Jak najlepiej umieszczać punkty w wielokątach wypukłych?

W. Guzicki

1. Kilkanaście zadań na początek

Pierwsze dwa zadania są niewielkimi modyfikacjami zadań z Bałkańskich Olimpiad Matematycznych Juniorów (zob. [B]).

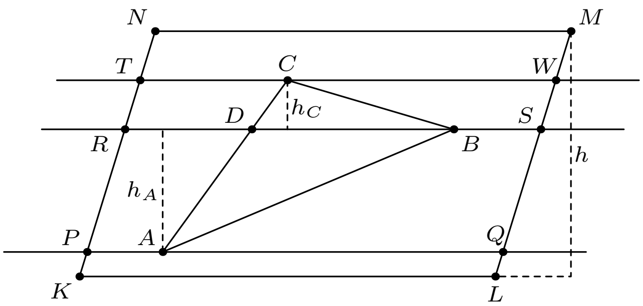
1. W równoległoboku o polu równym 1 zaznaczono 9 punktów tak, że żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że wśród tych zaznaczonych punktów znajdują się trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta o polu równym co najwyżej $\frac{1}{8}$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie zaczniemy od następującego lematu.

Lemat. W równoległoboku o polu S zaznaczono 3 punkty ABC. Wtedy $[ABC] \leq \frac{1}{2} \cdot S$.

Dowód. Przypuśćmy, że punkty A, B i C leżą w równoległoboku $KLMN$. Przez punkty A, B i C prowadzimy proste równoległe do boku KL równoległoboku. Mamy trzy przypadki.

- **Przypadek 1.** Te trzy proste pokrywają się. Wówczas punkty A, B i C są współliniowe, co jest sprzeczne z założeniem.
- **Przypadek 2.** Dwie proste pokrywają się. Możemy przyjąć, że punkty A i B leżą na jednej prostej. Niech h_C oznacza wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C i niech h oznacza wysokość równoległoboku poprowadzoną do boku KL. Wówczas (wykonanie rysunku w tym przypadku pozostawię jako ćwiczenie):
$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_C \leq \frac{1}{2} \cdot KL \cdot h = \frac{1}{2} \cdot S.$$
- **Przypadek 3.** Wszystkie trzy proste są różne. Przypuśćmy, że prosta poprowadzona przez wierzchołek B leży między pozostałymi dwiema prostymi. Niech D będzie punktem przecięcia prostej poprowadzonej przez punkt B z bokiem AC.



Niech h_A i h_C oznaczają wysokości trójkątów BDA i BDC poprowadzone odpowiednio z wierzchołków A i C oraz niech h oznacza wysokość równoległoboku poprowadzoną do boku KL. Wówczas
$$\begin{aligned}[ABC] &= [BDA] + [BDC] = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h_C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot (h_A + h_C) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot KL \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} \cdot S.\end{aligned}$$

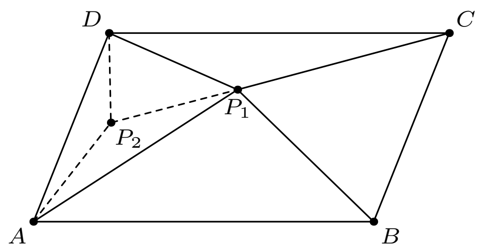
To kończy dowód lematu.

Teraz równoległobok o polu równym 1 dzielimy w dowolny sposób na cztery równoległoboki o polach równych $\frac{1}{4}$. Z zasady szufladkowej wynika, że w co najmniej jednym z tych równoległoboków znajdują się co najmniej trzy wybrane punkty. Trójkąt o wierzchołkach w tym równoległoboku ma pole równe co najwyżej $\frac{1}{8}$.

W dalszym ciągu przyjmiemy, że jeśli punkty P, Q i R są współliniowe, to $[PQR] = 0$. Przy tej umowie możemy teraz wzmocnić zadanie 1, pozbywając się założenia, że żadne trzy punkty zaznaczone w równoległoboku nie są współliniowe.

2. Dany jest równoległobok o polu równym 1. Wewnątrz tego równoległoboku umieszczono 1999 punktów. Niech M będzie zbiorem złożonym z tych punktów i czterech wierzchołków równoległoboku. Zakładamy, że żadne trzy punkty w zbiorze M nie są współliniowe. Udowodnij, że w zbiorze M znajdują się trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta o polu równym co najwyżej $\frac{1}{4000}$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że wewnątrz danego równoległoboku $ABCD$ umieszczono punkty $P_1, P_2, \ldots, P_{1999}$. Połączmy punkt P_1 z czterema wierzchołkami równoległoboku. W ten sposób równoległobok $ABCD$ został podzielony na cztery trójkąty: ABP_1, BCP_1, CDP_1 i DAP_1. Popatrzmy teraz na punkt P_2. Leży on wewnątrz jednego z tych trójkątów. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt P_2 leży wewnątrz trójkąta DAP_1. Połączmy punkt P_2 z wierzchołkami trójkąta DAP_1.



Po umieszczeniu punktu P_2 liczba trójkątów, na które został podzielony cały równoległobok $ABCD$, zwiększyła się o 2. Każdy następny punkt w podobny sposób zwiększy liczbę trójkątów o 2. Po umieszczeniu wszystkich punktów liczba trójkątów będzie równa

$$4 + 1998 \cdot 2 = 4000.$$

Ponieważ pole całego równoległoboku jest równe 1, więc pole co najmniej jednego trójkąta jest równe co najwyżej $\frac{1}{4000}$.

W powyższym zadaniu także możemy pozbyć się założenia, że w zbiorze M żadne trzy punkty nie są współliniowe. Oczywiście, jeśli przyjmiemy umowę dotyczącą pola $[PQR]$ dla punktów współliniowych, to wzmocnienie zadania jest oczywiste. Jeśli którekolwiek trzy punkty P, Q i R (spośród rozważanych 2003 punktów) są współliniowe, to $[PQR] = 0 < \frac{1}{4000}$. Możemy jednak udowodnić więcej. Nawet w przypadku, gdy wśród rozważanych punktów znajdują się trójki punktów współliniowych, to istnieje także wiele trójek niewspółliniowych. Można udowodnić, że nawet wówczas co najmniej jeden „prawdziwy” trójkąt ma pole równe co najwyżej $\frac{1}{4000}$. Odpowiednią modyfikację rozwiązania pozostawię jako nietrudne ćwiczenie (należy pokazać, że umieszczenie dodatkowego punktu na boku dowolnego trójkąta także zwiększa o 2 liczbę trójkątów, na które podzieliliśmy równoległobok).

W dalszym ciągu przyjmiemy umowę podaną po rozwiązaniu zadania 1 i w sformułowaniach wielu zadań nie będziemy dodawać założenia, że żadne trzy punkty nie są współliniowe. Pisząc, że wśród rozważanych punktów znajdują się trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta o małym polu, będziemy mieli na myśli to, że istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że liczba $[PQR]$ spełnia odpowiednią nierówność. Oczywiście, jeśli wśród rozważanych punktów znajdą się trzy punkty współliniowe, to wspomniana nierówność będzie trywialna.

3. Wewnątrz trójkąta ABC o polu 1 umieszczono punkt D. Udowodnij, że co najmniej jeden z trójkątów ABD, BCD i CAD ma pole równe co najwyżej $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Niech punkt S będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wówczas oczywiście

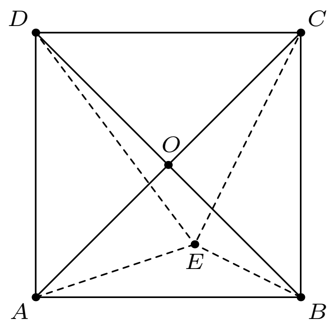
$$[ABS] = [BCS] = [CAS] = \frac{1}{3}.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że punkt D znajduje się w którymś z trójkątów ABS, BCS i CAS.

4. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ o polu 1 umieszczono punkt E. Udowodnij, że w zbiorze punktów $X = \{A, B, C, D, E\}$ istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że

$$[PQR] \leq \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie. Niech O będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD kwadratu. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt E leży wewnątrz trójkąta ABO.



Zauważmy, że wówczas:

$$[ACE] = [ABC] - [ABE] - [BCE] = \frac{1}{2} - [ABE] - [BCE],$$
$$[BDE] = [ABD] - [ABE] - [ADE] = \frac{1}{2} - [ABE] - [ADE].$$

Dodajmy te równości stronami:

$$[ACE] + [BDE] = 1 - 2 \cdot [ABE] - ([BCE] + [ADE]),$$

czyli

$$[ACE] + [BDE] + 2 \cdot [ABE] = 1 - ([BCE] + [ADE]).$$

Następnie zauważmy, że trójkąty BCE i ADE mają podstawy BC i AD równe 1 oraz ich wysokości opuszczone z wierzchołka E w sumie są równe 1. Zatem

$$[BCE] + [ADE] = \frac{1}{2},$$

skąd wynika, że

$$[ACE] + [BDE] + 2 \cdot [ABE] = \frac{1}{2}.$$

Jeśli teraz pola trójkątow ACE, ADE i ABE są większe od $\frac{1}{8}$:

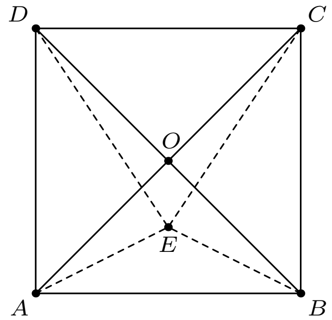
$$[ACE] > \frac{1}{8}, \quad [BDE] > \frac{1}{8} \quad \text{oraz} \quad [ABE] > \frac{1}{8},$$

to

$$\frac{1}{2} = [ACE] + [BDE] + 2 \cdot [ABE] > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Liczby $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{8}$ uzyskane w zadaniach 3 i 4 są w pewnym sensie najlepsze. Mianowicie, jeśli weźmiemy dowolny trójkąt ABC o polu równym 1 i jego środek ciężkości D, to pola wszystkich trójkątów ABD, BCD i CAD są równe właśnie $\frac{1}{3}$. Zatem dla dowolnego trójkąta ABC o polu równym 1 i dowolnego punktu D leżącego wewnątrz tego trójkąta pole co najmniej jednego trójkąta o wierzchołkach ze zbioru $\{A, B, C, D\}$ jest niewiększe od $\frac{1}{3}$, ale dla żadnej liczby mniejszej od $\frac{1}{3}$ analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe. Podobnie, jeśli $0 < c < \frac{1}{8}$, to nie można udowodnić, że w kwadracie o polu 1 istnieje taki punkt E, nieleżący na żadnej przekątnej i taki, że pole co najmniej jednego trójkąta o wierzchołkach ze zbioru $\{A, B, C, D, E\}$ jest niewiększe od c. Mianowicie wybierzemy punkt E leżący na odcinku łączącym środki boków AB i CD, w odległości $\frac{1}{4}$ od boku AB.



Wówczas łatwo zauważyć, że:

$$[ABC] = [BCD] = [CDA] = [DAB] = \frac{1}{2}, \quad [BCE] = \frac{3}{8}, \quad [BCE] = [DAE] = \frac{1}{4}$$

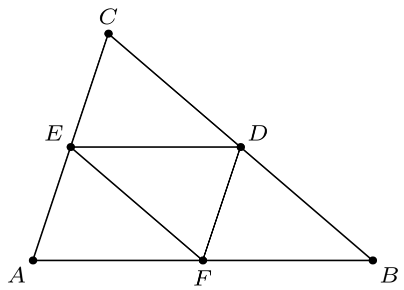
oraz

$$[ABE] = [ACE] = [BDE] = \frac{1}{8}.$$

Następne zadania pochodzą z piątej Olimpiady Matematycznej Colorado (zob. [S2], str. 63). Zadania te zostały dokładnie omówione w książkach A. Soifera [S2] (str. 66 – 70) i [S1] (str 51 – 63 oraz 163 – 166).

5. W trójkącie o polu 1 umieszczono 9 punktów. Udowodnij, że wśród tych 9 punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Niech $[ABC] = 1$ i niech punkty D, E i F będą odpowiednio środkami boków BC, CA i AB. Odcinki DE, EF i FD dzielą trójkąt ABC na cztery przystające trójkąty o polu równym $\frac{1}{4}$.



Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej trzy z danych 9 punktów leżą w jednym z tych czterech trójkątów. Niech na przykład punkty P, Q i R leżą w trójkącie AFE. Wówczas

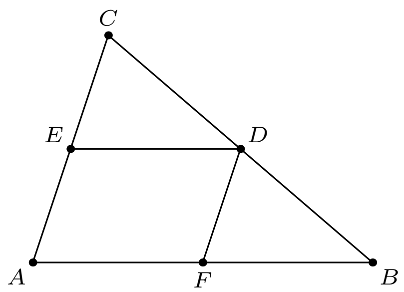
$$[PQR] \leq [AFE] = \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Zobaczymy teraz, że niewielka modyfikacja dowodu pozwala wzmocnić uzyskany wynik.

6. W trójkącie o polu 1 umieszczono 7 punktów. Udowodnij, że wśród tych 7 punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie tego zadania także polega na zastosowaniu zasady szufladkowej Dirichleta. Ponieważ mamy tylko 7 punktów, więc chcemy znaleźć 3 szufladki. Tak jak w poprzednim zadaniu bierzemy trójkąt ABC taki, że $[ABC] = 1$ oraz wybieramy środki jego boków. Tym razem rysujemy tylko odcinki DE i DF.



Trójkąt ABC został podzielony na trzy wielokąty: dwa trójkąty BDF i CDE o polu $\frac{1}{4}$ i równoległobok $AFDE$ o polu $\frac{1}{2}$. Z zasady szufladkowej wynika, że w jednym z tych wielokątów znajdują się co najmniej trzy z danych 7 punktów. Jeśli punkty P, Q i R znajdują się w jednym z dwóch trójkątów, to tak jak w poprzednim zadaniu $[PQR] \leq \frac{1}{4}$.

Jeśli zaś znajdują się w równoległoboku $AFDE$, to korzystamy z lematu udowodnionego w rozwiązaniu zadania 1:

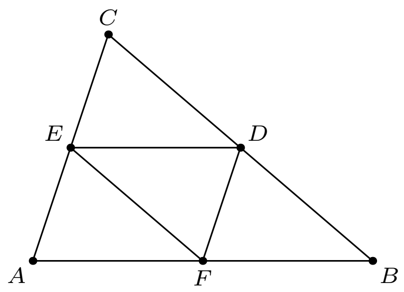
$$[PQR] \le \frac{1}{2} \cdot [AFDE] = \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

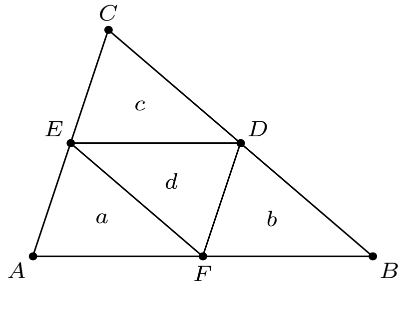
Wynik uzyskany w ostatnim zadaniu można jeszcze bardziej wzmocnić.

7. W trójkącie o polu 1 umieszczono 5 punktów tak, że żadne trzy z nich nie są współliniowe. Udowodnij, że wśród tych 5 punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \le \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie tego zadania zaczniemy — tak jak to miało miejsce w rozwiązaniu zadania 5 — od podzielenia trójkąta ABC na cztery trójkąty. Niech zatem $[ABC] = 1$ i niech punkty D, E i F będą odpowiednio środkami boków BC, CA oraz AB. Odcinki DE, EF i FD dzielą trójkąt ABC na cztery przystające trójkąty o polu równym $\frac{1}{4}$.



Przyjmijmy teraz, że obwód trójkąta DEF zaliczamy do tego trójkąta, natomiast w pozostałych trzech trójkątach boków wspólnych z trójkątem DEF nie zaliczamy do tych trójkątów. W ten sposób trójkąt ABC został podzielony na cztery zbiory rozłączne. Oznaczmy literą X zbiór pięciu punktów umieszczonych w trójkącie ABC. Niech a, b, c i d oznaczają odpowiednio liczby punktów ze zbioru X znajdujących się w trójkątach AFE, BDF, CED i DEF (przy uwzględnieniu powyższej umowy dotyczącej boków trójkąta DEF). Na poniższym rysunku te liczby zostały wpisane w odpowiednie trójkąty:



Wówczas oczywiście ma miejsce nierówność

$$a + b + c + d = 5.$$

Przyjmijmy następnie, że teza nie jest prawdziwa. W szczególności wynika stąd, że w dowolnym równoległoboku o polu równym $\frac{1}{2}$ znajdują się co najwyżej dwa punkty ze zbioru X (por. lemat udowodniony w rozwiązaniu zadania 1). Rozpatrując zatem równoległoboki $AFDE$, $FBDE$ i $CEFD$, otrzymamy następujące nierówności:

$$a + d \leq 2,$$
$$b + d \leq 2,$$
$$c + d \leq 2.$$

Dodajmy te nierówności stronami:

$$a + b + c + 3d \leq 6,$$

czyli

$$(a + b + c + d) + 2d \leq 6.$$

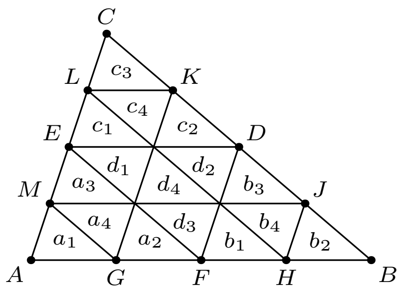
Stąd wynika, że $5+2d \leq 6$, czyli $2d \leq 1$. Ponieważ d jest liczbą całkowitą, więc $d = 0$. To znaczy, że żaden punkt ze zbioru X nie leży w trójkącie DEF (łącznie z jego brzegiem). W szczególności mamy teraz następujące nierówności:

$$a \leq 2, \quad b \leq 2 \quad \text{oraz} \quad c \leq 2.$$

Teraz dzielimy trójkąt ABC na 16 trójkątów przystających. W tym celu bierzemy na bokach trójkąta ABC punkty G, H, J, K, L i M tak, by:

- punkty G, F i H dzieliły bok AB na cztery równe części,
- punkty J, D i K dzieliły bok BC na cztery równe części,
- punkty L, E i M dzieliły bok CA na cztery równe części.

Następnie łączymy te punkty tak jak na poniższym rysunku. Ponadto w każdy z tych trójkątów wpisujemy liczbę punktów ze zbioru X znajdujących się w tym trójkącie:



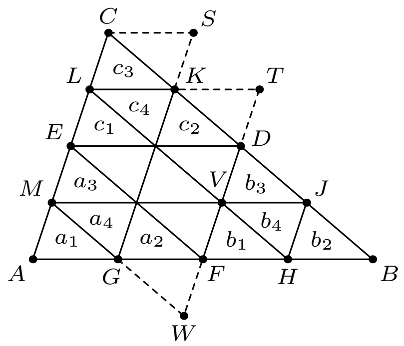
Chcemy przy tym, by trójkąt ABC był podzielony na 16 zbiorów rozłącznych. Dlatego boki trójkąta DEF zaliczamy do trójkącików zawartych w tym trójkącie oraz trójkąty zawierające a_4, b_4 i c_4 bierzemy razem z ich bokami (z wyjątkiem, oczywiście, ich wierzchołków leżących na obwodzie trójkąta DEF). Mamy zatem równości:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$
$$b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$
$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4.$$

Ponieważ w trójkącie DEF nie ma punktów ze zbioru X, więc

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.$$

Na następnym rysunku nie zaznaczymy więc tych liczb w ogóle, rozumiejąc przez to, że w trójkąciku bez żadnego oznaczenia nie ma punktów ze zbioru X. Teraz do trójkąta ABC dorysowujemy trzy trójkąciki CSK, KTD i GFW przystające do 16 małych trójkącików. Niech ponadto V będzie punktem przecięcia odcinków MJ i DF:



Popatrzmy teraz na trzy równoległoboki: $AGSC$, $MVTL$ i $MWVL$. Każdy z nich zawiera dokładnie 8 trójkącików, więc ma pole równe $\frac{1}{2}$. Mamy zatem trzy nierówności:

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_4 + c_1 + c_3 + c_4 &\leq 2, \\ a_3 + c_1 + c_2 + c_4 &\leq 2, \\ a_2 + a_3 + a_4 + c_1 &\leq 2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $a_3 + c_1 \leq 1$. Mianowicie

$$a_3 + c_1 \leq a_1 + a_3 + a_4 + c_1 + c_3 + c_4 \leq 2.$$

Przypuśćmy teraz, że $a_3 + c_1 = 2$. Wówczas:

$$a_1 + a_4 + c_3 + c_4 \leq 0, \quad c_2 + c_4 \leq 0 \quad \text{oraz} \quad a_2 + a_4 \leq 0.$$

Stąd wynika, że

$$a_1 = a_2 = a_4 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

Zatem

$$a + c = a_3 + c_1 = 2,$$

skąd wynika, że $b = 3$. To jednak jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Ta sprzeczność dowodzi, iż rzeczywiście ma miejsce nierówność $a_3 + c_1 \leq 1$. Podsumujmy teraz tę część dowodu. Wykazaliśmy dwie nierówności:

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_4 + c_1 + c_3 + c_4 &\leq 2, \\ a_3 + c_1 &\leq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Teraz w analogiczny sposób dowodzimy następujących nierówności (narysowanie odpowiednich równoległoboków pozostawię jako ćwiczenie):

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_4 + b_1 + b_2 + b_4 &\le 2, \\ a_2 + b_1 &\le 1 \end{aligned} \tag{2}$$

oraz

$$\begin{aligned} b_2 + b_3 + b_4 + c_2 + c_3 + c_4 &\le 2, \\ b_3 + c_2 &\le 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Wreszcie dodajemy stronami nierówności (1), (2) i (3). Otrzymujemy nierówność

$$2(a + b + c) \le 9,$$

czyli $10 \le 9$. To jednak jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przyjęte założenie było nieprawdziwe. Zatem rzeczywiście istnieje trójkąt o wierzchołkach ze zbioru X, którego pole jest niewiększe od $\frac{1}{4}$. To kończy dowód.

Tego zadania nie można już wzmocnić, co wynika z uwagi po zadaniu 4. Zauważmy, że analogiczne zadanie dla równoległoboku ma bardzo proste rozwiązanie.

8. W równoległoboku o polu 1 umieszczono 5 punktów. Udowodnij, że wśród tych pięciu punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \le \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Dzielimy dany równoległobok na dwa równoległoboki o polu $\frac{1}{2}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w jednym z tych równoległoboków znajdują się co najmniej trzy spośród danych 5 punktów. Teza wynika teraz z lematu udowodnionego w rozwiązaniu zadania 1.

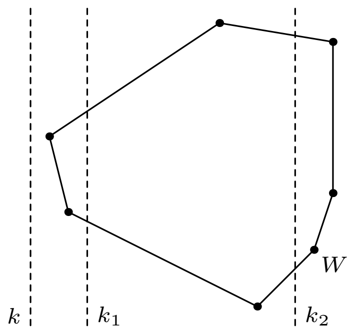
Analogiczne zadania można sformułować dla dowolnego wielokąta wypukłego. Alexander Soifer w swojej książce [S1] formułuje następujący problem. Dany jest wielokąt wypukły W (lub ogólniej: dany jest dowolny zbiór domknięty i wypukły na płaszczyźnie). Znaleźć najmniejszą liczbę $S(W)$ o następującej własności:

- wśród dowolnych $S(W)$ punktów leżących w wielokącie W istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że
$$[PQR] \le \frac{1}{4} \cdot [W].$$

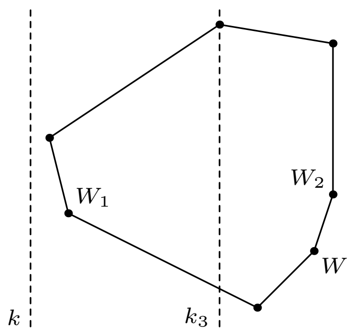
Najpierw udowodnimy, że dla każdego wielokąta wypukłego W ma miejsce nierówność $S(W) \le 9$.

9. Dany jest wielokąt wypukły W o polu 1. W tym wielokącie umieszczono 9 punktów. Udowodnij, że wśród tych 9 punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \le \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Najpierw udowodnię, że dla dowolnego wielokąta wypukłego W i dowolnej prostej k istnieje prosta l, równoległa do prostej k, rozcinająca wielokąt W na dwa wielokąty W_1 i W_2 o równych polach. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że prosta k jest rozłączna z wielokątem W. Popatrzmy na rysunek:



Przesuwajmy teraz prostą k w kierunku wielokąta W. Gdy prosta będzie blisko lewego skraju wielokąta (na rysunku prosta k_1), wielokąt W_1 po jej lewej stronie będzie miał pole mniejsze od pola wielokąta W_2 po prawej stronie prostej. Gdy natomiast prosta k będzie blisko prawego skraju wielokąta W (na rysunku prosta k_2), to wielokąt W_1 po lewej stronie tej prostej będzie miał pole większe od pola wielokąta W_2 po jej prawej stronie. Istnieje zatem położenie pośrednie (na następnym rysunku prosta k_3), w którym pola obu wielokątów W_1 i W_2 będą równe:



Załóżmy teraz, że wielokąt W ma pole równe 1. Oczywiście oba wielokąty W_1 i W_2 mają pola równe $\frac{1}{2}$.

Teraz powtarzamy tę konstrukcję dla wielokątów W_1 i W_2, dzieląc każdy z nich na dwa wielokąty o równych polach. W efekcie podzielimy wielokąt W na cztery wielokąty V_1, V_2, V_3 i V_4 o równych polach:

$$[V_1] = [V_2] = [V_3] = [V_4] = \frac{1}{4}.$$

Z zasady szufladkowej wynika, że w którymś z tych wielokątów znajdują się co najmniej 3 dane punkty. Jeśli punkty P, Q i R leżą w wielokącie V_i, to oczywiście

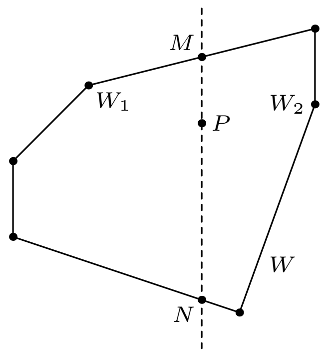
$$[PQR] \leq [V_i] = \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

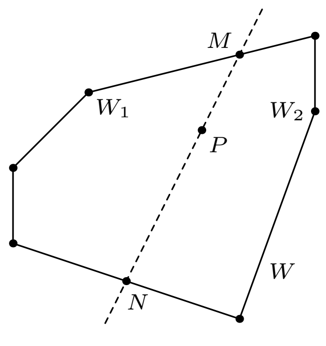
Teraz wzmocnimy szacowanie liczby $S(W)$. Wykażemy mianowicie, że $S(W) \leq 6$.

10. Dany jest wielokąt wypukły W o polu 1. W tym wielokącie umieszczono 6 punktów. Udowodnij, że wśród tych sześciu punktów istnieją trzy punkty P, Q i R takie, że $[PQR] \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Najpierw pokażę jeszcze jedną konstrukcję rozcinania dowolnego wielokąta wypukłego na dwa wielokąty o równych polach. Niech punkt P będzie położony wewnątrz wielokąta wypukłego W. Pokażę, że istnieje prosta przechodząca przez punkt P i rozcinająca wielokąt W na dwa wielokąty W_1 i W_2 o równych polach. W tym celu wybierzmy na brzegu wielokąta W dowolny punkt M. Prosta PM przecina brzeg wielokąta W w jeszcze jednym punkcie N. Nadajmy prostej PM zwrot: od punktu P patrzymy w kierunku punktu M. Wielokąt W_1 będzie wówczas wielokątem położonym po lewej stronie prostej PM, wielokąt W_2 będzie położony po prawej stronie:

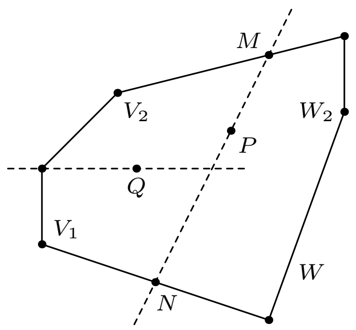


Jeśli prosta PM rozcina wielokąt W na dwa wielokąty W_1 i W_2 o równych polach, to konstrukcja jest zakończona. Przypuśćmy zatem, że pola wielokątów W_1 i W_2 nie są równe. Niech na przykład — tak jak na powyższym rysunku — ma miejsce nierówność $[W_1] > [W_2]$. Poruszajmy następnie punktem M po obwodzie wielokąta (w ustalonym kierunku, na przykład zgodnie z ruchem wskazówek zegara) dotąd, aż dojdzie do punktu N. Wówczas wielokąty W_1 i W_2 zamienią się miejscami i okaże się, że $[W_1] < [W_2]$. Istnieje zatem położenie pośrednie punktu M takie, w którym oba wielokąty W_1 i W_2 mają równe pola:



Podobną konstrukcję można przeprowadzić, gdy punkt P leży na brzegu wielokąta W. Wówczas także istnieje prosta przechodząca przez punkt P i rozcinająca wielokąt W na dwa wielokąty o równych polach. Wybieramy wówczas — jako punkt M — różny od P wierzchołek wielokąta sąsiadujący z punktem P i przesuwamy go po brzegu wielokąta dotąd aż dojdzie do drugiego wierzchołka sąsiadującego z P. Szczegóły tej konstrukcji pozostawię jako ćwiczenie.

Przypuśćmy teraz, że dany jest wielokąt wypukły W o polu równym 1, w którym umieszczono 6 punktów. Wybierzmy jeden z tych wybranych punktów; niech będzie to punkt P. Prowadzimy prostą MN przechodzącą przez punkt M i rozcinającą wielokąt W na dwa wielokąty W_1 i W_2 o polach równych $\frac{1}{2}$. Z zasady szufladkowej wynika, że w jednym z tych wielokątów znajdują się co najmniej trzy wybrane punkty różne od punktu P. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkty Q, R i S leżą w wielokącie W_1. Teraz znajdujemy prostą przechodzącą przez punkt Q i rozcinającą wielokąt W_1 na dwa wielokąty V_1 i V_2 o polach równych $\frac{1}{4}$; możemy przy tym przyjąć, że punkt P leży w wielokącie V_2:



Mamy teraz dwa przypadki.

- Jeśli co najmniej jeden z punktów R i S (na przykład punkt R) leży w wielokącie V_2, to mamy nierówność
$$[PQR] \leq [V_2] = \frac{1}{4}.$$
- Jeśli natomiast oba punkty R i S leżą w wielokącie V_1, to mamy nierówność
$$[QRS] \leq [V_1] = \frac{1}{4}.$$

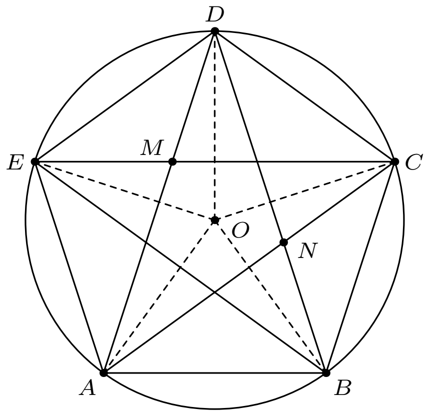
W obu przypadkach znaleźliśmy trójkąt o polu niewiększym od $\frac{1}{4}$. To kończy dowód.

Okazuje się, że dla niektórych wielokątów wypukłych W szacowanie mocniejsze (tzn. $S(W) \leq 5$) nie jest prawdziwe. Dla tych wielokątów W mamy zatem równość
$$S(W) = 6.$$

W następnym zadaniu zobaczymy przykład takiego wielokąta.

11. Udowodnij, że spośród wierzchołków pięciokąta foremnego o polu 1 nie można wybrać trzech wierzchołków P, Q i R tak, by $[PQR] \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$ o polu 1 wpisany w okrąg o środku O. Narysujmy wszystkie przekątne pięciokąta. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AD i CE oraz niech N będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD.



Oczywiście wszystkie kąty środkowe są równe:

$$\measuredangle AOB = \measuredangle BOC = \measuredangle COD = \measuredangle DOE = \measuredangle EOA = 72^\circ.$$

Stąd wynika, że przekątne pięciokąta dzielą każdy kąt wewnętrzny na trzy równe kąty. Na przykład:

$$\measuredangle EAD = \measuredangle DAC = \measuredangle CAB = 36^\circ.$$

W szczególności wynika stąd, że przekątne pięciokąta są równoległe do odpowiednich boków, na przykład

$$EC \parallel AB \quad \text{oraz} \quad AD \parallel BC.$$

To znaczy, że czworokąt $ABCM$ jest równoległobokiem. Następnie:

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{[ACM]}{[ACD]} = \frac{AM}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{AB}{AD}.$$

Ponieważ $\measuredangle BAC = 36^\circ$ oraz $\measuredangle ABD = 72^\circ$, więc $\measuredangle ANB = 72^\circ$. Stąd wynika, że $AB = AN$. Następnie $\measuredangle DAN = \measuredangle ADN = 36^\circ$, więc $AN = DN$. W trójkącie ABD odcinek AN jest dwusieczną kąta BAD, więc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BN}{DN} = \frac{BD - DN}{DN} = \frac{AD - AB}{AB}.$$

Stąd wynika, że

$$AB^2 = AD^2 - AB \cdot AD,$$

czyli

$$AB^2 + AB \cdot AD - AD^2 = 0.$$

Podzielmy obie strony przez AD^2:

$$\frac{AB^2}{AD^2} + \frac{AB}{AD} - 1 = 0.$$

Niech teraz
$$\varphi = \frac{AB}{AD}.$$
Mamy wówczas równanie
$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0,$$
którego jedynym rozwiązaniem dodatnim jest
$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
Mamy zatem
$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{AB}{AD} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
czyli $[ABC] = \varphi \cdot [ABD]$. Stąd wynika, że
$$\begin{aligned} 1 &= [ABCDE] = [ADE] + [ABD] + [ABC] = [ABD] + 2 \cdot [ABC] = \\ &= [ABD] + 2\varphi \cdot [ABD] = (1+2\varphi) \cdot ABD = \left(1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot [ABD] = \\ &= \sqrt{5} \cdot [ABD]. \end{aligned}$$
Zatem
$$[ABD] = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{oraz} \quad [ABC] = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$
Teraz wystarczy pokazać, że
$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{4}.$$
Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:
$$\begin{gathered} 4(5-\sqrt{5}) > 10, \\ 20 - 4\sqrt{5} > 10, \\ 10 > 4\sqrt{5}, \\ 5 > 2\sqrt{5}, \\ 25 > 4 \cdot 5 = 20. \end{gathered}$$
Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą, więc rzeczywiście $[ABC] > \frac{1}{4}$. Ponadto
$$[ABD] = \frac{\sqrt{5}}{5} > \frac{2}{5} > \frac{1}{4}.$$
To dowodzi, iż rzeczywiście spośród wierzchołków A, B, C, D i E pięciokąta foremnego $ABCDE$ nie można wybrać trzech będących wierzchołkami trójkąta o polu niewiększym od $\frac{1}{4}$.

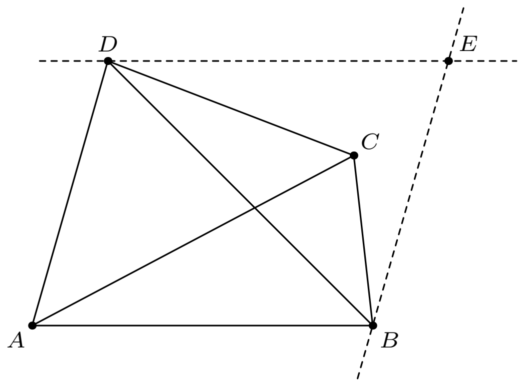
Istnieje także szacowanie liczby $S(W)$ z dołu. Mianowicie $S(W) > 4$.

12. Udowodnij, że w dowolnym wielokącie wypukłym W o polu równym 1 istnieją cztery punkty P, Q, R i S takie, że pola trójkątów PQR, QRS, RSP i SPQ są większe od $\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Rozważamy trzy przypadki w zależności od liczby boków wielokąta W.

Przypadek 1. Jeśli wielokąt W jest trójkątem, to jako P, Q i R bierzemy wierzchołki trójkąta, a jako S jego środek ciężkości (por. uwagę po zadaniu 4).

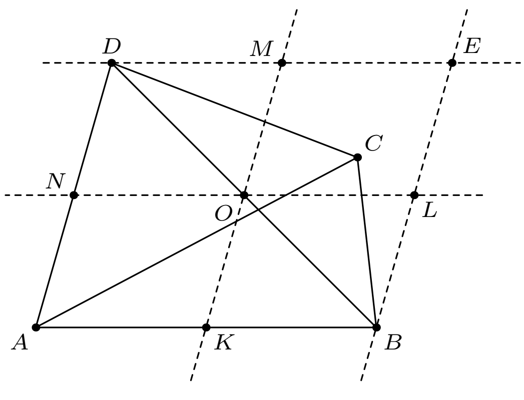
Przypadek 2. Niech teraz wielokąt W będzie czworokątem wypukłym $ABCD$. Wśród trójkątów ABC, BCD, CDA i DAB istnieje trójkąt o najmniejszym polu. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że jest to trójkąt BCD. Narysujmy teraz czworokąt $ABCD$ i poprowadźmy przez punkty B i D proste równoległe odpowiednio do boków AD i AB. Niech E będzie punktem przecięcia tych równoległych.



Oczywiście

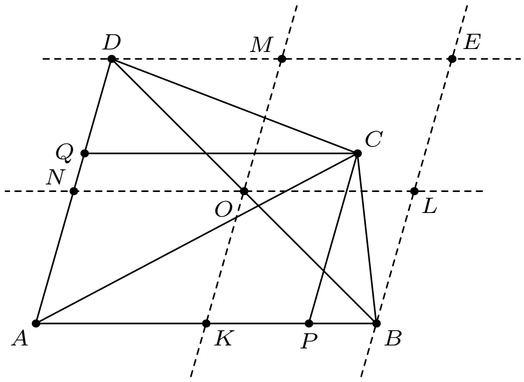
$$[ABC] + [ACD] = [ABCD] = [ABD] + [BCD].$$

Ponieważ $[BCD] \leq [ACD]$, więc $[ABD] \geq [ABC]$. Stąd wynika, że punkt C leży na prostej DE lub po tej stronie tej prostej co punkty A i B (na powyższym rysunku poniżej prostej DE). Podobnie, ponieważ $[BCD] \leq [ABC]$, więc $[ABD] \geq [ACD]$. Stąd wynika, że punkt C leży na prostej BE lub po jej lewej stronie. Tak więc punkt C znajduje się w równoległoboku $ABED$ (dokładniej: w trójkącie BED). Oczywiście punkt C nie leży na odcinku BD. Teraz dzielimy równoległobok $ABED$ na cztery równe części prostymi KM i LN przechodzącymi przez środki przeciwległych boków. Oczywiście te proste przechodzą przez środek O przekątnej BD równoległoboku:



Teraz mamy dwie możliwości.

W pierwszej punkt C znajduje się w równoległoboku $OLEM$ (tak jak na rysunku powyżej). Przez punkt C prowadzimy równoległe do boków równoległoboku, przecinające boki AB i AD odpowiednio w punktach P i Q:



Teraz zauważmy, że

$$\frac{[APC]}{[ABC]} = \frac{AP}{AB} > \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{[ACQ]}{[ACD]} = \frac{AQ}{AD} > \frac{1}{2},$$

czyli

$$[APC] > \frac{1}{2} \cdot [ABC] \quad \text{oraz} \quad [ACQ] > \frac{1}{2} \cdot [ACD].$$

Dodając te dwie nierówności stronami, otrzymamy:

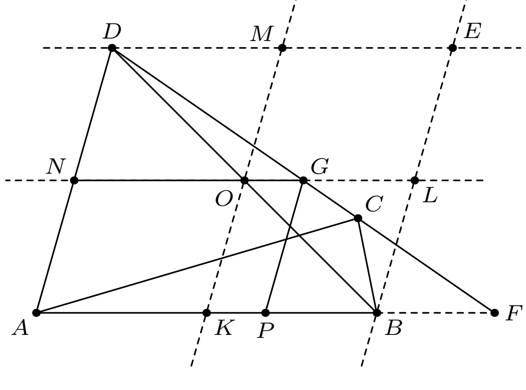
$$[APCQ] = [APC] + [ACQ] > \frac{1}{2} \cdot ([ABC] + [ACD]) = \frac{1}{2} \cdot [ABCD] = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$[APC] = [PCQ] = [CQA] = [QAP] = \frac{1}{2} \cdot [APCQ] > \frac{1}{4}.$$

Wystarczy zatem przyjąć $R = A$ i $S = C$.

Druga możliwość polega na tym, że punkt C leży w jednym z trójkątów BLO i OMD. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt C znajduje się w trójkącie BLO. Niech prosta CD przecina proste AB i NL odpowiednio w punktach F i G. Oczywiście punkt G jest środkiem odcinka DF. Wreszcie prowadzimy przez punkt G prostą równoległą do boku AD, przecinającą bok AB w punkcie P:



Wówczas oczywiście:

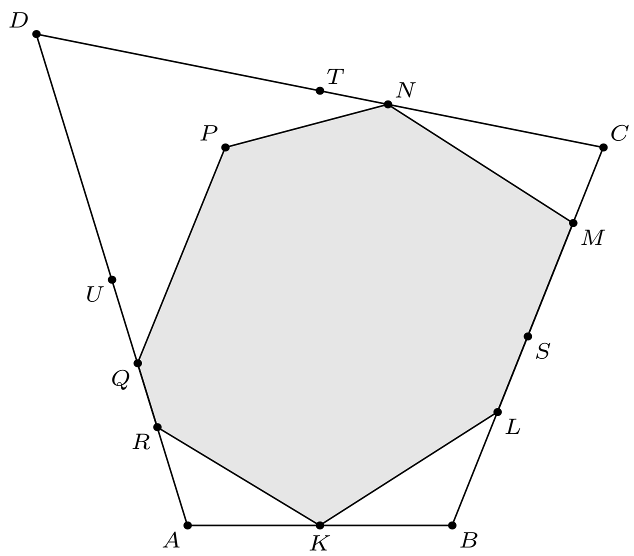
$$[APGN] = \frac{1}{2} \cdot [AFD] > \frac{1}{2} \cdot [ABCD] = \frac{1}{2}$$

i tak jak poprzednio

$$[APG] = [PGN] = [GNA] = [NAP] = \frac{1}{2} \cdot [APGN] > \frac{1}{4}.$$

Tym razem wystarczy przyjąć $Q = G$, $R = N$ i $S = A$.

Przypadek 3. Wielokąt W ma co najmniej 5 boków. Rozważamy wszystkie czworokąty $ABCD$ zawierające wielokąt W. Wśród tych czworokątów jest czworokąt o najmniejszym polu (tego już dowodzić nie będę — to wynika z twierdzenia Weierstrassa o funkcjach ciągłych). Przypuśćmy zatem, że tym czworokątem jest czworokąt $ABCD$. Popatrzmy na przykładowy rysunek wielokąta W (którym jest siedmiokąt $KLMNPQR$) zawartego w czworokącie $ABCD$:



Oczywiście na każdym boku czworokąta $ABCD$ musi leżeć jakiś wierzchołek lub jakiś bok wielokąta W. W przeciwnym razie moglibyśmy zmniejszyć czworokąt $ABCD$ przesuwając równolegle bok, na którym nie ma żadnego punktu wielokąta W. Teraz mogą wystąpić cztery przypadki.

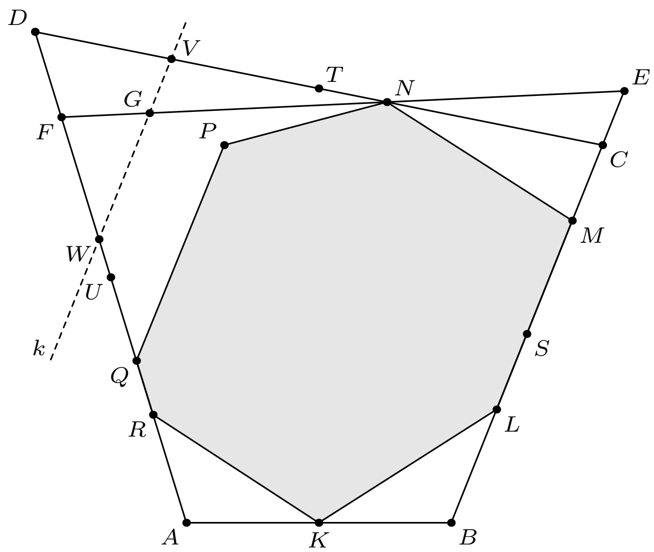
- **Przypadek 1.** Na którymś boku czworokąta $ABCD$ leży dokładnie jeden wierzchołek wielokąta W i jest on środkiem tego boku czworokąta. Taką sytuację widzimy na boku AB: wierzchołek K wielokąta W jest środkiem boku AB.
- **Przypadek 2.** W którymś boku czworokąta $ABCD$ zawarty jest bok wielokąta W, przy czym środek boku czworokąta leży na boku wielokąta W. Taką sytuację widzimy na boku BC: środek S boku BC leży na boku LM wielokąta W.
- **Przypadek 3.** Na którymś boku czworokąta $ABCD$ leży dokładnie jeden wierzchołek wielokąta W, ale ten wierzchołek nie jest środkiem boku czworokąta. Taką

sytuację widzimy na boku CD: środek T boku CD nie pokrywa się z wierzchołkiem N wielokąta W.

- **Przypadek 4.** W którymś boku czworokąta $ABCD$ zawarty jest bok wielokąta W, przy czym środek boku czworokąta nie leży na boku wielokąta W. Taką sytuację widzimy na boku AD: środek U boku AD nie leży na boku QR wielokąta W.

Udowodnię teraz, że przypadki 3 i 4 nie są możliwe. Mianowicie w każdym z tych dwóch przypadków możemy znaleźć czworokąt zawierający wielokąt W, mający pole mniejsze od czworokąta $ABCD$. Dowód przeprowadzę w przypadku 3; podobny dowód w przypadku 4 zostawię jako ćwiczenie.

Wybierzmy na boku CD punkt V tak, by punkt N był środkiem odcinka CV. Następnie poprowadźmy przez punkt V prostą k równoległą do boku BC. Prosta k może przeciąć bok AD. Przypuśćmy, że przecina go w punkcie W. Teraz na prostej k wybieramy punkt G tak, by półprosta NG leżała wewnątrz kąta VNP. Ponadto, jeśli prosta k przecina bok AD, to punkt G wybieramy wewnątrz odcinka VW. Wreszcie niech E i F będą punktami przecięcia prostej NG z prostymi BC i AD.



Wówczas czworokąt $ABEF$ oczywiście zawiera wielokąt W. Ponadto trójkąty NCE i NVG są przystające. Zatem

$$[NCE] = [NVG] < [NDF],$$

skąd wynika, że $[ABEF] < [ABCD]$. To jednak jest sprzeczne z wyborem czworokąta $ABCD$ jako czworokąta o najmniejszym polu zawierającego wielokąt W.

Niech więc czworokąt $ABCD$ będzie czworokątem o najmniejszym polu zawierającym wielokąt W. Niech P, Q, R i S będą środkami boków AB, BC, CD i DA czworokąta $ABCD$. Ponieważ przypadki 3 i 4 są niemożliwe, więc punkty P, Q, R i S leżą w wielokącie W. Czworokąt $PQRS$ jest oczywiście równoległobokiem oraz

$$[PQRS] = \frac{1}{2} \cdot [ABCD].$$

Ponieważ wielokąt W nie jest czworokątem, więc nie wypełnia całkowicie czworokąta $ABCD$. Zatem

$$[W] < [ABCD].$$

Stąd wynika, że

$$[PQRS] > \frac{1}{2} \cdot [W].$$

Zatem

$$[PQR] = [QRS] = [RSP] = [SPQ] = \frac{1}{2} \cdot [PQRS] > \frac{1}{4} \cdot [W] = \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Widzimy więc, że dla dowolnego wielokąta W ma miejsce jeden z dwóch przypadków:

$$S(W) = 5 \quad \text{lub} \quad S(W) = 6.$$

W swojej książce [S1] (str. 98) Alexander Soifer stawia następujące pytanie za 100 dolarów: dla których wielokątów wypukłych W ma miejsce równość $S(W) = 6$?

2. Liczby Heilbronna

Przypuśćmy, że dany jest skończony zbiór X punktów na płaszczyźnie. Wówczas definiujemy

$$\delta(X) = \min\{[ABC] : \ A, B, C \in X\}.$$

To znaczy, że $\delta(X)$ jest polem najmniejszego trójkąta ABC o wierzchołkach ze zbioru X. Taki trójkąt ABC będziemy nazywać trójkątem **minimalnym** dla zbioru X. Oczywiście, jeśli zbiór X zawiera trzy punkty współliniowe, to $\delta(X) = 0$. W dalszym ciągu przede wszystkim będą nas interesować takie zbiory X, które nie zawierają trzech punktów współliniowych.

Jeśli dany jest wielokąt wypukły $\mathcal{W}$ na płaszczyźnie, to symbolem $\delta(\mathcal{W})$ oznaczamy liczbę $\delta(X)$, gdzie X jest zbiorem wierzchołków wielokąta $\mathcal{W}$. Trójkątem minimalnym dla wielokąta $\mathcal{W}$ nazywamy trójkąt minimalny dla zbioru jego wierzchołków.

Przypuśćmy teraz, że $\mathcal{W}$ jest wielokątem wypukłym na płaszczyźnie. Wówczas dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ definiujemy tzw. **liczbę Heilbronna** w następujący sposób:

$$H_n(\mathcal{W}) = \frac{1}{[\mathcal{W}]} \cdot \max\{\delta(X) : \ X \subseteq \mathcal{W} \quad \text{oraz} \quad |X| = n\}.$$

W szczególności, jeśli wielokąt $\mathcal{W}$ ma pole równe 1, to

$$H_n(\mathcal{W}) = \max\{\delta(X) : \ X \subseteq \mathcal{W} \quad \text{oraz} \quad |X| = n\}.$$

Niech teraz $\mathcal{W}$ będzie dowolnym wielokątem wypukłym na płaszczyźnie. Zbiór X punktów znajdujących się w wielokącie $\mathcal{W}$ taki, że $|X| = n$ nazwiemy zbiorem **maksymalnym** w tym wielokącie, jeśli

$$\delta(X) = [\mathcal{W}] \cdot H_n(\mathcal{W}).$$

Inaczej mówiąc, zbiór X jest maksymalny, jeśli pole jego trójkąta minimalnego przyjmuje największą możliwą wartość (w wielokącie $\mathcal{W}$). Jeszcze inaczej: nie istnieje zbiór Y punktów znajdujących się w wielokącie W taki, że $|Y| = |X|$ oraz $\delta(Y) > \delta(X)$.

Oczywiście powstaje naturalne pytanie o to, czy takie zbiory maksymalne w ogóle istnieją. To znaczy, czy definicja liczb Heilbronna jest poprawna. Otóż istnienie zbiorów maksymalnych wynika z twierdzenia Weierstrassa i dowodu istnienia tych liczb nie zamieszczę w tym wykładzie.

W dalszym ciągu będą nas interesować szczególnie trzy rodzaje wielokątów wypukłych: $\mathcal{K}$ będzie kwadratem o boku 1, $\mathcal{R}$ będzie dowolnym równoległobokiem o polu 1 oraz $\mathcal{T}$ będzie trójkątem równobocznym o polu 1.

Kilka następnych zadań dotyczy przekształceń afinicznych płaszczyzny. Przypomnę teraz podstawowe własności przekształceń afinicznych. Niech $\mathbb{P}$ oznacza płaszczyznę i niech

$$f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$$

będzie dowolnym przekształceniem afinicznym płaszczyzny $\mathbb{P}$ w tę samą płaszczyznę. Wówczas:

- przekształcenie f jest różnowartościowe oraz przekształca płaszczyznę $\mathbb{P}$ na całą płaszczyznę $\mathbb{P}$,
- przekształcenie odwrotne f^{-1} jest afiniczne,
- przekształcenie f przeprowadza punkty współliniowe na punkty współliniowe; ponadto obrazem prostej jest prosta,
- obrazami prostych równoległych są proste równoległe,
- jeśli punkty P, Q i R są współliniowe oraz punkty P', Q' i R' są ich obrazami, to

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'},$$

- obrazem wielokąta wypukłego w przekształceniu afinicznym jest wielokąt wypukły.

Ponadto dla każdego przekształcenia afinicznego f istnieje liczba rzeczywista dodatnia c_f taka, że jeśli punkty P, Q i R nie są współliniowe oraz punkty P', Q' i R' są ich obrazami, to

$$[P'Q'R'] = c_f \cdot [PQR].$$

W szczególności, jeśli dane są dwa wielokąty V i W oraz V' i W' są ich obrazami, to

$$\frac{[V]}{[W]} = \frac{[V']}{[W']}.$$

Wreszcie dla dowolnych dwóch trójkątów ABC i DEF istnieje przekształcenie afiniczne f takie, że

$$f(A) = D, \quad f(B) = E \quad \text{oraz} \quad f(C) = F.$$

13. Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ oraz zbiór skończony X punktów płaszczyzny. Niech $Y = f(X)$. Niech następnie $P, Q, R \in X$ oraz

$$K = f(P), \quad L = f(Q) \quad \text{oraz} \quad M = f(R).$$

Udowodnij, że wówczas trójkąt PQR jest minimalny dla zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt KLM jest minimalny dla zbioru Y.

Rozwiązanie. Załóżmy, że trójkąt PQR jest trójkątem minimalnym dla zbioru X. Niech $D, E, F \in Y$ i niech

$$D = f(A), \quad E = f(B) \quad \text{oraz} \quad F = f(C).$$

Wówczas ma miejsce nierówność

$$[PQR] \leq [ABC].$$

Z powyższych własności przekształceń afinicznych wynika, że

$$[KLM] = c_f \cdot [PQR] \leq c_f \cdot [ABC] = [DEF],$$

co dowodzi, że trójkąt KLM jest trójkątem minimalnym dla zbioru Y.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że trójkąt KLM jest trójkątem minimalnym dla zbioru Y. Niech $A, B, C \in X$ i niech

$$D = f(A), \quad E = f(B) \quad \text{oraz} \quad F = f(C).$$

Wówczas ma miejsce nierówność

$$[KLM] \leq [DEF].$$

Zatem

$$c_f \cdot [PQR] \leq c_f \cdot [ABC],$$

skąd wynika, że $[PQR] \leq [ABC]$. To zaś dowodzi, że trójkąt PQR jest trójkątem minimalnym dla zbioru X. To kończy dowód.

14. Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ oraz zbiór skończony X punktów płaszczyzny. Niech $Y = f(X)$. Udowodnij, że wówczas

$$\delta(Y) = c_f \cdot \delta(X).$$

Rozwiązanie. Niech $P, Q, R \in X$ i niech trójkąt PQR będzie trójkątem minimalnym dla zbioru X. Niech następnie

$$K = f(P), \quad L = f(Q) \quad \text{oraz} \quad M = f(R).$$

Wówczas z poprzedniego zadania wynika, że trójkąt KLM jest trójkątem minimalnym dla zbioru Y. Mamy zatem równość

$$\delta(Y) = [KLM] = c_f \cdot [PQR] = c_f \cdot \delta(X),$$

co kończy dowód.

15. Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ oraz wielokąt wypukły $\mathcal{W}$. Niech wielokąt wypukły $\mathcal{V}$ będzie obrazem wielokąta $\mathcal{W}$ w przekształceniu f. Niech następnie X będzie zbiorem punktów znajdujących się w wielokącie $\mathcal{W}$ oraz niech $Y = f(X)$. Udowodnij, że wówczas zbiór X jest maksymalny w wielokącie $\mathcal{W}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Y jest maksymalny w wielokącie $\mathcal{V}$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że zbiór X jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{W}$. Mamy udowodnić, że zbiór Y jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{V}$. Niech zatem Z będzie dowolnym zbiorem punktów leżących w wielokącie $\mathcal{V}$ takim, że $|Z| = |Y|$. Niech następnie U będzie takim zbiorem punktów wielokąta $\mathcal{W}$, że $f(U) = Z$. Ponieważ zbiór X jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{W}$, więc

$$\delta(U) \leq \delta(X).$$

Zatem

$$\delta(Z) = c_f \cdot \delta(U) \leq c_f \cdot \delta(X) = \delta(Y),$$

co dowodzi, iż rzeczywiście zbiór Y jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{V}$. Dowód w drugą stronę jest analogiczny i pozostawię go jako ćwiczenie.

16. Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ oraz wielokąt wypukły $\mathcal{W}$. Niech wielokąt wypukły $\mathcal{V}$ będzie obrazem wielokąta $\mathcal{W}$ w przekształceniu f. Udowodnij, że wówczas

$$H_n(\mathcal{W}) = H_n(\mathcal{V}.$$

Rozwiązanie. Niech zbiór punktów X będzie zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{W}$ takim, że $|X| = n$. Wówczas

$$H_n(\mathcal{W}) = \frac{1}{[\mathcal{W}]} \cdot \delta(X).$$

Niech teraz $Y = f(X)$. Wówczas zbiór Y jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{V}$ oraz

$$H_n(\mathcal{V}) = \frac{1}{[\mathcal{V}]} \cdot \delta(Y) = \frac{1}{c_f \cdot [\mathcal{W}]} \cdot c_f \cdot \delta(Y) = \frac{1}{[\mathcal{W}]} \cdot \delta(X) = H_n(\mathcal{W}).$$

To kończy dowód.

17. Dane jest przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ oraz wielokąt wypukły $\mathcal{W}$. Niech wielokąt wypukły $\mathcal{V}$ będzie obrazem wielokąta $\mathcal{W}$ w przekształceniu f. Niech następnie zbiór punktów X będzie zawarty w obu wielokątach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{V}$. Jeśli

$$[\mathcal{W}] > [\mathcal{V}],$$

to zbiór X nie jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{W}$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że zbiór X jest zbiorem maksymalnym w wielokącie $\mathcal{W}$. Niech $n = |X|$. Wówczas z zadania 16 wynika, że

$$H_n(\mathcal{W}) = \frac{1}{[\mathcal{W}]} \cdot \delta(X) < \frac{1}{[\mathcal{V}]} \cdot \delta(X) \leq H_n(\mathcal{V}) = H_n(\mathcal{W}).$$

To jednak jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Własności przekształceń afinicznych udowodnione w czterech poprzednich zadaniach wykorzystamy teraz w następujących dwóch zadaniach dotyczących liczb Heilbronna dla trójkątów i równoległoboków.

18. Jeśli wielokąt $\mathcal{W}$ jest dowolnym trójkątem, to

$$H_n(\mathcal{W}) = H_n(\mathcal{T}).$$

Rozwiązanie. Wiemy, że istnieje przekształcenie afiniczne przekształcające trójkąt $\mathcal{W}$ na trójkąt $\mathcal{T}$. Z poprzedniego zadania wynika, że

$$H_n(\mathcal{W}) = H_n(\mathcal{T}),$$

co kończy dowód.

19. Jeśli wielokąt $\mathcal{W}$ jest dowolnym równoległobokiem, to

$$H_n(\mathcal{W}) = H_n(\mathcal{K}).$$

W szczególności

$$H_n(\mathcal{R}) = H_n(\mathcal{K}).$$

Rozwiązanie. Niech dany będzie równoległobok $ABCD$ i kwadrat $KLMN$. Istnieje przekształcenie afiniczne f płaszczyzny $\mathbb{P}$ takie, że

$$f(A) = K, \quad f(B) = L \quad \text{oraz} \quad f(D) = N.$$

Wykażę, że wówczas $f(C) = M$. Popatrzmy na prostą CD. Jej obrazem przy przekształceniu f jest prosta n przechodząca przez wierzchołek N i równoległa do prostej KL. Podobnie obrazem prostej BC jest prosta k przechodząca przez wierzchołek L i równoległa do prostej KN. Wierzchołek C jest punktem przecięcia prostych CD i BC. Zatem punkt $f(C)$ jest punktem przecięcia prostych n i k; tym punktem przecięcia jest wierzchołek M. Zatem $f(C) = M$. To znaczy, że kwadrat $KLMN$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ przy przekształceniu afinicznym f. Z zadania 16 wynika więc, że

$$H_n(ABCD) = H_n(KLMN).$$

To kończy dowód.

Za zakończenie tego rozdziału obliczymy trzy początkowe liczby Heilbronna.

20. Wykaż, że:

$$H_3(\mathcal{K}) = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad H_3(\mathcal{T}) = 1.$$

Rozwiązanie. Równość

$$H_3(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}$$

wynika natychmiast z zadania 1 i uwagi po zadaniu 4. Równość

$$H_3(\mathcal{T}) = 1$$

jest oczywista. Jeśli punkty P, Q i R znajdują się w trójkącie równobocznym ABC o polu równym 1, to

$$[PQR] \leq [ABC] = 1.$$

Z drugiej strony, jeśli punkty P, Q i R są wierzchołkami trójkąta o polu równym 1, to $[PQR] = 1$. To kończy dowód.

21. Wykaż, że:

$$H_4(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie. Niech punkty P, Q, R i S znajdują się w kwadracie o polu równym 1. Z lematu udowodnionego w rozwiązaniu zadania 1 wynika natychmiast, że

$$\delta(\{P, Q, R, S\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony, jeśli punkty P, Q, R i S są wierzchołkami kwadratu o polu 1, to

$$[PQR] = [QRS] = [RSP] = [SPQ] = \frac{1}{2}.$$

To kończy dowód.

3. Liczba Heilbronna $H_4(\mathcal{T})$

W tym rozdziale seria zadań doprowadzi nas do wykazania, że

$$H_4(\mathcal{T}) = \frac{1}{3}.$$

W całym rozdziale literą X oznaczam zbiór złożony z czterech punktów płaszczyzny:

$$X = \{P, Q, R, S\}.$$

22. Przypuśćmy, że punkty P, Q, R i S znajdują się w dwóch trójkątach ABC i DEF. Załóżmy następnie, że $[ABC] > [DEF]$. Wówczas zbiór

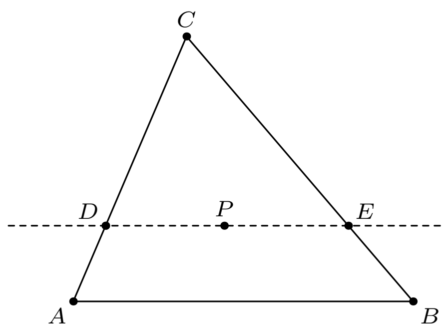
$$X = \{P, Q, R, S\}$$

nie jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC.

Rozwiązanie. Rozwiązanie tego zadania wynika natychmiast z zadania 17 oraz tego, że trójkąt DEF jest obrazem trójkąta ABC przy pewnym przekształceniu afinicznym.

23. Przypuśćmy, że zbiór punktów X jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC. Wówczas na każdym boku trójkąta ABC znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru X.

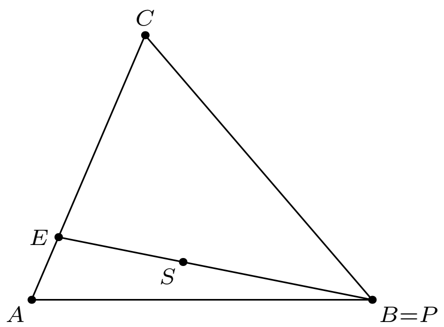
Rozwiązanie. Przypuśćmy bowiem, że na przykład na boku AB trójkąta ABC nie leży żaden punkt ze zbioru X. Niech P będzie punktem zbioru X leżącym najbliżej prostej AB. Przez punkt P prowadzimy prostą równoległą do boku AB przecinającą boki AC i BC odpowiednio w punktach D i E.



Wówczas $[ABC] > [DEC]$ oraz wszystkie punkty zbioru X znajdują się w trójkącie DEF. Z poprzedniego zadania wynika, że zbiór X nie jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC. Otrzymana sprzeczność z założeniem kończy rozwiązanie zadania.

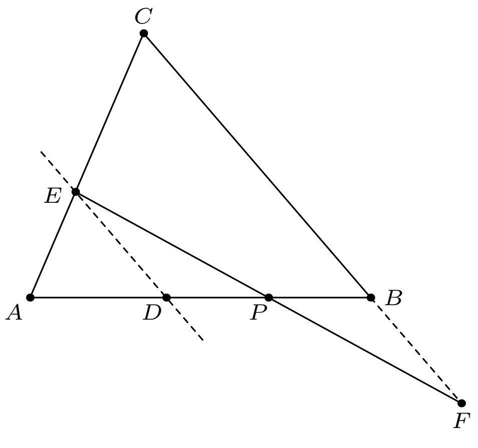
24. Przypuśćmy, że zbiór punktów X jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC. Załóżmy następnie, że na pewnym boku trójkąta ABC, na przykład na boku AB, znajduje się dokładnie jeden punkt P zbioru X. Wówczas punkt P jest środkiem boku AB.

Rozwiązanie. Przypuśćmy najpierw, że punkt P jest jednym z końców odcinka AB, na przykład $P = B$. Wybierzmy ten punkt S ze zbioru X, dla którego kąt ABS jest najmniejszy. Niech prosta BS przecina bok AC w punkcie E. Wówczas pozostałe punkty zbioru X leżą w trójkącie BCE:



Z zadania 22 wynika, że zbiór X nie jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że punkt P leży wewnątrz boku AB.

Przeprowadzimy teraz konstrukcję analogiczną do konstrukcji z rozwiązania zadania 12. Przypuśćmy, że punkt P leży bliżej wierzchołka B. Wewnątrz odcinka AP znajdujemy taki punkt D, że $DP = PB$. Następnie przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do boku BC, przecinającą bok AC w punkcie E. Niech wreszcie proste PE i BC przecinają się w punkcie F.

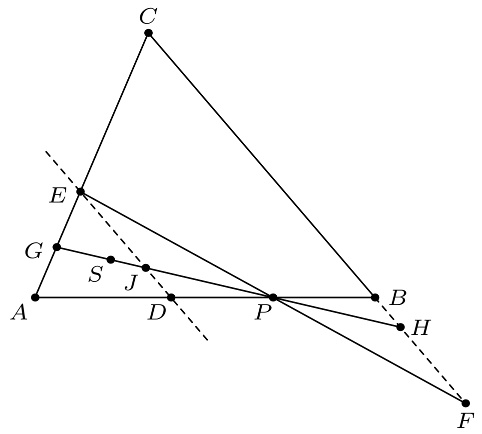


Przypuśćmy najpierw, że wewnątrz trójkąta APE i wewnątrz odcinka AE nie ma punktów zbioru X. Wówczas pozostałe punkty zbioru X znajdują się w czworokącie $PBCE$, a więc tym bardziej w trójkącie EFC. Wystarczy teraz zauważyć, że trójkąty PBF i PDE są przystające, skąd wynika, że

$$[EFC] = [PBCE] + [PFB] = [PBCE] + [PDE] < [PBCE] + [APE] = [ABC].$$

Z zadania 22 wynika, że zbiór X nie jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC.

Wreszcie przypuśćmy, że w trójkącie APE znajdują się punkty zbioru X. Wybieramy ten punkt S, dla którego kąt APS jest najmniejszy. Niech prosta PS przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach G i H. Niech wreszcie prosta GH przecina prostą DE w punkcie J:



Wówczas pozostałe punkty zbioru X znajdują się w czworokącie $PBCG$, a więc tym bardziej w trójkącie GHC. Ponieważ trójkąty PBH i PDJ są przystające, więc

$$[GHC] = [PBCG] + [PBH] = [PBCG] + [PDJ] < [PBCG] + [APG] = [ABC].$$

Jeszcze raz z zadania 22 wynika, że zbiór X nie jest zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC.

Założenie, że punkt P nie jest środkiem boku AB doprowadziło do sprzeczności. To kończy dowód.

Teraz możemy rozwiązać zadanie zapowiedziane na początku tego rozdziału.

25. Udowodnij, że

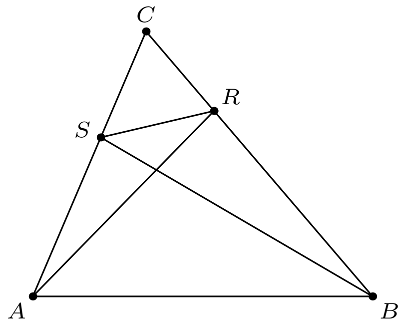
$$H_4(\mathcal{T}) = \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie. Niech zbiór punktów $X = \{P, Q, R, S\}$ będzie zbiorem maksymalnym w trójkącie ABC. Mamy teraz cztery przypadki.

Przypadek 1. W zbiorze X znajdują się wszystkie wierzchołki trójkąta ABC. Wtedy z zadania 3 wynika, że

$$\delta(X) \leq \frac{1}{3} \cdot [ABC].$$

Przypadek 2. W zbiorze X znajdują się dokładnie dwa wierzchołki trójkąta ABC. Przyjmijmy na przykład, że $P = A$ oraz $Q = B$. Z poprzedniego zadania wynika, że punkt P nie może być jedynym punktem zbioru X leżącym na boku AC; podobnie punkt Q nie może być jedynym punktem zbioru X leżącym na boku BC. Przyjmijmy zatem, że punkt R leży wewnątrz boku BC i punkt S leży wewnątrz boku AC:



Przyjmijmy następnie, że

$$\frac{AS}{AC} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{BR}{BC} = b,$$

gdzie oczywiście $0 < a, b < 1$. Mamy wówczas

$$\frac{CS}{AC} = 1 - a \quad \text{oraz} \quad \frac{CR}{BC} = 1 - b.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{[ARS]}{[ABC]} = \frac{[ARS]}{[ARC]} \cdot \frac{[ARC]}{[ABC]} = a(1-b).$$

W podobny sposób wykazujemy, że

$$\frac{[BRS]}{[ABC]} = b(1-a).$$

Zatem

$$\frac{[ARS]}{[ABC]} \cdot \frac{[BRS]}{[ABC]} = a(1-b) \cdot b(1-a) = a(1-a) \cdot b(1-b).$$

Teraz zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x ma miejsce nierówność

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Przekształćmy bowiem tę nierówność w sposób równoważny:

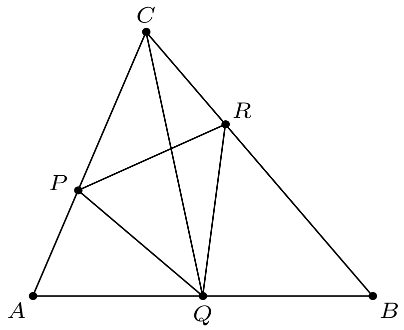
$$\begin{gathered} 4x(1-x) \leq 1, \\ 4x - 4x^2 \leq 1, \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ (2x-1)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą, więc dowodzona nierówność też jest prawdziwa. Mamy zatem

$$\frac{[ARS]}{[ABC]} \cdot \frac{[BRS]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Stąd wynika, że
$$\frac{[ARS]}{[ABC]} \le \frac{1}{4} \quad \text{lub} \quad \frac{[BRS]}{[ABC]} \le \frac{1}{4}.$$
Zatem
$$\delta(X) \le \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Przypadek 3. W zbiorze X znajduje się dokładnie jeden wierzchołek trójkąta ABC. Przyjmijmy na przykład, że $S = C$. Z poprzedniego zadania wynika, że punkt S nie może być jedynym punktem zbioru X leżącym na bokach AC i BC. Przyjmijmy zatem, że punkt P leży wewnątrz boku AC i punkt R leży wewnątrz boku BC. Wreszcie na boku AB musi leżeć dokładnie jeden punkt zbioru X. Niech będzie to punkt Q. Z poprzedniego zadania wiemy, że punkt Q jest środkiem boku AB:



Przyjmijmy następnie, że
$$\frac{AP}{AC} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{BR}{BC} = b,$$
gdzie oczywiście $0 < a, b < 1$. Mamy wówczas
$$\frac{CP}{AC} = 1 - a \quad \text{oraz} \quad \frac{CR}{BC} = 1 - b.$$
Teraz obliczamy pola trójkątów widocznych na powyższym rysunku:
$$\begin{aligned}
[APQ] &= \frac{1}{2}a \cdot [ABC],\\
[CPQ] &= \frac{1}{2}(1-a) \cdot [ABC],\\
[BQR] &= \frac{1}{2}b \cdot [ABC],\\
[CQR] &= \frac{1}{2}(1-b) \cdot [ABC],\\
[CPR] &= (1-a)(1-b) \cdot [ABC],\\
[PQR] &= [ABC] - [APQ] - [BQR] - [CPR] =\\
&= [ABC] - \frac{1}{2}a \cdot [ABC] - \frac{1}{2}b \cdot [ABC] - (1-a)(1-b) \cdot [ABC] =\\
&= \left(1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - (1-a)(1-b)\right) \cdot [ABC] =\\
&= \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - ab\right) \cdot [ABC].
\end{aligned}$$

Wykażę teraz, że w tym przypadku

$$\delta(X) \le \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Przypuśćmy zatem, że ma miejsce nierówność przeciwna:

$$\delta(X) > \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Zatem w szczególności

$$[CPQ] > \frac{1}{4} \cdot [ABC] \quad \text{oraz} \quad [CQR] > \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Stąd wynika, że

$$\frac{1}{2}(1-a) > \frac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}(1-b) > \frac{1}{4},$$

czyli

$$a < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad b < \frac{1}{2}.$$

Teraz z przyjętego założenia wynika, że

$$[PQR] > \frac{1}{4} \cdot [ABC],$$

czyli

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - ab > \frac{1}{4}.$$

Przekształćmy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 2a + 2b - 4ab > 1, \\ 4ab - 2a - 2b + 1 < 0, \\ (2a-1)(2b-1) < 0. \end{gathered}$$

Doszliśmy do sprzeczności, gdyż

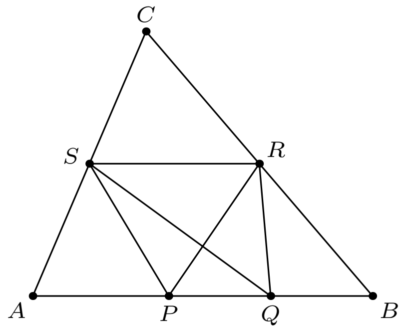
$$2a - 1 < 0 \quad \text{oraz} \quad 2b - 1 < 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, iż rzeczywiście ma miejsce nierówność

$$\delta(X) \le \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Przypadek 4. W zbiorze X nie ma ani jednego wierzchołka trójkąta ABC. Wszystkie punkty zbioru X leżą zatem wewnątrz boków trójkąta ABC. Pamiętamy przy tym, że na każdym boku trójkąta ABC znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru X. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkty P i Q leżą wewnątrz boku AB, punkt

R leży wewnątrz boku BC i punkt S leży wewnątrz boku AC. Z poprzedniego zadania wynika, że punkty R i S są odpowiednio środkami boków BC i AC:



Wówczas łatwo zauważamy, że

$$[PRS] = [QRS] = \frac{1}{4} \cdot [ABC],$$

skąd wynika, że w tym przypadku także

$$\delta(X) \leq \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

W pierwszym przypadku mieliśmy nierówność

$$\delta(X) \leq \frac{1}{3} \cdot [ABC].$$

W trzech pozostałych uzyskaliśmy nierówność

$$\delta(X) \leq \frac{1}{4} \cdot [ABC].$$

Zatem

$$H_4(ABC) \leq \frac{1}{3}.$$

Z drugiej strony, jeśli przyjmiemy $P = A$, $Q = B$, $R = C$ oraz jako S weźmiemy środek ciężkości trójkąta ABC, to oczywiście

$$\delta(X) = \frac{1}{3} \cdot [ABC].$$

Stąd wynika, że ostatecznie

$$H_4(ABC) = \frac{1}{3}.$$

Z zadania 18 wynika, że także

$$H_4(\mathcal{T}) = \frac{1}{3}.$$

To kończy dowód.

4. Liczba Heilbronna $H_5(\mathcal{K})$

W tym rozdziale seria zadań doprowadzi nas do wykazania, że

$$H_5(\mathcal{K}) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Najpierw znajdziemy szacowanie dolne liczby $H_5(\mathcal{K})$.

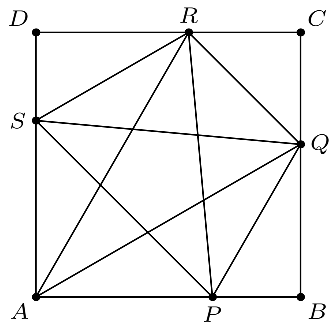
26. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku równym 1. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio punkty P i S takie, że $AP = AS = \frac{2}{3}$. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty Q i R takie, że $BQ = DR = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Wykaż, że

$$\delta(APQRS) = \frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{1}{6}.$$

Rozwiązanie. Niech

$$AP = AS = a \quad \text{oraz} \quad BQ = DR = b.$$

Wyrazimy za pomocą a i b pola trójkątów widocznych na poniższym rysunku:



$$[APS] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2,$$
$$[APQ] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot ab,$$
$$[APR] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot a,$$
$$[ASR] = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot DR = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot ab,$$
$$[ASQ] = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot SQ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot a,$$
$$\begin{aligned}[PQR] &= [PBCR] - [PBQ] - [QCR] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (PB + RC) \cdot BC - \frac{1}{2} \cdot PB \cdot BQ - \frac{1}{2} \cdot QC \cdot RC = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - a + 1 - b) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (1 - a) \cdot b - \frac{1}{2} \cdot (1 - b) \cdot (1 - b) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - a + 1 - b - b + ab - 1 + 2b - b^2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - a - b^2 + ab),\end{aligned}$$
$$[SQR] = [PQR] = \frac{1}{2} \cdot (1 - a - b^2 + ab),$$

$$\begin{aligned}
[PRS] &= [APRD] - [APS] - [SRD] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (AP + DR) \cdot AD - \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AS - \frac{1}{2} \cdot SD \cdot DR = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot (1-a) \cdot b = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (a + b - a^2 - b + ab) = \frac{1}{2} \cdot (a + ab - a^2) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot a(1 - a + b), \\
[SQP] &= [PRS] = \frac{1}{2} \cdot (a + ab - a^2) = \frac{1}{2} \cdot a(1 - a + b), \\
[AQR] &= [APQRS] - [APQ] - [ASR] = \\
&= [APS] + [PRS] + [PQR] - [APQ] - [ASR] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot (a + ab - a^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 - a - b^2 + ab) - \frac{1}{2} \cdot ab - \frac{1}{2} \cdot ab = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (a^2 + a + ab - a^2 + 1 - a - b^2 + ab - ab - ab) = \frac{1}{2} \cdot (1 - b^2).
\end{aligned}$$

Podstawmy teraz

$$a = \frac{2}{3} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Otrzymamy:

$$\begin{aligned}
[APS] &= \frac{4}{9} \approx 0{,}444, \\
[APQ] = [ASR] &= \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}192, \\
[APR] = [ASQ] &= \frac{1}{3} \approx 0{,}333, \\
[PQR] = [SQR] &= \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}192, \\
[PRS] = [SQP] &= \frac{1}{9} \cdot (1 + \sqrt{3}) \approx 0{,}304, \\
[AQR] &= \frac{1}{3} \approx 0{,}333.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\delta(APQRS) = [APQ] = [ASR] = [PQR] = [SQR] = \frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{1}{6}.$$

To kończy dowód.

Z powyższego zadania wynika, że

$$H_5(\mathcal{K}) \geq \frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{1}{6}.$$

Następne zadania mają wykazać, że ma miejsce nierówność przeciwna

$$H_5(\mathcal{K}) \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

27. Dany jest kwadrat $\mathcal{K}$ o boku równym 1. W tym kwadracie umieszczono 5 takich punktów P, Q, R, S i T, że

$$\delta(\{P, Q, R, S, T\}) = H_5(\mathcal{K}).$$

Udowodnij, że wówczas punkty P, Q, R, S i T są wierzchołkami pięciokąta wypukłego.

Rozwiązanie. Jeśli punkty P, Q, R, S i T nie są wierzchołkami pięciokąta wypukłego, to wśród nich istnieją cztery punkty takie, że jeden z nich znajduje się w trójkącie, którego wierzchołkami są pozostałe trzy punkty. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt S znajduje się w trójkącie PQR. Przyjmijmy następnie, że trójkąt PQS ma najmniejsze pole spośród trójkątów PQS, QRS i RPS. Wówczas mamy

$$H_5(\mathcal{K}) = \delta(\{P, Q, R, S, T\}) \leq [PQS] \leq \frac{1}{3} \cdot [PQR] \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\mathcal{K}] = \frac{1}{6}.$$

To jednak jest sprzeczne z nierównością

$$H_5(\mathcal{K}) > \frac{1}{6}$$

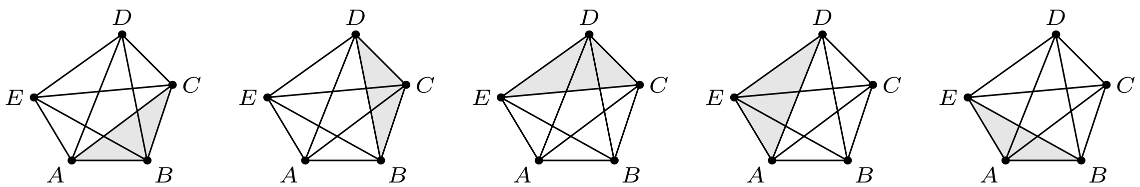
wynikającą z poprzedniego zadania. To kończy dowód.

Teraz zajmiemy się badaniem własności pięciokątów wypukłych.

Przypuśćmy, że dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wśród dziesięciu trójkątów, których wierzchołki są trzema spośród pięciu wierzchołków pięciokąta, wyróżniamy dwa rodzaje.

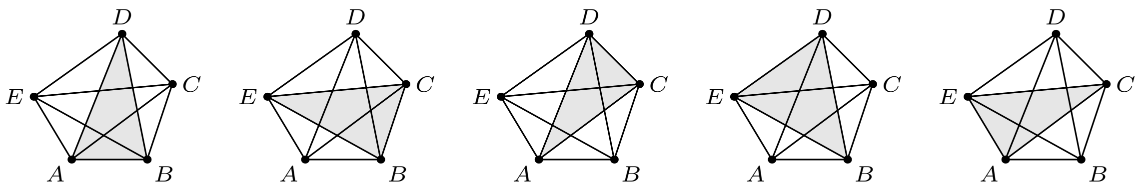
- Trójkąty zewnętrzne, których wierzchołki są trzema kolejnymi wierzchołkami pięciokąta. W pięciokącie $ABCDE$ mamy pięć trójkątów zewnętrznych:

$$\triangle ABC, \quad \triangle BCD, \quad \triangle CDE, \quad \triangle DEA \quad \text{oraz} \quad \triangle EAB.$$



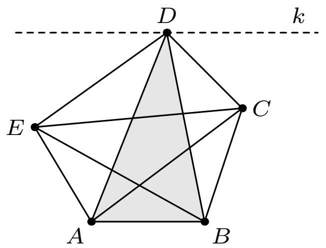
- Trójkąty wewnętrzne, których wierzchołkami są dwa wierzchołki sąsiednie i trzeci niesąsiadujący z żadnym z tych dwóch. W pięciokącie $ABCDE$ mamy pięć trójkątow wewnętrznych:

$$\triangle ABD, \quad \triangle BCE, \quad \triangle CDA, \quad \triangle DEB \quad \text{oraz} \quad \triangle EAC.$$



28. Udowodnij, że trójkąt wewnętrzny dowolnego pięciokąta wypukłego $ABCDE$ nie jest trójkątem minimalnym dla tego pięciokąta.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że na przykład trójkąt wewnętrzny ABD jest trójkątem minimalnym dla pięciokąta $ABCDE$. Przez wierzchołek D poprowadźmy prostą k równoległą do prostej AB.



Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły, więc oba wierzchołki C i E nie mogą leżeć po przeciwnej stronie prostej k niż wierzchołki A i B. Gdyby bowiem tak się stało, to kąt wewnętrzny CDE pięciokąta byłby kątem wklęsłym. W wielokącie wypukłym jednak żaden kąt wewnętrzny nie może być wklęsły. Podobnie oba wierzchołki C i E nie mogą leżeć na prostej k, gdyż w wielokącie wypukłym trzy kolejne wierzchołki nie mogą być współliniowe. Stąd wynika, że co najmniej jeden z wierzchołków C i E leży po tej samej stronie prostej k co wierzchołki A i B, czyli

$$[ABD] > [ABC] \quad \text{lub} \quad [ABD] > [ABE].$$

W obu przypadkach trójkąt ABD nie jest trójkątem minimalnym pięciokąta $ABCDE$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Przypuśćmy teraz, że w kwadracie $\mathcal{K}$ o boku równym 1 wybrano punkty P, Q, R, S i T tak, by

$$\delta(\{P, Q, R, S, T\}) = H_5(\mathcal{K}).$$

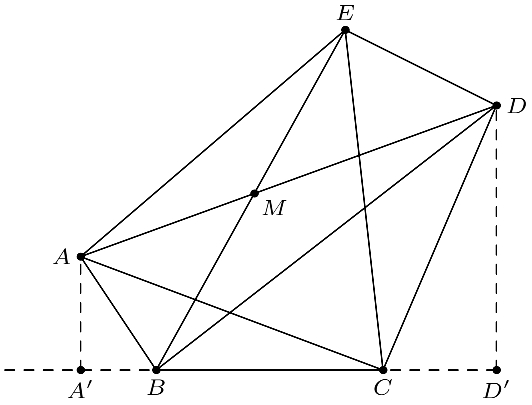
Wiemy już, że punkty P, Q, R, S i T są wierzchołkami pięciokąta wypukłego. Taki pięciokąt nazwiemy pięciokątem maksymalnym dla kwadratu $\mathcal{K}$. Inaczej mówiąc, pięciokąt maksymalny jest to taki pięciokąt wypukły $PQRST$ zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$, dla którego liczba $\delta(PQRST)$ jest największa.

29. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ taki, że trójkąt ABC jest jego jedynym trójkątem minimalnym. Udowodnij, że wówczas wewnątrz tego pięciokąta istnieje taki punkt F, iż pięciokąt $FBCDE$ jest wypukły oraz

$$\delta(FBCDE) > \delta(ABCDE).$$

W szczególności, jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$, to nie jest pięciokątem maksymalnym w tym kwadracie.

Rozwiązanie. Ponieważ $[ABC] < [BCD]$, więc punkt D leży dalej od prostej BC niż punkt A:



Stąd wynika, że jeśli F jest dowolnym punktem leżącym wewnątrz przekątnej AD, to $[ABC] < [BCF] < [BCD]$. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AD i BC. Wybierzmy teraz punkt F wewnątrz odcinka AM. Oczywiście pięciokąt $FBCDE$ jest wypukły. Teraz popatrzmy, jak wyglądają trójkąty zewnętrzne w pięciokącie $FBCDE$. Mamy oczywiście:

$$\begin{aligned} &[FBC] > [ABC], \\ &[BCD] \quad \text{nie zmienia się}, \\ &[CDE] \quad \text{nie zmienia się}, \\ &[DEF] < [DEA], \\ &[EFB] < [EAB]. \end{aligned}$$

Pamiętajmy jeszcze, że $[ABC] < [DEA]$ oraz $[ABC] < [EAB]$. Możemy teraz wybrać punkt F na tyle blisko punktu A, by trójkąty DEF i EFB były bardzo niewiele mniejsze od trójkątów DEA i EAB — tak, że po zamianie punktu A na F trójkąt FBC będzie jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $FBCDE$. Mamy więc

$$\delta(FBCDE) = [FBC] > [ABC] = \delta(ABCDE).$$

To kończy dowód.

Ten dowód został sformułowany niezbyt ściśle. Pokażę teraz, że można go zapisać w sposób ścisły. Ponieważ

$$[ABC] < [CDE], \quad [ABC] < [DEA] \quad \text{oraz} \quad [ABC] < [EAB],$$

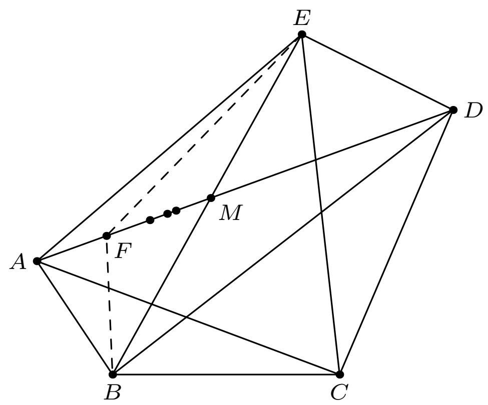
więc istnieje liczba rzeczywista $\varepsilon > 0$ taka, że

$$[ABC] + \varepsilon < [CDE], \quad [ABC] + \varepsilon < [DEA] \quad \text{oraz} \quad [ABC] + \varepsilon < [EAB].$$

Na półprostej AD wybieramy teraz trzy punkty X, Y i Z takie, że

$$[XBC] = [ABC] + \varepsilon, \quad [DEY] = [ABC] + \varepsilon \quad \text{oraz} \quad [EZB] = [ABC] + \varepsilon.$$

Spośród czterech punktów M, X, Y i Z któryś leży najbliżej punktu A. Wybieramy teraz punkt F leżący na półprostej AD jeszcze bliżej punktu A. Na poniższym rysunku zaznaczono trzy punkty leżące wewnątrz odcinka FM — są to punkty X, Y i Z.



Zauważmy, że trójkąt DEY jest zawarty w trójkącie DEF oraz trójkąt EZB jest zawarty w trójkącie EFB. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
&[BCD] > [FBC],\\
&[CDE] > [ABC] + \varepsilon = [XBC] > [FBC],\\
&[DEF] > [DEY] = [ABC] + \varepsilon > [FBC],\\
&[EFB] > [EZB] = [ABC] + \varepsilon > [FBC].
\end{aligned}$$

Ponadto $[BCD] > [FBC]$, gdyż punkt F leży wewnątrz odcinka AD. Zatem rzeczywiście trójkąt FBC jest jedynym trójkątem minimalnym w pięciokącie wypukłym $FBCDE$ oraz $[FBC] > [ABC]$. To kończy dowód.

30. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ taki, że trójkąty ABC i EAB są jego jedynymi trójkątami minimalnymi. To znaczy, że

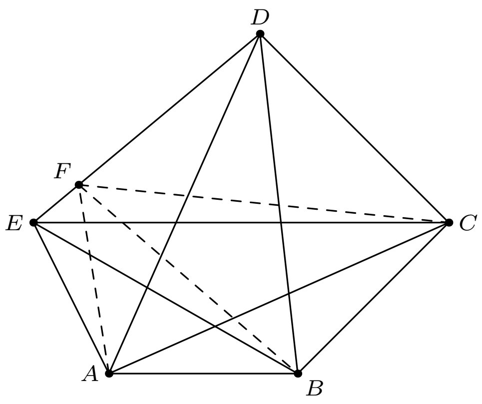
$$[ABC] = [EAB] < [BCD], [CDE], [DEA].$$

Udowodnij, że wówczas wewnątrz boku DE tego pięciokąta istnieje taki punkt F, że pięciokąt $ABCDF$ jest wypukły,

$$\delta(ABCDF) = \delta(ABCDE)$$

oraz trójkąt ABC jest jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $ABCDF$. Stąd i z poprzedniego zadania wynika, że jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$, to nie jest pięciokątem maksymalnym w tym kwadracie.

Rozwiązanie. Ponieważ $[ABC] = [EAB]$, więc przekątna EC jest równoległa do boku AB pięciokąta. Ponieważ pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły, więc wierzchołek D leży po przeciwnej stronie prostej EC niż wierzchołki A i B. Stąd wynika, że jeśli punkt F leży wewnątrz boku ED, to $[FAB] > [EAB] = [ABC]$.



Wybierzmy teraz punkt F na tyle blisko punktu E, by:

$$[CDF] > [ABC] \quad \text{oraz} \quad [DFA] > [ABC].$$

Ponieważ także $[BCD] > [ABC]$, więc trójkąt ABC rzeczywiście jest jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $ABCDF$. Równość $\delta(ABCDF) = \delta(ABCDE)$ wynika stąd, że trójkąt ABC jest trójkątem minimalnym obu pięciokątów $ABCDE$ i $ABCDF$. To kończy dowód.

Ten dowód także można przeprowadzić ściśle, nie odwołując się do niejasnego sformułowania „na tyle blisko punktu E". Mianowicie z założenia

$$[ABC] = [EAB] < [BCD], [CDE], [DEA]$$

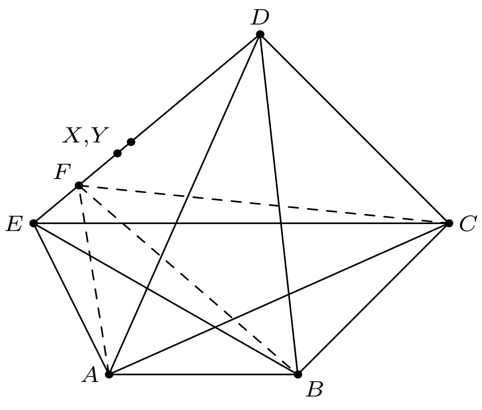
wynika, że istnieje liczba rzeczywista $\varepsilon > 0$ taka, że

$$[ABC] + \varepsilon = [EAB] + \varepsilon < [BCD], [CDE], [DEA].$$

Na półprostej ED wybieramy teraz punkty X, Y tak, by

$$[DXA] = [EAB] + \varepsilon \quad \text{oraz} \quad [CDY] = [EAB] + \varepsilon.$$

Następnie wybieramy punkt F wewnątrz odcinka ED leżący bliżej punktu A niż punkty X i Y.



Teraz z założenia mamy $[BCD] > [ABC]$. Następnie trójkąt DXA jest zawarty w trójkącie DFA, więc

$$[DFA] > [DXA] = [EAB] + \varepsilon > [EAB] = [ABC].$$

Wreszcie trójkąt CDY jest zawarty w trójkącie CDF, więc

$$[CDF] > [CDY] = [EAB] + \varepsilon > [EAB] = [ABC].$$

Ponieważ punkt F leży wewnątrz odcinka ED, więc $[FAB] > [EAB] = [ABC]$. To dowodzi, że trójkąt ABC rzeczywiście jest jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $ABCDF$. Tak jak wyżej równość $\delta(ABCDF) = \delta(ABCDE)$ wynika stąd, że trójkąt ABC jest trójkątem minimalnym obu pięciokątów $ABCDE$ i $ABCDF$. To kończy dowód.

W dalszym ciągu przedstawię jeszcze kilka podobnych rozumowań. Ścisłe sformułowanie każdego z nich pozostawię jako łatwe ćwiczenie dla Czytelnika. Główny pomysł każdego z tych dowodów polega na stwierdzeniu, że niewielka zmiana położenia jednego wierzchołka pięciokąta powoduje niewielką zmianą pól trójkątów. Ta niewielka zmiana pól oznacza, że jeśli jakiś trójkąt miał pole większe od pola innego trójkąta, to ta nierówność zachowa się przy tej niewielkiej zmianie.

31. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ taki, że trójkąty BCD i DEA są jego jedynymi trójkątami minimalnymi. To znaczy, że

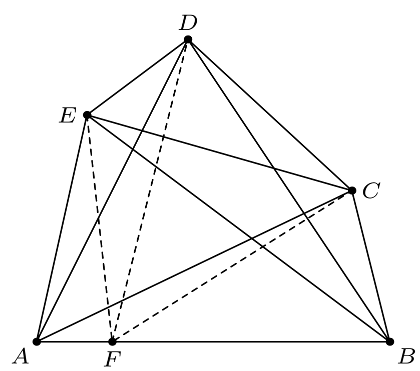
$$[BCD] = [DEA] < [ABC], [CDE], [EAB].$$

Udowodnij, że wówczas wewnątrz boku AB tego pięciokąta istnieje taki punkt F, że pięciokąt $FBCDE$ jest wypukły,

$$\delta(ABCDF) = \delta(ABCDE)$$

oraz trójkąt BCD jest jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $ABCDF$. Stąd i z zadania 29 wynika, że jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$, to nie jest pięciokątem maksymalnym w tym kwadracie.

Rozwiązanie. Ponieważ $[DEA] < [BDE]$, więc wierzchołek B leży dalej od prostej DE niż wierzchołek A. Wybierzmy na boku AB punkt F leżący blisko wierzchołka A.



Ponieważ punkt F leży wewnątrz boku AB, więc

$$[DEF] > [DEA] = [BCD].$$

Ponieważ

$$[ABC] > [BCD] \quad \text{oraz} \quad [EAB] > [BCD],$$

więc jeśli punkt F będzie leżał dostatecznie blisko wierzchołka A, to pola trójkątów FBC i EFB będą nieznacznie różnić się od pól trójkątów ABC i EAB. To znaczy, że dla tak wybranego punktu F będą miały miejsce nierówności:

$$[FBC] > [BCD] \quad \text{oraz} \quad [FAB] > [BCD].$$

Wreszcie zamiana punktu A na punkt F nie zmienia pola trójkąta CDE. To znaczy, że nadal ma miejsce nierówność

$$[CDE] > [BCD].$$

Stąd wynika, że trójkąt BCD jest jedynym trójkątem minimalnym pięciokąta $FBCDE$. Oczywiście

$$\delta(FBCDE) = [BCD] = \delta(ABCDE).$$

Ponieważ pięciokąt $FBCDE$ ma dokładnie jeden trójkąt minimalny, więc nie jest on pięciokątem maksymalnym w kwadracie $\mathcal{K}$. Zatem pięciokąt $ABCDE$ także nie jest pięciokątem maksymalnym w tym kwadracie. To kończy dowód.

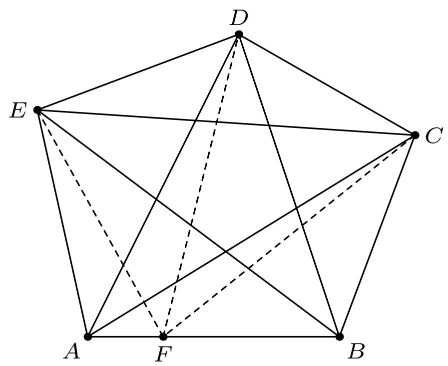
Z trzech powyższych zadań wynika, jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$ i ma co najwyżej dwa trójkąty minimalne, to nie jest pięciokątem maksymalnym. Inaczej mówiąc, pięciokąt maksymalny ma co najmniej trzy trójkąty minimalne. Pamiętamy przy tym, że te trójkąty minimalne są trójkątami zewnętrznymi.

32. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ mający dokładnie trzy trójkąty minimalne i taki, że oba trójkąty nieminimalne mają wspólny bok. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że trójkąty BCD, CDE i DEA są trójkątami minimalnymi pięciokąta $ABCDE$ oraz:

$$[BCD] = [CDE] = [DEA] < [ABC], [EAB].$$

Udowodnij, że wówczas wewnątrz boku AB tego pięciokąta istnieje taki punkt F, że pięciokąt $FBCDE$ jest wypukły, $\delta(FBCDE) = \delta(ABCDE)$ oraz trójkąty BCD i CDE są jedynymi trójkątami minimalnymi pięciokąta $FBCDE$. Stąd wynika, że jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$, to nie jest pięciokątem maksymalnym w tym kwadracie.

Rozwiązanie. Wybierzmy punkt F wewnątrz boku AB, bardzo blisko punktu A.



Ponieważ trójkąt DEA jest trójkątem minimalnym dla pięciokąta $ABCDE$, więc

$$[DEA] < [DEB].$$

Stąd wynika, że punkt B leży dalej od prostej DE niż punkt A. Zatem dla dowolnego punktu F leżącego wewnątrz boku AB mają miejsce nierówności

$$[DEA] < [DEF] < [DEB].$$

W szczególności dla wybranego punkty F mamy nierówności

$$[DEF] > [DEA] = [BCD] = [CDE].$$

Punkt F został wybrany bardzo blisko punktu A, więc pola trójkątów EAB i ABC zmieniły się nieznacznie. Ponieważ $[EAB] > [BCD]$, więc mamy także

$$[EFB] > [BCD].$$

Podobnie, ponieważ $[ABC] > [BCD]$, więc

$$[FBC] > [BCD].$$

Podsumujmy. W pięciokącie $FBCDE$ mamy nierówności:

$$[DEF], [EFB], [FBC] > [BCD] = [CDE].$$

Stąd wynika, że

$$\delta(FBCDE) = \delta(ABCDE)$$

oraz pięciokąt $FBCDE$ ma tylko dwa trójkąty minimalne: BCD i CDE. Zatem ten pięciokąt nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $\mathcal{K}$, a więc pięciokąt $ABCDE$ także nie jest pięciokątem maksymalnym. To kończy rozwiązanie zadania.

Z powyższego zadania wynika, że jeśli pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w kwadracie $\mathcal{K}$ i jest w tym kwadracie pięciokątem maksymalnym, to albo ma co najmniej cztery trójkąty minimalne, albo ma dokładnie trzy trójkąty minimalne i oba trójkąty nieminimalne mają wyłącznie wspólny wierzchołek (czyli nie mają wspólnego boku).

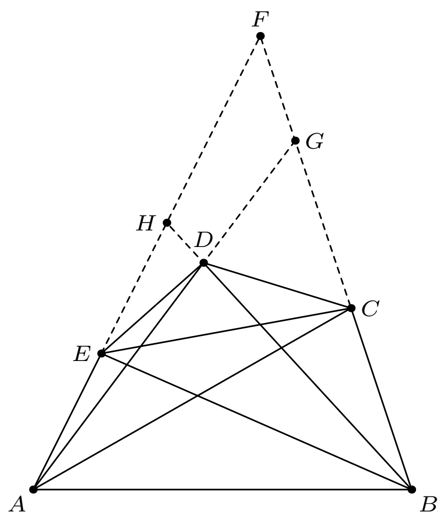
33. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $\mathcal{K}$. Udowodnij, że wówczas suma dwóch kolejnych kątów tego pięciokąta jest większa od $180°$. Dla ustalenia uwagi: udowodnij, że

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC > 180°.$$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC \leq 180°.$$

Proste AE i BC są zatem równoległe lub przecinają się po tej stronie prostej AB, po której leży cały pięciokąt $ABCDE$. Rozpatrzę tylko tę drugą możliwość. Dowód w przypadku, gdy proste AE i BC są równoległe, jest niewielką modyfikacją dowodu, który przedstawię; pozostawię go zatem jako nietrudne ćwiczenie. Niech F będzie punktem przecięcia prostych AE i BC. Niech następnie proste AD i BD przecinają proste BC i AE odpowiednio w punktach G i H.



Wówczas punkt A leży dalej od prostej BC niż punkt D. Stąd wynika, że

$$[ABC] > [BCD].$$

Podobnie punkt B leży dalej od prostej AE niż punkt D, więc

$$[EAB] > [DEA].$$

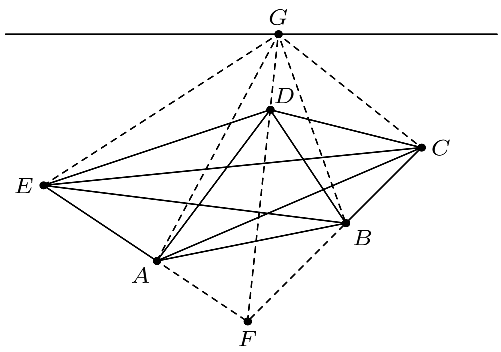
Stąd wynika, że żaden z trójkątów ABC i EAB nie jest trójkątem minimalnym w pięciokącie $ABCDE$. Pięciokąt $ABCDE$ ma zatem dwa trójkąty nieminimalne mające wspólny bok AB. Z zadania 30 wynika, że pięciokąt $ABCDE$ nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $\mathcal{K}$. To jednak przeczy założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

34. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $\mathcal{K}$. Udowodnij, że wówczas wszystkie wierzchołki pięciokąta leżą na bokach kwadratu.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że wierzchołek D pięciokąta $ABCDE$ leży wewnątrz kwadratu $KLMN$. Ponieważ

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC > 180^\circ,$$

więc proste AE i BC przecinają się w punkcie F leżącym po przeciwnej stronie prostej AB niż cały pięciokąt $ABCDE$. Niech teraz półprosta FD przecina brzeg kwadratu (na przykład bok MN) w punkcie G.



Ponieważ trójkąty ABC i EAB mają wspólny bok AB, więc co najmniej jeden z nich jest trójkątem minimalnym dla pięciokąta $ABCDE$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że

$$[EAB] \geq [ABC].$$

Teraz zauważamy, że:

$$[BCG] > [BCD] \geq [ABC],$$
$$[CGE] > [CDE] \geq [ABC],$$
$$[GEA] > [DEA] \geq [ABC].$$

Stąd wynika, że

$$\delta(ABCGE) = [ABC] = \delta(ABCDE).$$

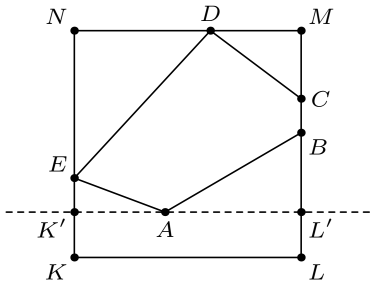
Jednakże pięciokąt $ABCGE$ ma co najwyżej dwa trójkąty minimalne: ABC i EAB. Zatem pięciokąt $ABCGE$ nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. Stąd też wynika, że pięciokąt $ABCDE$ nie jest pięciokątem maksymalnym, wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wszystkie wierzchołki pięciokąta leżą na brzegu kwadratu. To kończy rozwiązanie zadania.

35. Przypuśćmy, że pięciokąt wypukły $ABCDE$ znajduje się w dwóch równoległobokach $KLMN$ i $PQRS$. Załóżmy następnie, że $[KLMN] > [PQRS]$. Wówczas pięciokąt $ABCDE$ nie jest pięciokątem maksymalnym w równoległoboku $KLMN$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie tego zadania wynika natychmiast z zadania 17 oraz tego, że równoległobok $PQRS$ jest obrazem równoległoboku $KLMN$ przy pewnym przekształceniu afinicznym.

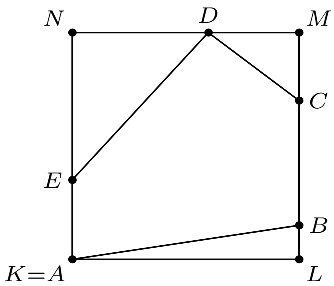
36. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. Wówczas na każdym boku tego kwadratu leży co najmniej jeden wierzchołek pięciokąta $ABCDE$. Ponadto, jeśli na przykład wierzchołek A pięciokąta jest jednocześnie wierzchołkiem K kwadratu, to na boku KL kwadratu leży jeszcze jeden wierzchołek pięciokąta (podobnie na boku KN kwadratu leży jeszcze jeden wierzchołek pięciokąta).

Rozwiązanie. Przypuśćmy na przykład, że na boku KL kwadratu nie leży ani jeden wierzchołek pięciokąta. Niech A będzie wierzchołkiem pięciokąta leżącym najbliżej prostej KL. Poprowadźmy przez punkt A prostą równoległą do boku KL, przecinającą boki KN i LM odpowiednio w punktach K' i L'.



Wówczas pięciokąt $ABCDE$ jest zawarty w prostokącie $K'L'MN$, którego pole jest mniejsze od pola kwadratu $KLMN$. Z zadania 35 wynika, że pięciokąt $ABCDE$ nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$, co jest sprzeczne z założeniem. Otrzymana sprzeczność dowodzi, iż rzeczywiście na każdym boku kwadratu leży co najmniej jeden wierzchołek pięciokąta $ABCDE$.

Przypuśćmy teraz, że wierzchołek A pięciokąta jest jednocześnie wierzchołkiem K kwadratu $KLMN$. Załóżmy, że na boku KL kwadratu nie leży żaden inny wierzchołek pięciokąta. Niech zatem wierzchołek B leży na boku LM.



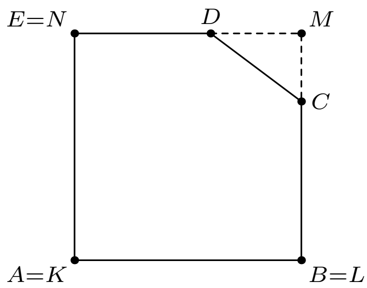
Wówczas, niezależnie od tego, gdzie leży wierzchołek E (na powyższym rysunku wierzchołek E leży na boku KN), mamy nierówność

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC \leq \measuredangle NAB + \measuredangle ABM = 180^\circ.$$

To jednak jest sprzeczne z nierównością uzyskaną w zadaniu 33 i z założeniem, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. Ta sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

37. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$ o boku równym 1. Udowodnij, że co najwyżej jeden wierzchołek pięciokąta może być jednocześnie wierzchołkiem kwadratu.

Rozwiązanie. Oczywiście wszystkie cztery wierzchołki kwadratu nie mogą być wierzchołkami pięciokąta wypukłego zawartego w tym kwadracie. Przypuśćmy teraz, że wierzchołki A, B i E pięciokąta wypukłego są jednocześnie wierzchołkami kwadratu $KLMN$. Niech $A = K$, $B = L$ oraz $E = N$. Wówczas wierzchołki C i D muszą leżeć odpowiednio na bokach LM i MN kwadratu:

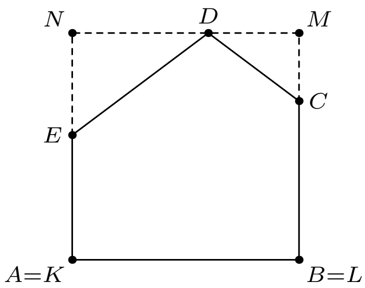


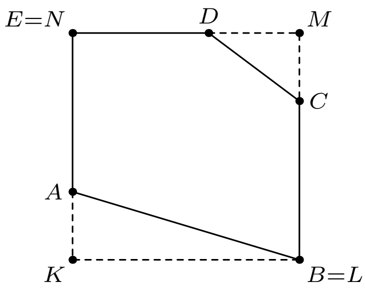
Wówczas jednak

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC = 180^\circ,$$

co jest sprzeczne z zadaniem 33.

Przypuśćmy wreszcie, że dokładnie dwa wierzchołki kwadratu są wierzchołkami danego pięciokąta $ABCDE$. Możliwe są dwa położenia tych wierzchołków (wierzchołkami pięciokąta są sąsiednie wierzchołki kwadratu lub końce przekątnej kwadratu):





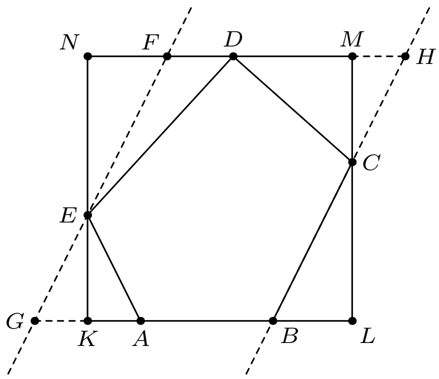
W obu położeniach mamy tę samą sprzeczność z zadaniem 33:

$$\measuredangle EAB + \measuredangle ABC = 180^\circ.$$

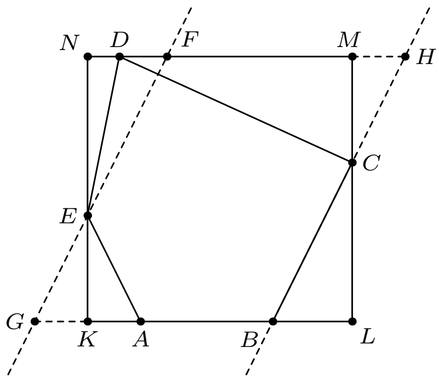
Ta sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

38. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$ o boku równym 1. Przypuśćmy następnie, że na boku KL kwadratu znajdują się dwa wierzchołki A i B pięciokąta oraz na pozostałych bokach kwadratu znajdują się pozostałe wierzchołki pięciokąta: na boku LM znajduje się wierzchołek C, na boku MN wierzchołek D oraz na boku KN znajduje się wierzchołek E. Udowodnij, że jeśli wierzchołek B pięciokąta nie jest wierzchołkiem kwadratu, to $KE \geq LC$. Podobnie, jeśli wierzchołek A nie jest jednocześnie wierzchołkiem kwadratu, to $KE \leq LC$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że $KE < LC$. Przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do prostej BC. Niech ta prosta równoległa przecina proste MN i KL odpowiednio w punktach F i G. Niech wreszcie prosta BC przecina prostą MN w punkcie H.



Zauważmy najpierw, że wierzchołek D pięciokąta leży wewnątrz odcinka FM. Przypuśćmy bowiem, że wierzchołek D leży wewnątrz odcinka NF (tak jak to jest pokazane na poniższym rysunku) lub pokrywa się z punktem F:



Wówczas mielibyśmy nierówność

$$\measuredangle EDC + \measuredangle BCD \geq 180^\circ,$$

sprzeczną z zadaniem 33 i z założeniem, że pięciokąt $ABCDE$ jest maksymalny w kwadracie $KLMN$.

Zatem rzeczywiście wierzchołek D leży wewnątrz odcinka FM. Wtedy cały pięciokąt $ABCDE$ znajduje się w równoległoboku $GBHF$. Zauważmy teraz, że trójkąty GKE i BLC są podobne. Zatem

$$\frac{GK}{BL} = \frac{KE}{LC} < 1.$$

Stąd wynika, że $GK < BL$, czyli $GB < KL$. Zatem

$$[GBHF] < [KLMN].$$

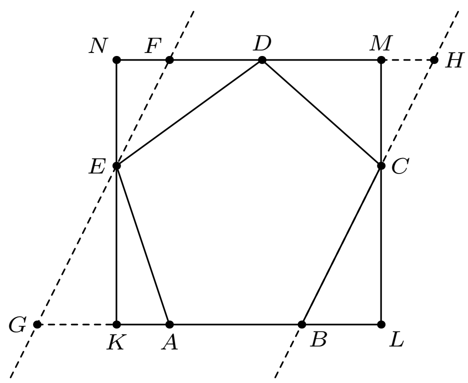
Z zadania 35 wynika, że pięciokąt $ABCDE$ nie jest maksymalny w kwadracie $KLMN$, co jest sprzeczne z założeniem. Dowód w przypadku, gdy $KE > LC$ jest analogiczny. To kończy rozwiązanie zadania.

39. Udowodnij, że w kwadracie $KLMN$ o boku równym 1 istnieje pięciokąt maksymalny, którego jeden wierzchołek jest także wierzchołkiem kwadratu.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że w kwadracie $KLMN$ zawarty jest pięciokąt maksymalny $ABCDE$, którego żaden wierzchołek nie jest jednocześnie wierzchołkiem kwadratu. Z zadań 34 i 36 wynika, że wszystkie wierzchołki pięciokąta leżą na brzegu kwadratu oraz na każdym boku kwadratu leży co najmniej jeden wierzchołek pięciokąta. Zatem na jednym boku kwadratu leżą dwa wierzchołki pięciokąta, a na każdym z trzech pozostałych boków kwadratu leży dokładnie jeden wierzchołek pięciokąta. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że na boku KL leżą dwa wierzchołki A i B pięciokąta oraz wierzchołki C, D i E leżą odpowiednio na bokach LM, MN i NK.

Ponieważ wierzchołek B pięciokąta nie jest jednocześnie wierzchołkiem kwadratu, więc z zadania 38 wynika, że $KE \leq LC$. Podobnie, wierzchołek A nie jest wierzchołkiem kwadratu, więc $KE \geq LC$. Zatem $KE = LC$.

Jeszcze raz przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do prostej BC, przecinającą proste MN i KL odpowiednio w punktach F i G. Niech znów prosta BC przecina prostą MN w punkcie H. Znów przypuśćmy, że wierzchołek D pięciokąta leży na odcinku FM (rozpatrzenie drugiego przypadku, gdy wierzchołek D leży wewnątrz odcinka NF, zostawię jako ćwiczenie):



Tym razem zauważamy, że trójkąty GKE i BLC są przystające. Zatem $GK = BL$, czyli $GB = KL$. Stąd wynika, że

$$[GBHF] = [KLMN].$$

Teraz korzystamy z zadania 19:

$$H_5(KLMN) = \frac{1}{[KLMN]} \cdot \delta(ABCDE) = \frac{1}{[GBHF]} \cdot \delta(ABCDE) \leq \\ \leq H_5(GBHF) = H_5(KLMN).$$

Zatem

$$H_5(GBHF) = \frac{1}{[GBHF]} \cdot \delta(ABCDE),$$

czyli pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w równoległoboku $GBHF$. Wiemy, że istnieje przekształcenie afiniczne przeprowadzające równoległobok $GBHF$

na kwadrat $KLMN$. Obrazem pięciokąta $ABCDE$ w tym przekształceniu będzie pięciokąt $A'B'C'D'E'$ maksymalny w kwadracie $KLMN$. Zauważmy przy tym, że $B' = L$, a więc jeden wierzchołek pięciokąta $A'B'C'D'E'$ jest wierzchołkiem kwadratu $KLMN$. Wykazaliśmy zatem, że w kwadracie $KLMN$ istnieje pięciokąt maksymalny, którego jednym wierzchołkiem jest wierzchołek kwadratu. To kończy dowód.

Podsumujmy teraz wszystko, co mamy udowodnić i czego dowiedliśmy. Naszym celem jest udowodnienie, że jeśli pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$ o boku długości 1, to

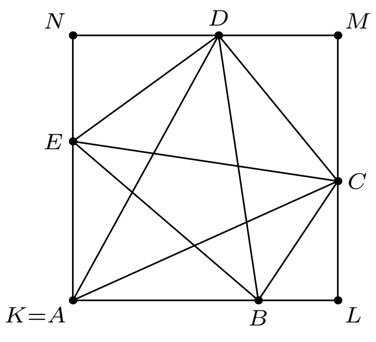
$$\delta(ABCDE) \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Z poprzednich zadań wynika, że możemy przyjąć, iż dokłkadnie jeden wierzchołek pięciokąta $ABCDE$ jest także wierzchołkiem kwadratu. Ponadto wiemy, że pięciokąt $ABCDE$ ma co najmniej trzy trójkąty minimalne. Wreszcie wiemy, że jeśli ten pięciokąt ma dokładnie trzy trójkąty minimalne, to oba trójkąty nieminimalne mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek.

40. Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$ o boku równym 1. Przypuśćmy także, że wierzchołek A pięciokąta jest jednocześnie wierzchołkiem K kwadratu. Następnie niech wierzchołki B, C, D i E pięciokąta leżą odpowiednio wewnątrz boków KL, LM, MN i NA kwadratu. Udowodnij, że pięciokąt $ABCDE$ ma co najmniej cztery trójkąty minimalne. Udowodnij ponadto, że jedynym trójkątem nieminimalnym tego pięciokąta może być trójkąt EKB.

Rozwiązanie. Ponieważ wierzchołki B i E pięciokąta leżą wewnątrz boków KL i KN kwadratu, więc z zadania 38 wynika, że

$$KE \geq LC \quad \text{oraz} \quad KB \geq ND.$$



Przypuśćmy, że pięciokąt $ABCDE$ ma dokładnie trzy trójkąty minimalne. Wiemy, że wtedy oba trójkąty nieminimalne mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek. Mamy teraz pięć przypadków.

Przypadek 1. Jedynym wspólnym wierzchołkiem trójkątów nieminimalnych jest wierzchołek A. Wówczas mamy następujące nierówności:

$$[ABC], [DEA] > [BCD] = [CDE] = [EAB].$$

Ponieważ jednak $AE = KE \geq LC$, więc $[EAB] \geq [ABC]$. Ten przypadek jest zatem niemożliwy.

Przypadek 2. Jedynym wspólnym wierzchołkiem trójkątów nieminimalnych jest wierzchołek C. Wówczas mamy następujące nierówności:

$$[ABC], [CDE] > [BCD] = [DEA] = [EAB].$$

Ponieważ jednak $AE = KE \geq LC$, więc $[EAB] \geq [ABC]$. Ten przypadek też jest niemożliwy.

Przypadek 3. Jedynym wspólnym wierzchołkiem trójkątów nieminimalnych jest wierzchołek D. Wówczas mamy następujące nierówności:

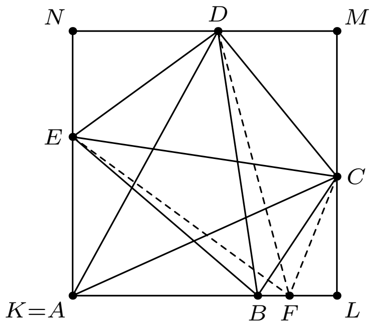
$$[BCD], [DEA] > [ABC] = [CDE] = [EAB].$$

Ponieważ jednak $AB = KB \geq ND$, więc $[EAB] \geq [DEA]$. Ten przypadek znów jest niemożliwy.

Przypadek 4. Jedynym wspólnym wierzchołkiem trójkątów nieminimalnych jest wierzchołek B. Wówczas mamy następujące nierówności:

$$[BCD], [EAB] > [CDE] = [DEA] = [ABC].$$

Przesuńmy wierzchołek B wzdłuż prostej KL w kierunku wierzchołka L. Niech F będzie tym nowym położeniem wierzchołka B:



Wówczas

$$[EAF] > [EAB] \quad \text{oraz} \quad [AFC] > [ABC] = [CDE].$$

Ponieważ $[ACD] > [BCD]$, więc punkt A leży dalej od prostej CD niż punkt B. Stąd wynika, że jeśli punkt F leży wewnątrz odcinka BL, to $[FCD] < [BCD]$. Jeśli jednak punkt F leży dostatecznie blisko punktu B, to nadal będziemy mieli nierówność

$$[FCD] > [CDE].$$

Podsumujmy. Mamy następujące nierówności:

$$[FCD], [EAF], [AFC] > [CDE] = [DEA].$$

Stąd wynika, że pięciokąt $AFCDE$ ma tylko dwa trójkąty minimalne. Zatem pięciokąt $AFCDE$ nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. Ponieważ

$$\delta(ABCDE) = [CDE] = [DEA] = \delta(AFCDE),$$

więc pięciokąt $ABCDE$ także nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. To jednak jest sprzeczne z założeniem. Ten przypadek jest więc także niemożliwy.

Przypadek 5. Jedynym wspólnym wierzchołkiem trójkątów nieminimalnych jest wierzchołek E. Ten przypadek rozpatrujemy podobnie do poprzedniego.

Wszystkie powyższe przypadki doprowadziły do sprzeczności. Zatem założenie, że pięciokąt $ABCDE$ ma dokładnie trzy trójkąty minimalne, okazało się nieprawdziwe. Pięciokąt $ABCDE$ ma więc co najmniej cztery trójkąty minimalne. Ponieważ

$$AE = KE \geq LC \quad \text{oraz} \quad AB = KB \geq ND,$$

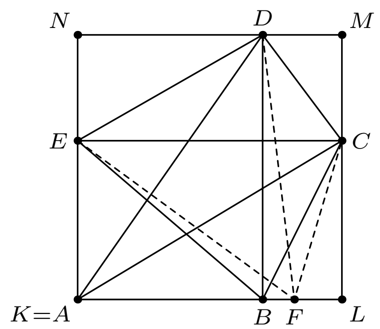
więc

$$[ABE] \geq [ABC] \quad \text{oraz} \quad [ABE] \geq [DEA].$$

Stąd wynika, że żaden z trójkątów ABC i DEA nie może być jedynym trójkątem nieminimalnym. Przypuśćmy teraz, że trójkąt BCD jest tym jedynym trójkątem nieminimalnym. Wówczas mamy nierówności

$$[BCD] > [ABC] = [CDE] = [DEA] = [EAB].$$

Z równości $[ABC] = [EAB]$ wynika, że $EC \parallel AB$. Podobnie wykazujemy, że $BD \parallel AE$. Teraz przesuńmy wierzchołek B nieco w kierunku wierzchołka L. Niech punkt F będzie tym nowym położeniem punktu B.



Wówczas oczywiście

$$[EAF] > [EAB] = [CDE] = [DEA] \quad \text{oraz} \quad [AFC] > [ABC] = [CDE] = [DEA].$$

Wreszcie mamy nierówność $BCD] > [CDE]$. Jeśli punkt F będzie wystarczająco blisko punktu B, to pole trójkąta FCD będzie się różniło niewiele od pola trójkąta BCD, więc będziemy mieli nierówność

$$[FCD] > [CDE] = [DEA].$$

Pięciokąt wypukły $AFCDE$ ma zatem co najwyżej dwa trójkąty minimalne, a więc nie jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$. Ponieważ oczywiście

$$\delta(ABCDE) = [CDE] = [DEA] = \delta(AFCDE),$$

więc pięciokąt $AVCDE$ także nie jest pięciokątem maksymalnym. To jednak przeczy założeniu. Zatem trójkąt BCD także nie może być jedynym trójkątem nieminimalnym.

W podobny sposób (przesuwając ewentualnie punkt E w kierunku wierzchołka N) możemy wykazać, że trójkąt DEA nie może być jedynym trójkątem nieminimalnym w pięciokącie $ABCDE$. Pozostaje więc ostatnia możliwość, że trójkąt EAB (czyli EKB) może być jedynym trójkątem nieminimalnym pięciokąta $ABCDE$. To kończy rozwiązanie zadania.

Jesteśmy prawie u celu. Wiemy, że pięciokąta maksymalnego w kwadracie o boku równym 1 możemy szukać wśród pięciokątów mających z kwadratem jeden wspólny wierzchołek i mających co najmniej cztery trójkąty minimalne. Wiemy też, które trójkąty muszą być minimalne. Teraz kwadrat jednostkowy z takim pięciokątem maksymalnym umieścimy w układzie współrzędnych i obliczymy, jakie największe pole mogą mieć trójkąty minimalne tego pięciokąta.

41. Przypuśćmy, że pięciokąt $KBCDE$ jest pięciokątem maksymalnym w kwadracie $KLMN$ o boku równym 1. Umieśćmy kwadrat $KLMN$ w układzie współrzędnych w następujący sposób:

$$K = (0, 0), \quad L = (1, 0), \quad M = (1, 1) \quad \text{oraz} \quad N = (0, 1).$$

Niech następnie wierzchołki pięciokąta mają współrzędne:

$$B = (x, 0), \quad C = (1, c), \quad D = (d, 1) \quad \text{oraz} \quad E = (0, y).$$

Udowodnij, że wówczas

$$c = d \quad \text{oraz} \quad x = y = 1 - c^2.$$

Udowodnij następnie, że

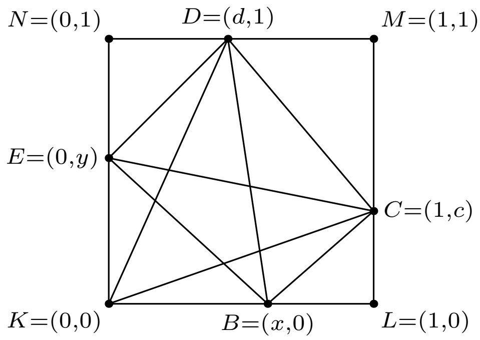
$$\delta(KBCDE) \le \frac{\sqrt{3}}{9},$$

skąd wynika, że

$$H_5(KLMN) \le \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Rozwiązanie. Z poprzedniego zadania wynika, że

$$[KBC] = [BCD] = [CDE] = [DEK].$$



Ponieważ $[KBC] = [BCD]$, więc proste BC i KD są równoległe. Stąd wynika, że trójkąty BLC i DNK są podobne. Mamy zatem proporcję

$$\frac{BL}{LC} = \frac{DN}{NK},$$

czyli

$$\frac{1-x}{c} = \frac{d}{1}.$$

Stąd wynika, że $x = 1 - cd$. Następnie z równości $[CDE] = [DEK]$ wynika, że proste DE i CK są równoległe. Zatem trójkąty DNE i KLC są podobne, skąd wynika, że

$$\frac{DN}{NE} = \frac{KL}{LC},$$

czyli

$$\frac{d}{1-y} = \frac{1}{c}.$$

Zatem $y = 1 - cd = x$. Wreszcie z równości $[BCD] = [CDE]$ wynika, że proste CD i BE są równoległe. Zatem trójkąty CMD i EKB są podobne. Stąd dostajemy równość

$$\frac{CM}{MD} = \frac{EK}{KB},$$

czyli

$$\frac{1-c}{1-d} = \frac{y}{x} = 1.$$

Zatem $c = d$ oraz $x = y = 1 - c^2$. Teraz

$$[KBC] = \frac{1}{2} \cdot x \cdot c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (1 - c^2).$$

Wykażemy teraz, że dla dowolnej liczby c takiej, że $0 < c < 1$ ma miejsce nierówność

$$c(1 - c^2) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Przyjmijmy

$$u = (1 + \sqrt{3}) \cdot c, \quad v = (2 + \sqrt{3}) \cdot (1 - c) \quad \text{oraz} \quad w = 1 + c.$$

Z nierówności między średnimi wynika teraz, że

$$uvw \le \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3,$$

czyli

$$(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \cdot c(1 - c^2) \le \frac{(c + c\sqrt{3} + 2 - 2c + \sqrt{3} - c\sqrt{3} + 1 + c)^3}{27}.$$

Przekształćmy tę nierówność w sposób równoważny:

$$(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{(3+\sqrt{3})^3}{27},$$
$$(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{\left(\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})\right)^3}{27},$$
$$(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{3\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})^3}{27},$$
$$(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})^2}{9},$$
$$(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{\sqrt{3}\cdot(1+2\sqrt{3}+3)}{9},$$
$$(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{\sqrt{3}\cdot(4+2\sqrt{3})}{9},$$
$$(2+\sqrt{3})\cdot c(1-c^2)\leq \frac{2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})}{9},$$
$$c(1-c^2)\leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

W ten sposób nierówność

$$c(1-c^2)\leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

została udowodniona. Stąd dostajemy nierówność

$$\delta(KBCDE)\leq [KBC]\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{9},$$

z której wynika, że

$$H_5(KLMN)\leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

To kończy dowód.

42. Udowodnij, że

$$H_5(\mathcal{K})=H_5(KLMN)=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Rozwiązanie. Z poprzedniego zadania wiemy, że

$$H_5(\mathcal{K})=H_5(KLMN)\leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Z zadania 26 wiemy, że

$$H_5(\mathcal{K})\geq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Stąd wynika, że

$$H_5(\mathcal{K}) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

To kończy dowód.

Można także udowodnić, że

$$H_5(\mathcal{T}) = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Znane są także liczby Heilbronna $H_6(\mathcal{K})$ oraz $H_7(\mathcal{K})$.

5. Bibliografia

Obliczenie liczby Heilbronna $H_4(\mathcal{T})$ w rozdziale 3 jest modyfikacją dowodu zamieszczonego w książce [S1]. Obliczenie liczby Heilbronna $H_5(\mathcal{K})$ w rozdziale 4 pochodzi z pracy [YZZ].

[B] Junior Balkan Mathematical Olympiads, Plus Publishing House, Bucharest 2003

[S1] A. Soifer, How Does One Cut a Triangle, second edition, Springer Dordrecht Heidelberg London New York 2009

[S2] A. Soifer, The Colorado Mathematical Olympiad and Further Explorations, Springer New York Dordrecht Heidelberg 2011

[YZZ] Yang Lu, Zhang Jingzhong, Zeng Zhenbing, Heilbronn problem for five points, Preprint, International Centre for Theoretical Physics, 1991, IC/91/252