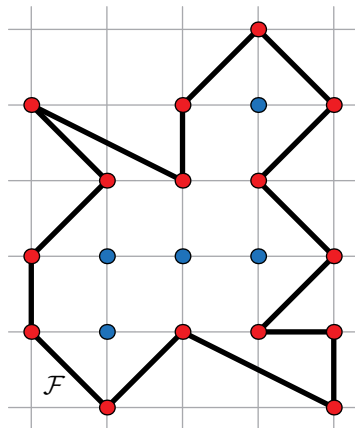
- **Lemat (o małych trójkątach)**  
Każdy mały trójkąt ma pole  $\frac{1}{2}$ .

Przejdźmy do dowodu wzoru Picka.

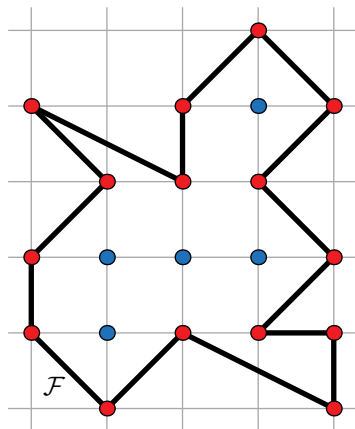




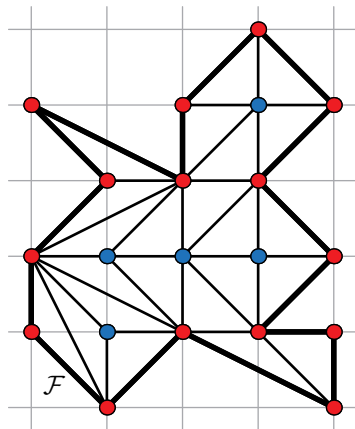
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $l$ .



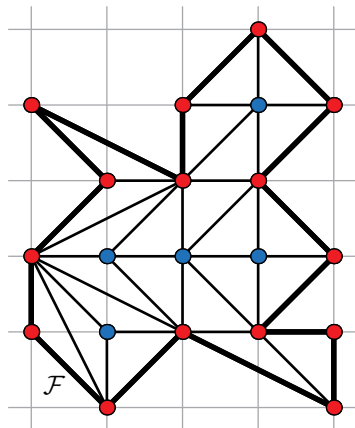
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .



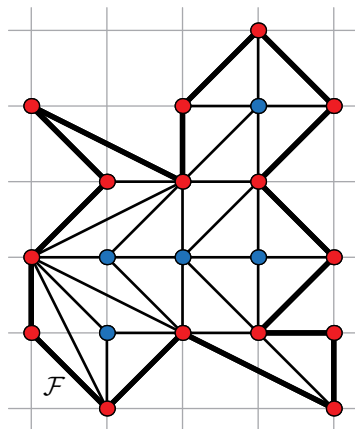
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.



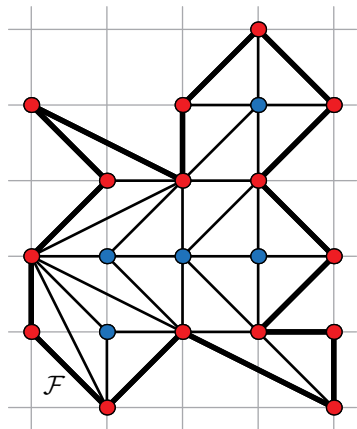
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .

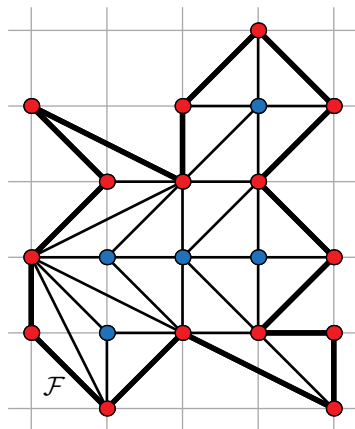


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

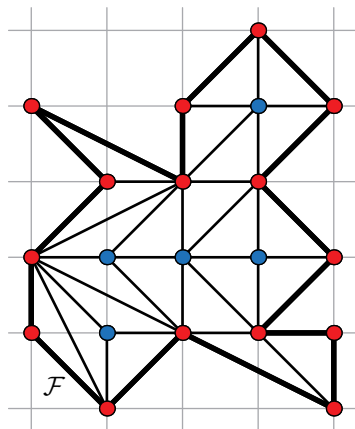


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$



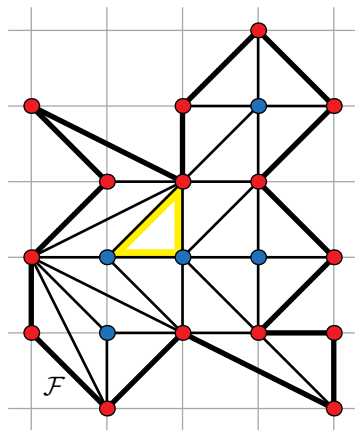


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

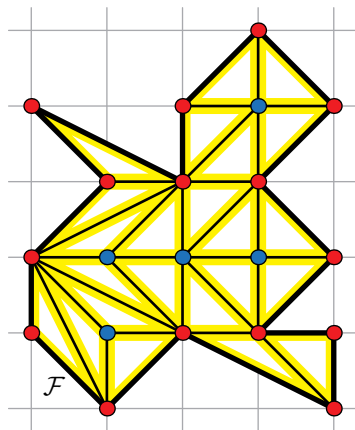
$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

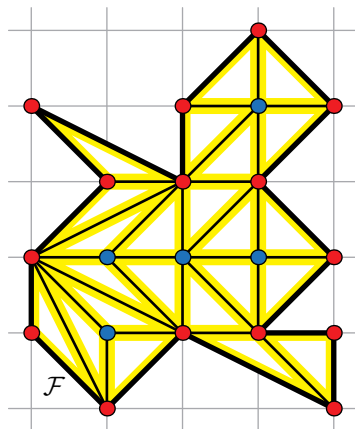
Co można powiedzieć o liczbie krawędzi tego grafu?



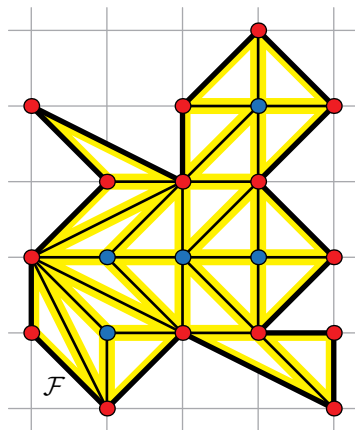
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki.



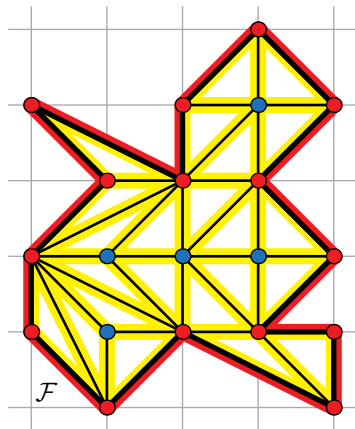
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$



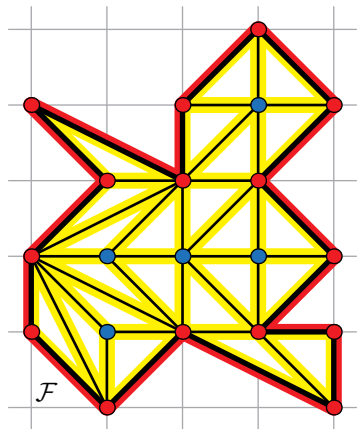
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie



- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

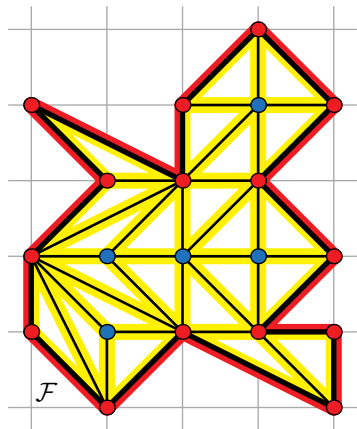


- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ .



- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ . To oznacza, że

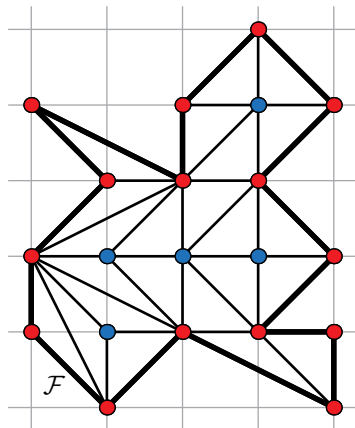
$$2K = 3T + B.$$



- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ . To oznacza, że

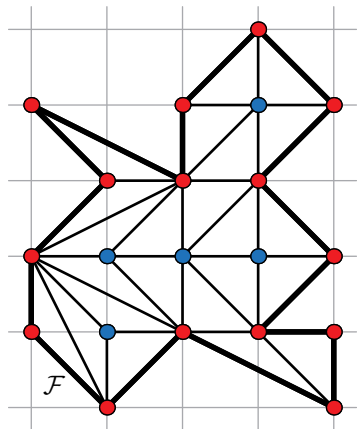
$$K = \frac{3T + B}{2}.$$





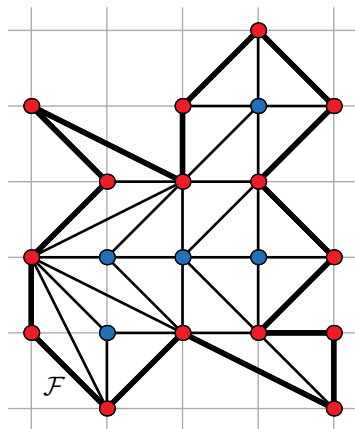
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = W - K + S.$$



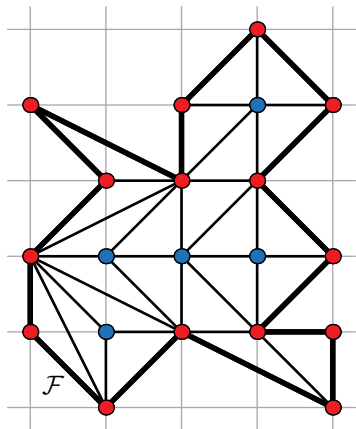
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T + 1.$$



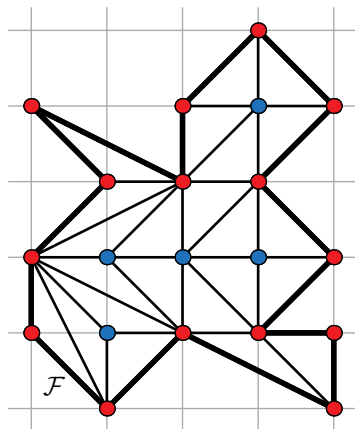
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$0 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T - 1.$$



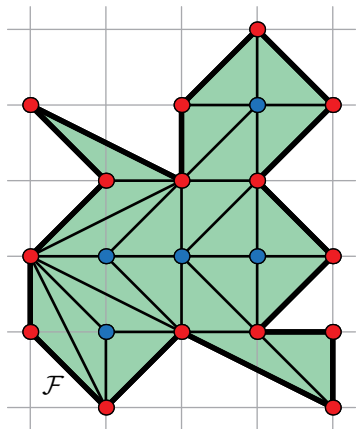
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

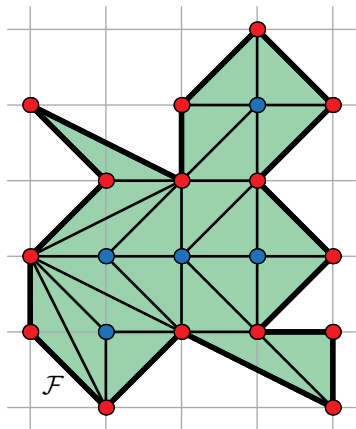
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$



- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ .

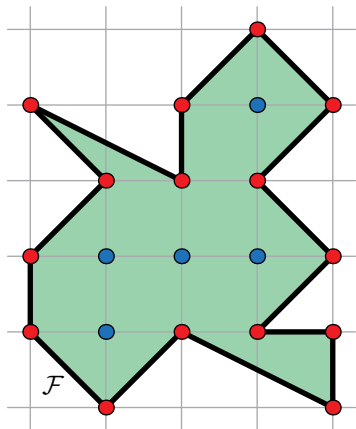


- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec  
 tego

$$P = \frac{T}{2}$$



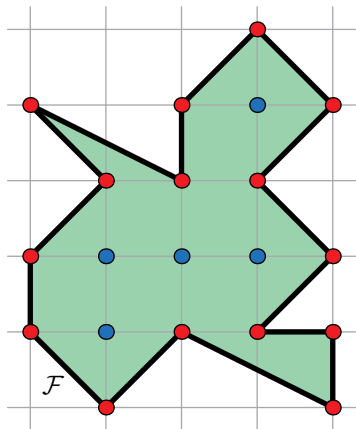
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec  
 tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$





- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec  
 tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

a to właśnie jest wzór Picka!



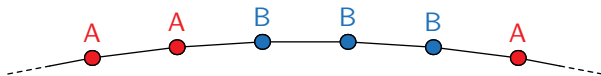
A teraz... szukamy „blefów”!

91

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na **cz**erwono, a Bartek na **nie**biesko.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.



- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

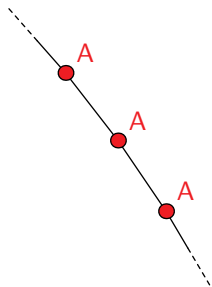
Czy jeśli oba są wolne, to któryś jest preferowany?



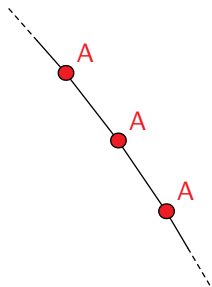
- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

Czy jeśli oba są wolne, to któryś jest preferowany? A co jeżeli już obydwa są zajęte?

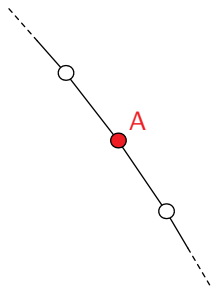
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



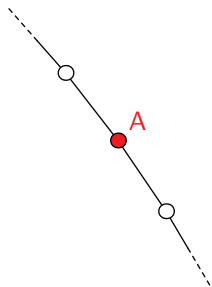
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



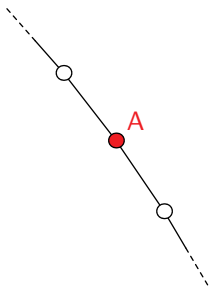
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



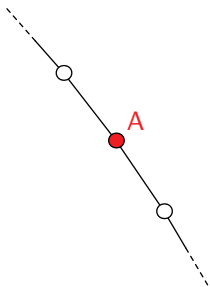
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



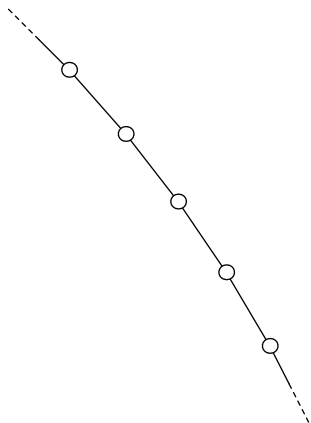
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

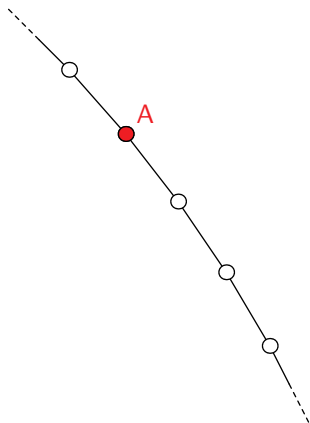
No chyba, że Ania właśnie wygrała...





- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

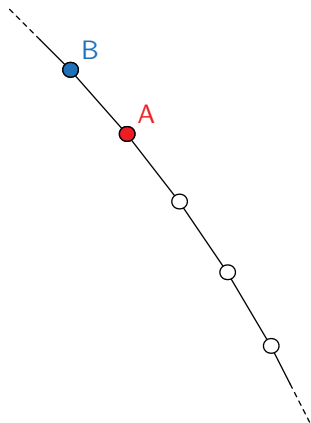
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

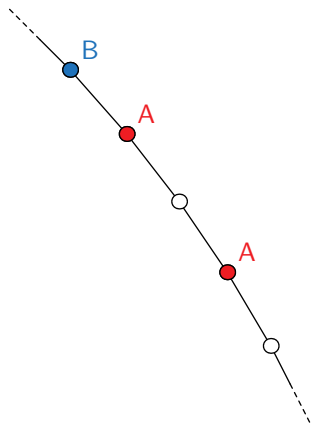
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

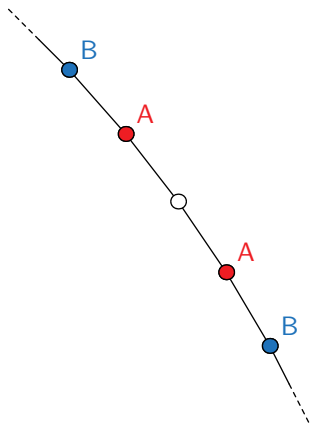
4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

No chyba, że Ania właśnie wygrała...



- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

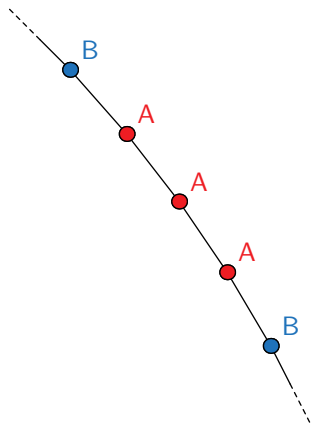
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

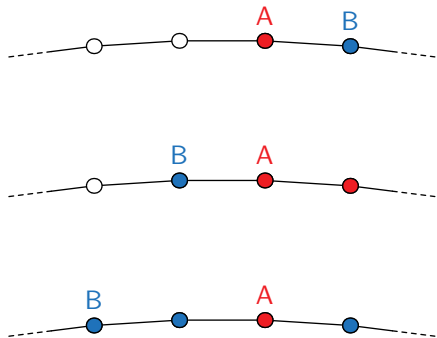
4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

No chyba, że Ania właśnie wygrała...



- Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

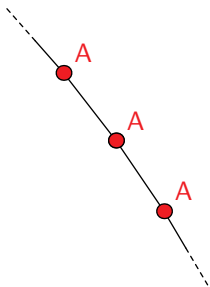
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



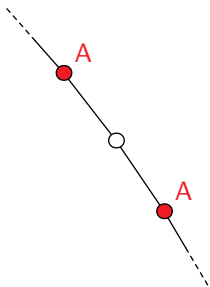
- 1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
- 2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *późniejszego* (zegarowo) niż pokolorowany w danej rundzie przez Anię, *wcześniejszego* jeżeli późniejszy jest zajęty lub dowolnego innego, gdy obydwa są zajęte.

- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.





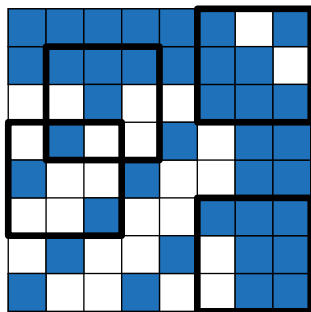
- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków lub Ania właśnie wygrała.

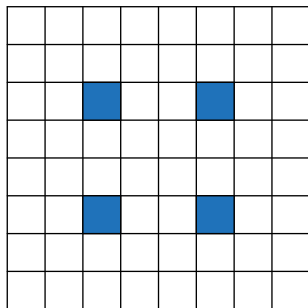


- 3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.
- 4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków lub Ania właśnie wygrała.
- 5) To oznaczałoby, że środkowy wierzchołek pozostał biały po rundzie, w której Ania pokolorowała wcześniejszy z wierzchołków w swojej trójce...

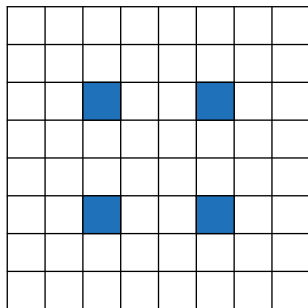
Każde pole tablicy o wymiarach  $8 \times 8$  pomalowano na **niebiesko** lub **biało**. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach  $3 \times 3$ , złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba **białych** pól.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba **niebieskich** pól w całej tablicy?  
Odpowiedź uzasadnij.

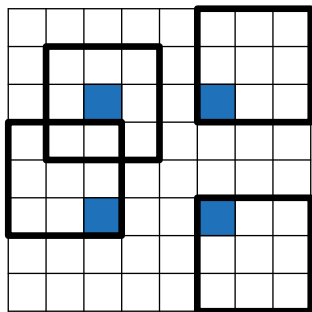




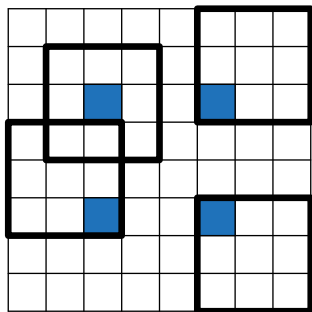
- 1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).



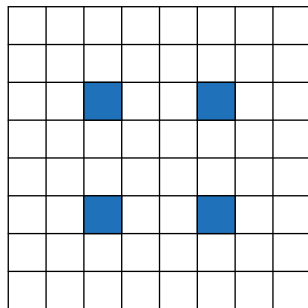
- 1) Na niebiesko pokolorujemy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.



- 1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.

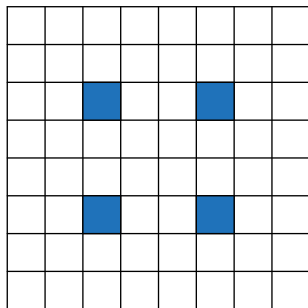


- 1) Na niebiesko pokolorujemy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na białą).
- 2) Wówczas każdy kwadrat  $3 \times 3$  zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.
- 3) Z warunków zadania wynika, że w każdym takim kwadracie musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).

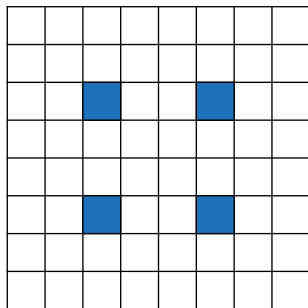


- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ .

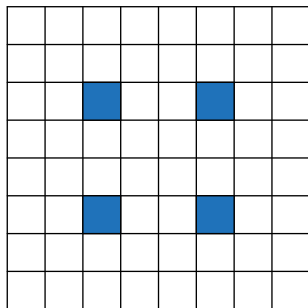




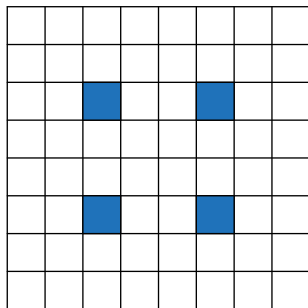
- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach.



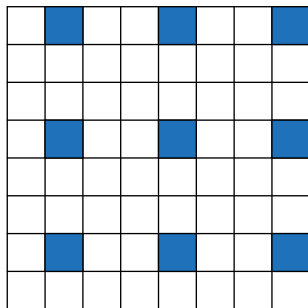
- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.



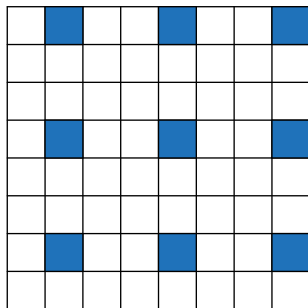
- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4. Nie wynika.



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4. Nie wynika.



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na białe skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

Nie wynika. Rysunku nie da się poprawić, ale to nie znaczy, że nie ma lepszego!



**Maksymalny, ale czy największy?**  
 W naszym drugim w tym tygodniu odcieku OMO wiele kłopotów sprawiał zadanie 4. Proponujemy jego rozwiązanie.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na jeden kolor z listy spośród, ale każdy punkt tylko jednego koloru lub niekolorowy. Jaką najwięcej punktów można uzyskać, nie kolorując żadnego punktu?

Wiele uwagi poświęcało przede wszystkim na to, jak jeden z kolorów pomalować, które zostały tylko niekolorowy. Wskazywano na to, że każdy punkt należy pomalować na jeden kolor z listy spośród, ale każdy punkt tylko jednego koloru lub niekolorowy. Wskazywano na to, że każdy punkt należy pomalować na jeden kolor z listy spośród, ale każdy punkt tylko jednego koloru lub niekolorowy.

Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).

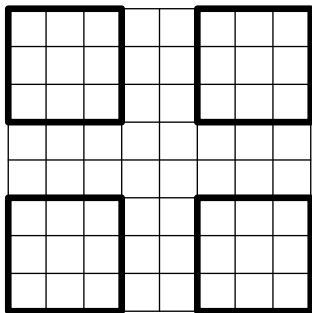
Wskazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii). Wykazywano, że nie da się pomalować płaszczyzny tak, aby każdy punkt był kolorowy. Zauważono, że pomalowanie w odpowiedni sposób punktów płaszczyzny nie jest możliwe na całej płaszczyźnie (na przykład wzdłuż linii).



- 4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów  $3 \times 3$ . Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu  $3 \times 3$  o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

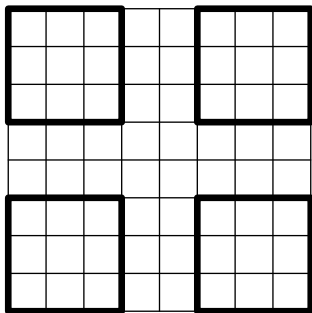
W. Guzicki  
 „Maksymalny, ale czy największy?”  
 Kwadrat nr 8 (marzec 2013)

Nie wynika. Rysunku nie da się poprawić, ale to nie znaczy, że nie ma lepszego!

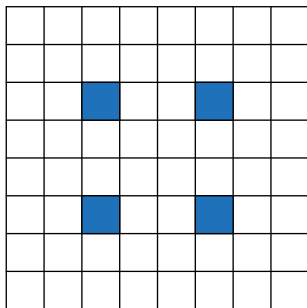


- 1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest *co najwyżej* osiem pól białych).



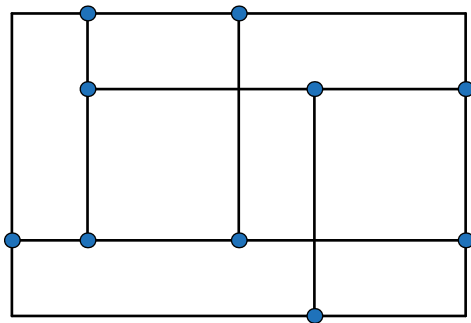


- 1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest *co najwyżej* osiem pól białych).
- 2) Wyróżnione kwadraty pokrywają *różne* pola, wobec czego w całej tablicy są *co najmniej* 4 pola niebieskie.

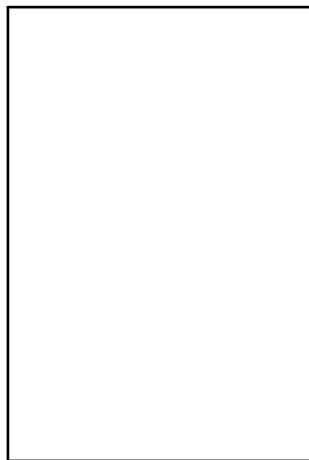


- 1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).
- 2) Wyróżnione kwadraty pokrywają *różne* pola, wobec czego w całej tablicy są *co najmniej* 4 pola niebieskie.
- 3) Rysunek pokazuje, że liczba 4 jest osiągalna, jest więc odpowiedzią na postawione w zadaniu pytanie.

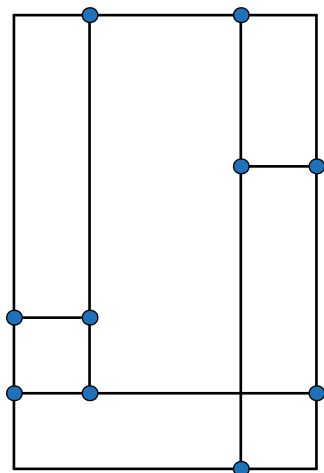
Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



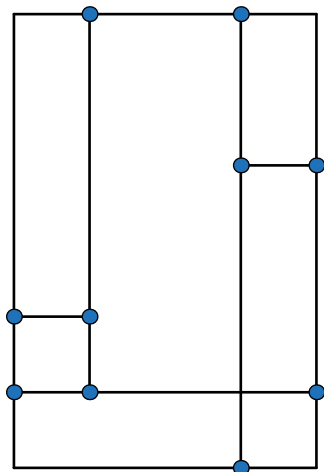
- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.



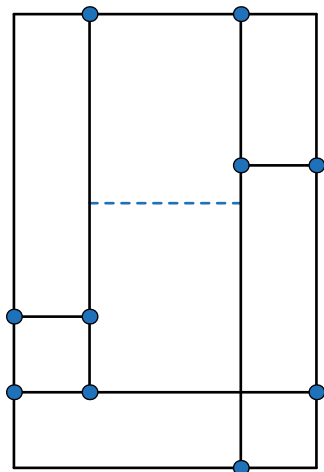
- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.
- 2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).



- 1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.
- 2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).
- 3) Załóżmy, że prostokąt jest podzielony na  $k$  małych prostokątów ( $k \geq 1$ ) w taki sposób, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.

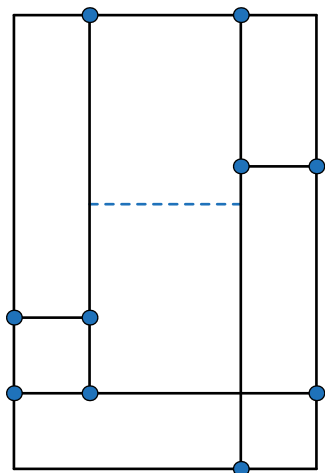


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów.

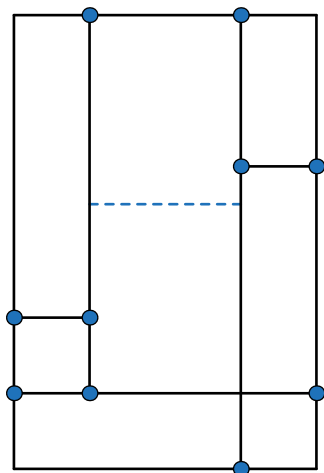


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów.

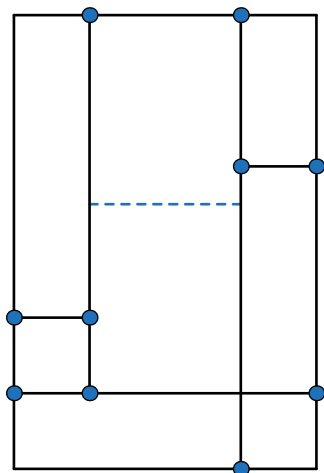




- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

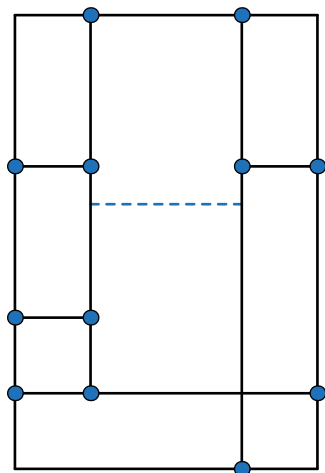


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**



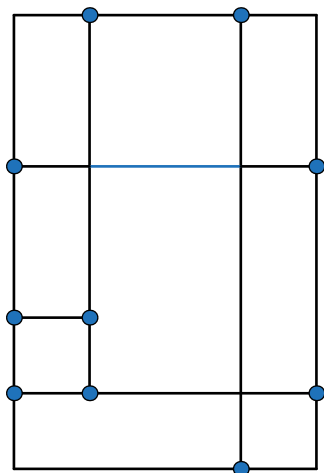
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**

Może się też zmniejszyć o dwa...



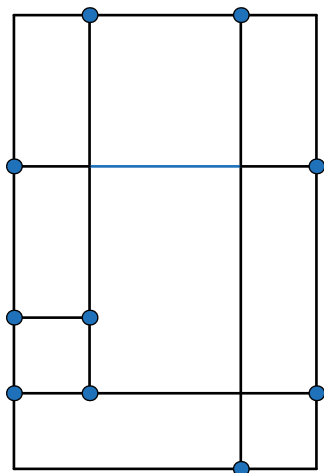
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**

Może się też zmniejszyć o dwa...



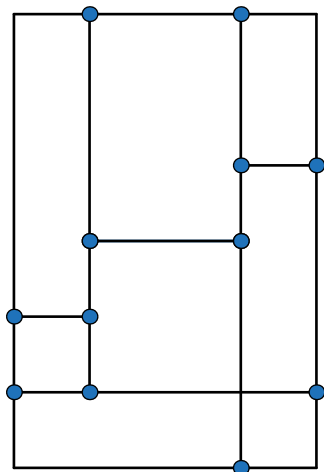
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**

Może się też zmniejszyć o dwa...

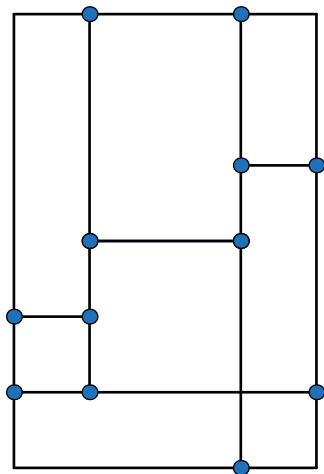


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**

Może się też zmniejszyć o dwa...  
Ale to też nie zmienia parzystości.

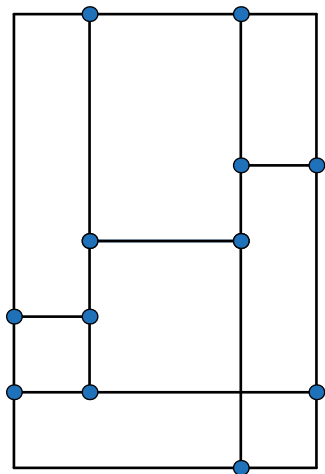


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

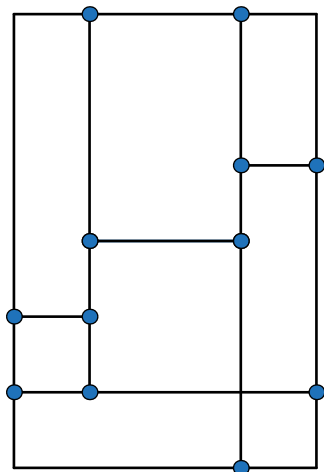


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.



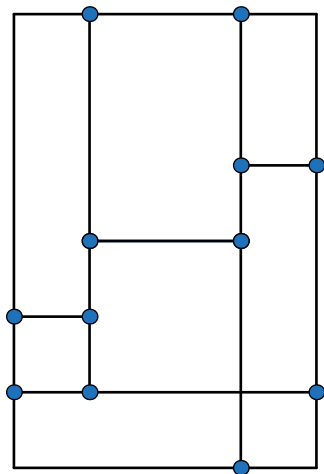


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.



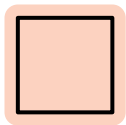
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

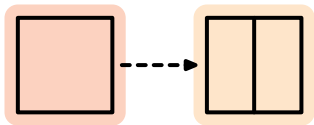
Dlaczego uzyskamy wszystkie możliwe podziały?

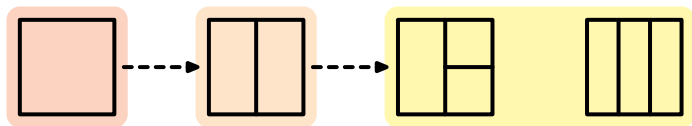


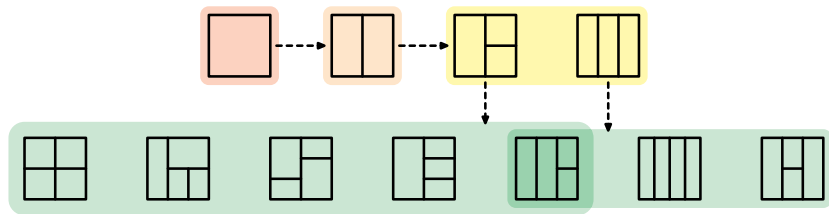
- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

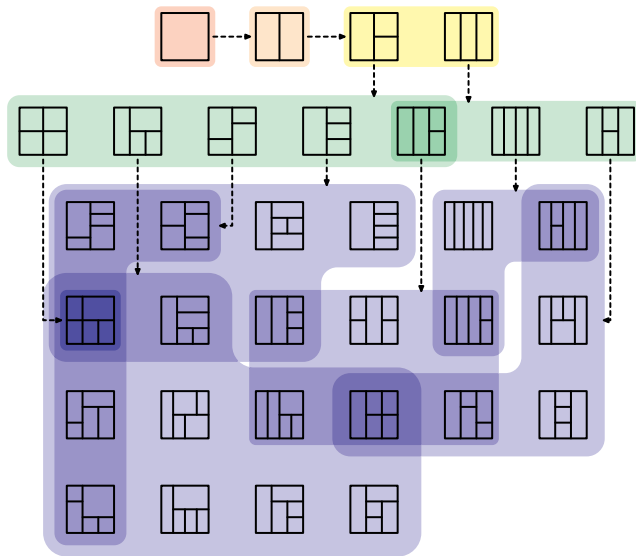
Czy uzyskamy wszystkie możliwe podziały?



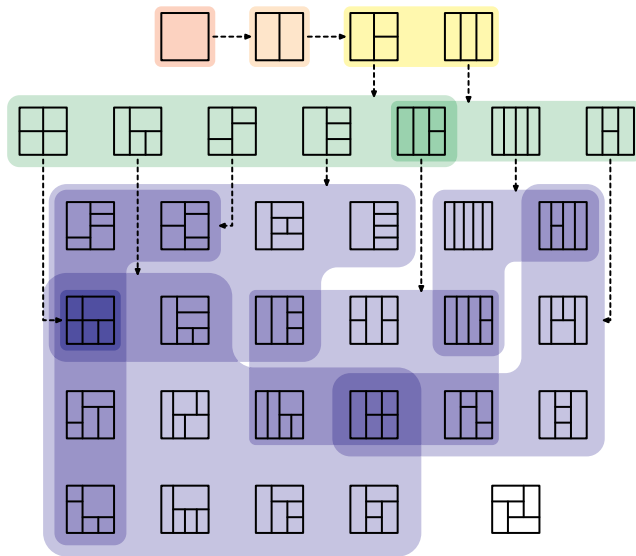


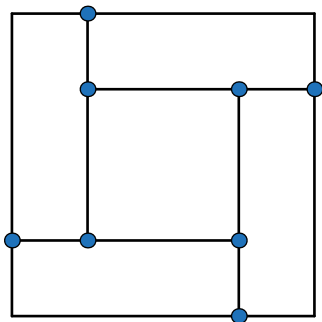






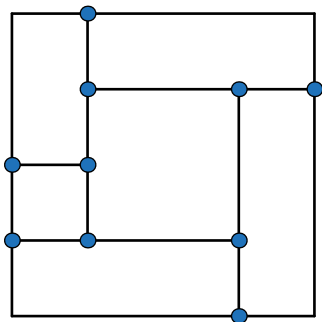




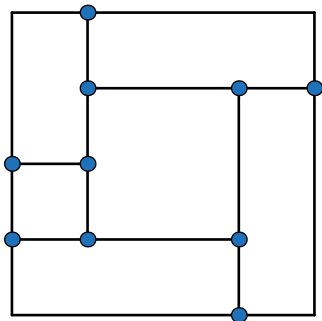


- 4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na  $k + 1$  prostokątów. **Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.**
- 5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.
- 6) **Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na  $n$  małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.**

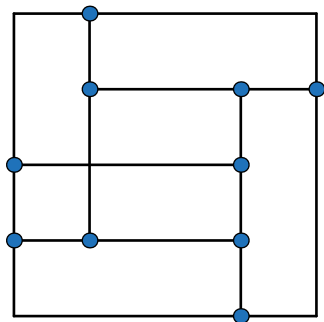
Czy uzyskamy wszystkie możliwe podziały? **Nie.**



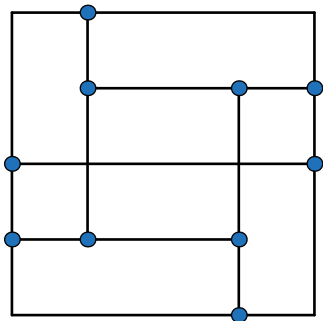
- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.



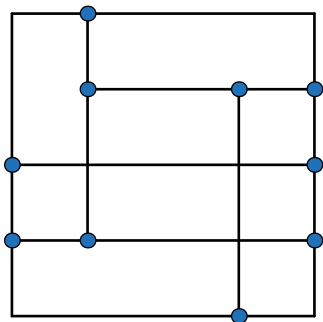
- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



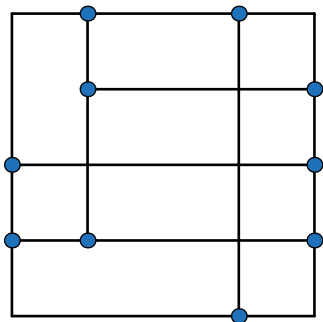
- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

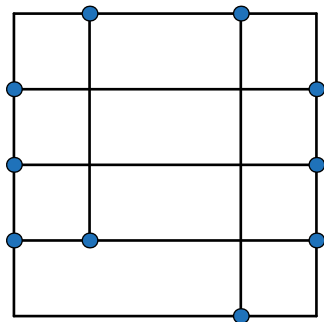


- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

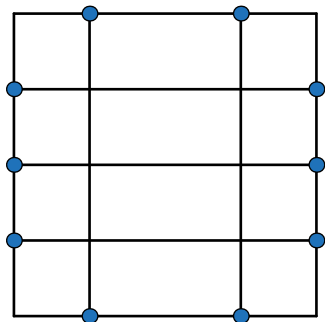


- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

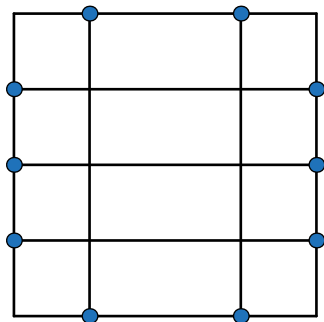




- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

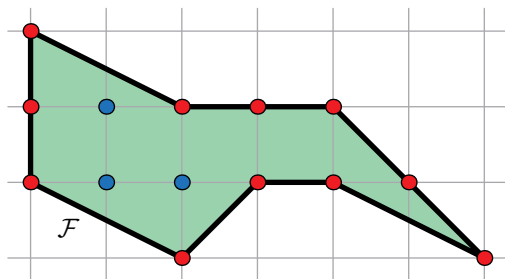


- 1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.
- 2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.
- 3) Liczba wyróżnionych punktów jest parzysta, więc była taka także w wyjściowym podziale.

Niech  $\mathcal{F}$  będzie wielokątem kratowym. Przez  $B$  oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta  $\mathcal{F}$ , a przez  $I$  — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

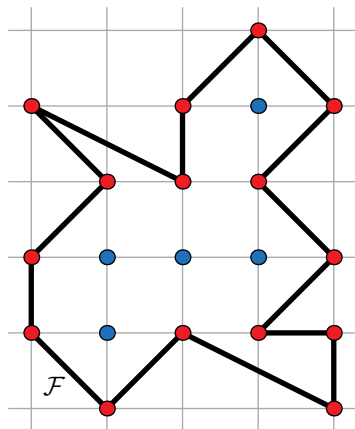
Udowodnij, że pole  $P$  wielokąta  $\mathcal{F}$  wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$

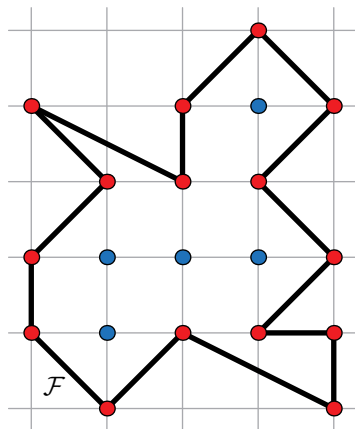




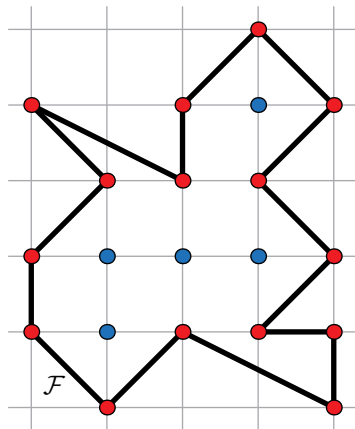
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .

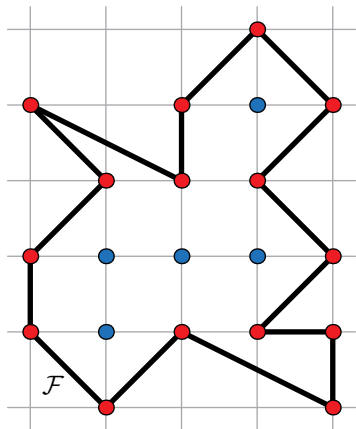


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

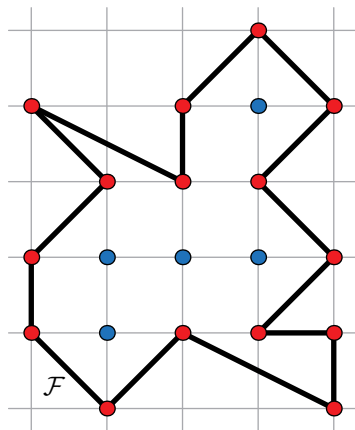


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

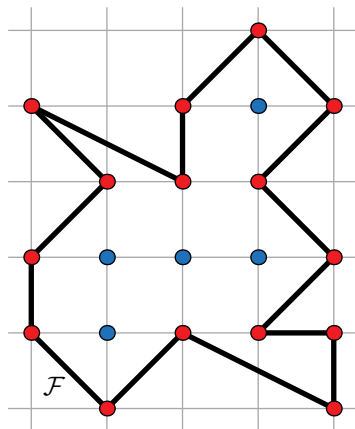




- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*.  
Dlaczego taki podział istnieje?

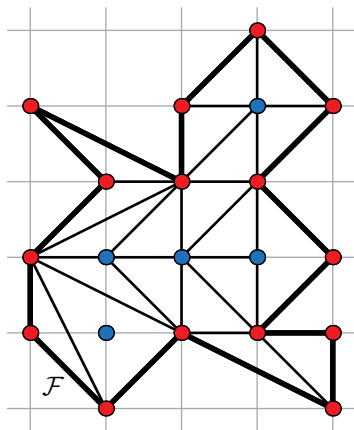


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.



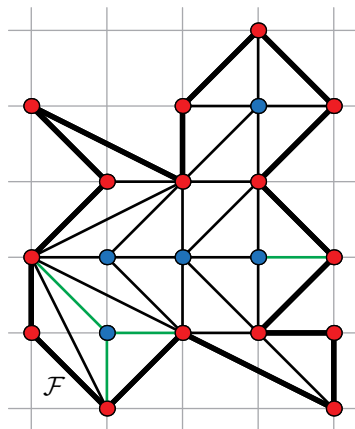
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział mogliśmy zagęścić...



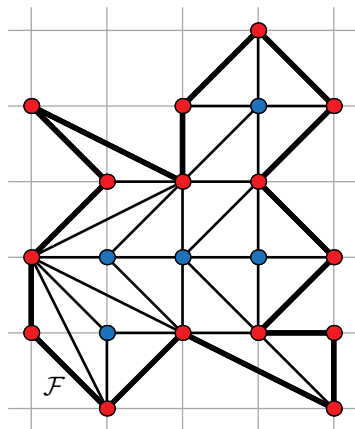
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział mogliśmy zagęścić...

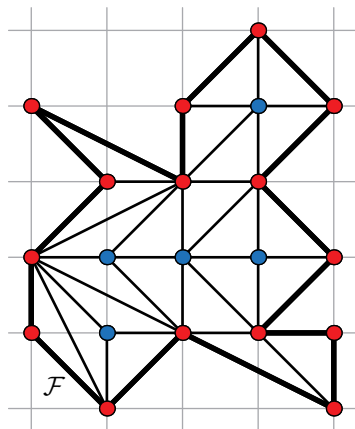


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

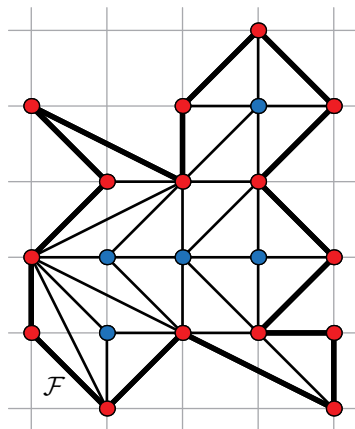
Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział mogliśmy zagęścić...



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .



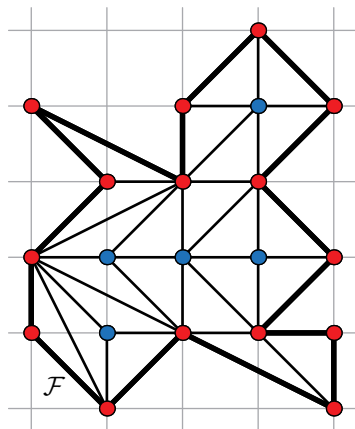
- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

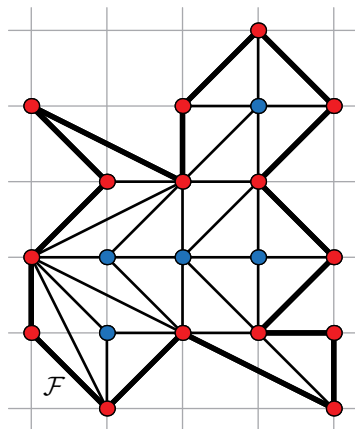




- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

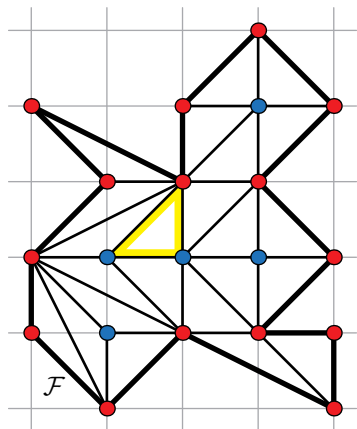


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2) Podzielmy go na *małe trójkąty*. Oznaczmy ich liczbę przez  $T$ .
- 3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

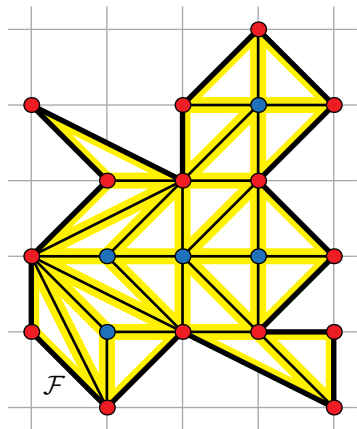
$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

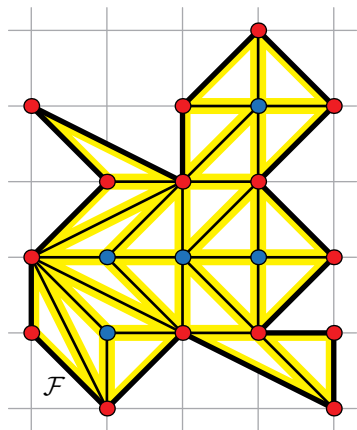
Co można powiedzieć o liczbie krawędzi tego grafu?



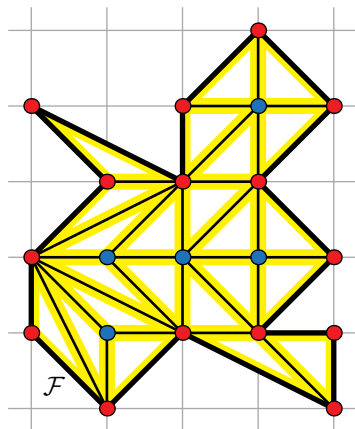
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki.



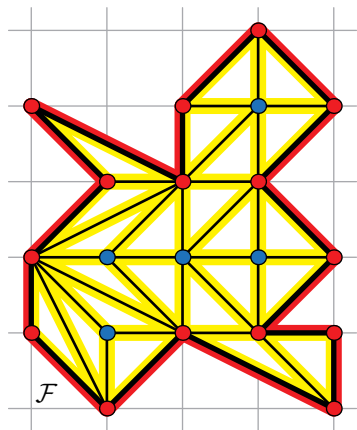
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$



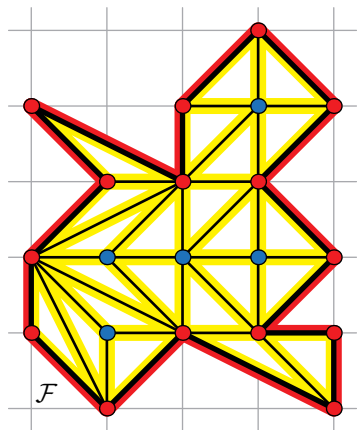
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie



- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.



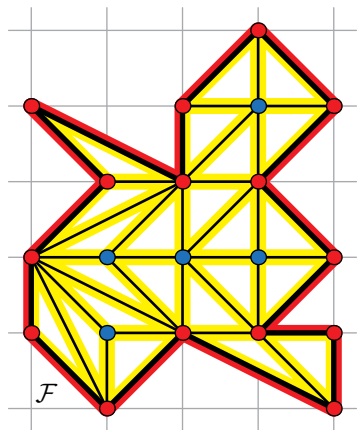
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ .



- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ . To oznacza, że

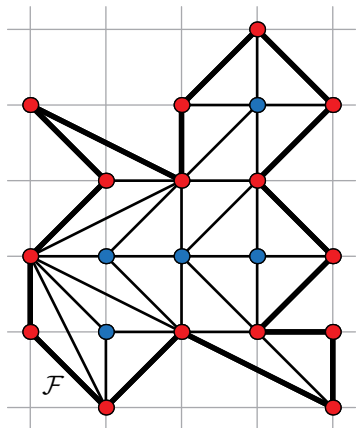
$$2K = 3T + B.$$





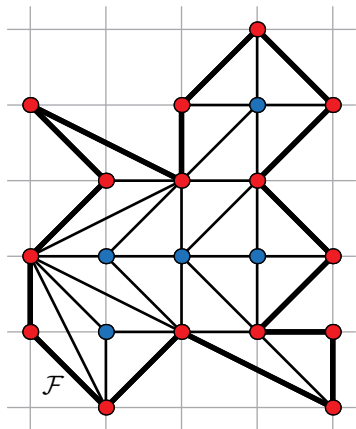
- 4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to  $3T$ , przy czym boki leżące na obwodzie  $\mathcal{F}$  policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.
- 5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie  $\mathcal{F}$  jest  $B$ . To oznacza, że

$$K = \frac{3T + B}{2}.$$



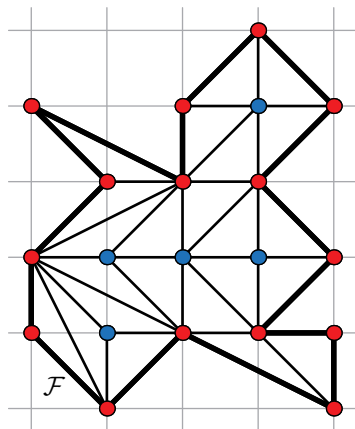
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = W - K + S.$$



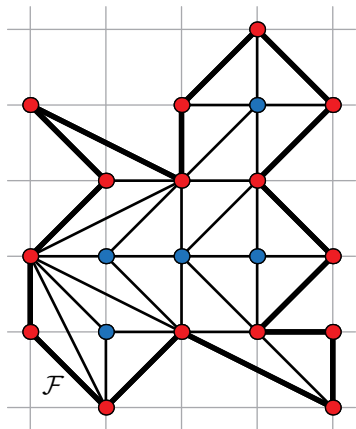
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T + 1.$$



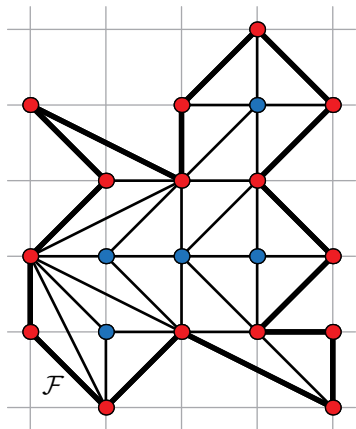
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$0 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T - 1.$$



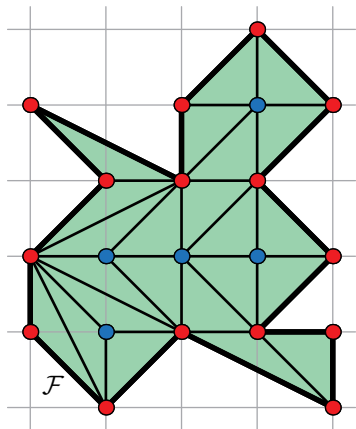
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

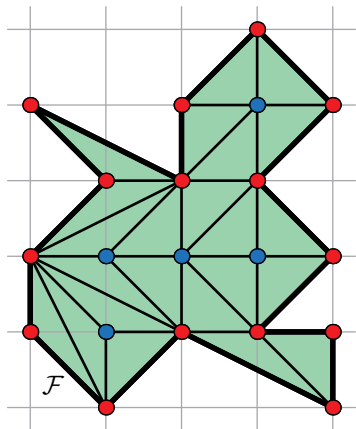
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$



- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ .



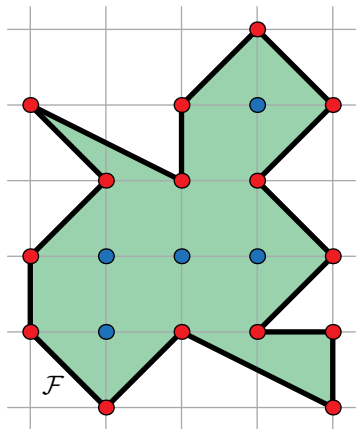
- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych*  
 trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$   
 wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec  
 tego

$$P = \frac{T}{2}$$



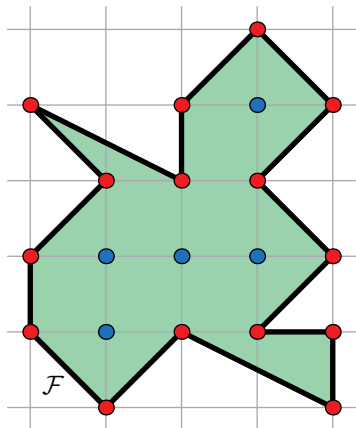


- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$  wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$



- 6) Otrzymane równości  $S = T + 1$ ,  
 $W = I + B$ ,  $K = \frac{3T+B}{2}$   
 podstawiamy do wzoru Eulera:

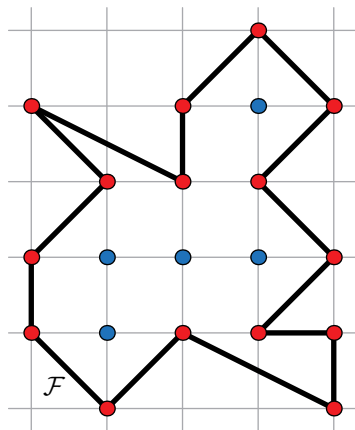
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

- 7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe  $\frac{1}{2}$ , to pole  $P$  wielokąta  $\mathcal{F}$  jest równe  $\frac{T}{2}$ . Wobec tego

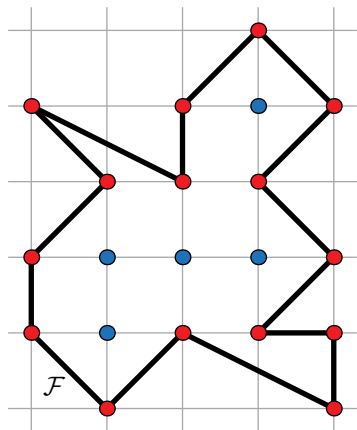
$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

a to właśnie jest wzór Picka!

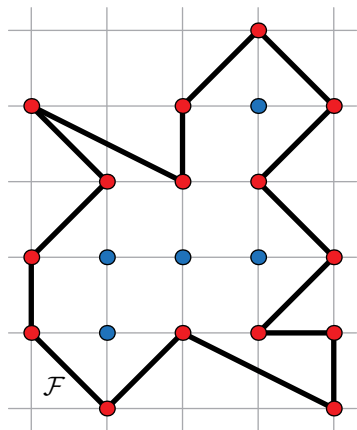




- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

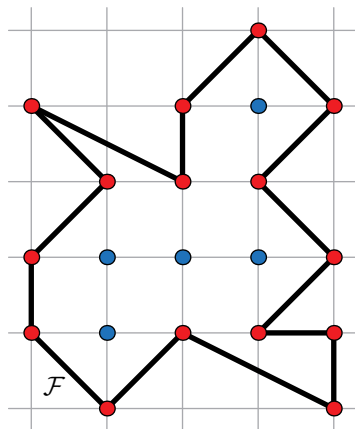


- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B, I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Skąd wiemy, że mamy z czego wybierać?



- 1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy  $\mathcal{F}$  o parametrach  $B$ ,  $I$ .
- 2') Spośród wszystkich podziałów  $\mathcal{F}$  na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Skąd wiemy, że mamy z czego wybierać?

Każdy wielokąt ma triangulację.

13 18 32 44 48 67 170

**Pomyśl zanim sprawdzisz**  
(i sprawdź zanim ocenisz)

Dziękuję Państwu za uwagę!