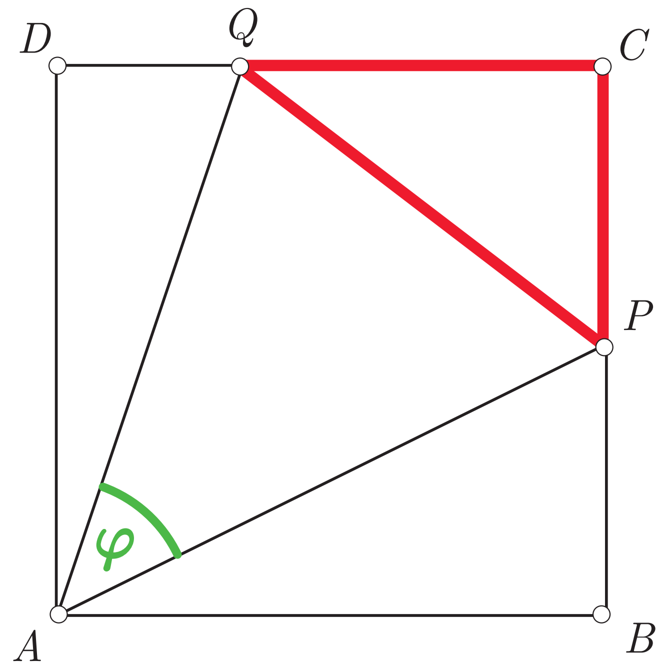
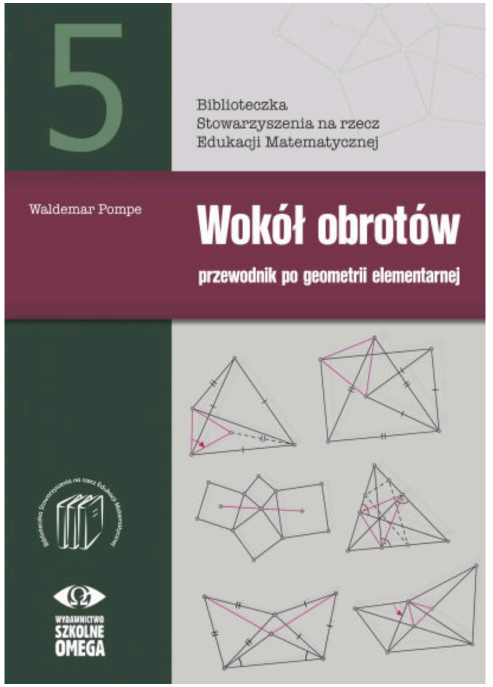
Od jednego zadania

Sielpia, 22.10.2017 r. — Tomasz Szymczyk, V LO w Bielsku-Białej

Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$. Wykazać, że jeśli obwód trójkąta PCQ jest równy połowie obwodu kwadratu $ABCD$, to $\sphericalangle PAQ = 45°$.



[W. Pompe, *Wokół obrotów* — wydanie drugie, SEM-5, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2016, Przykład 1.7, s. 8]

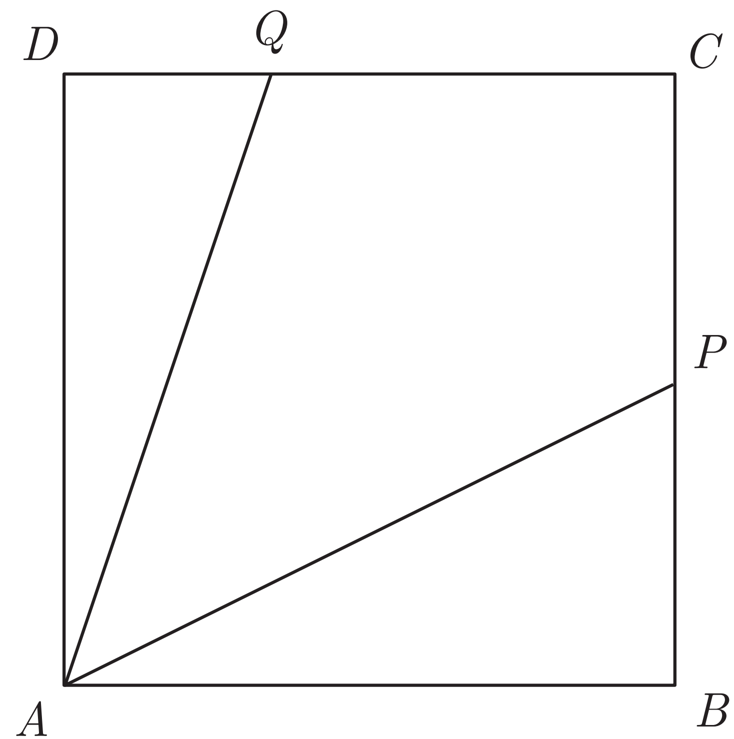


[W. Pompe, *Wokół obrotów* — wydanie drugie, SEM-5, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2016, Przykład 1.7, s. 8]

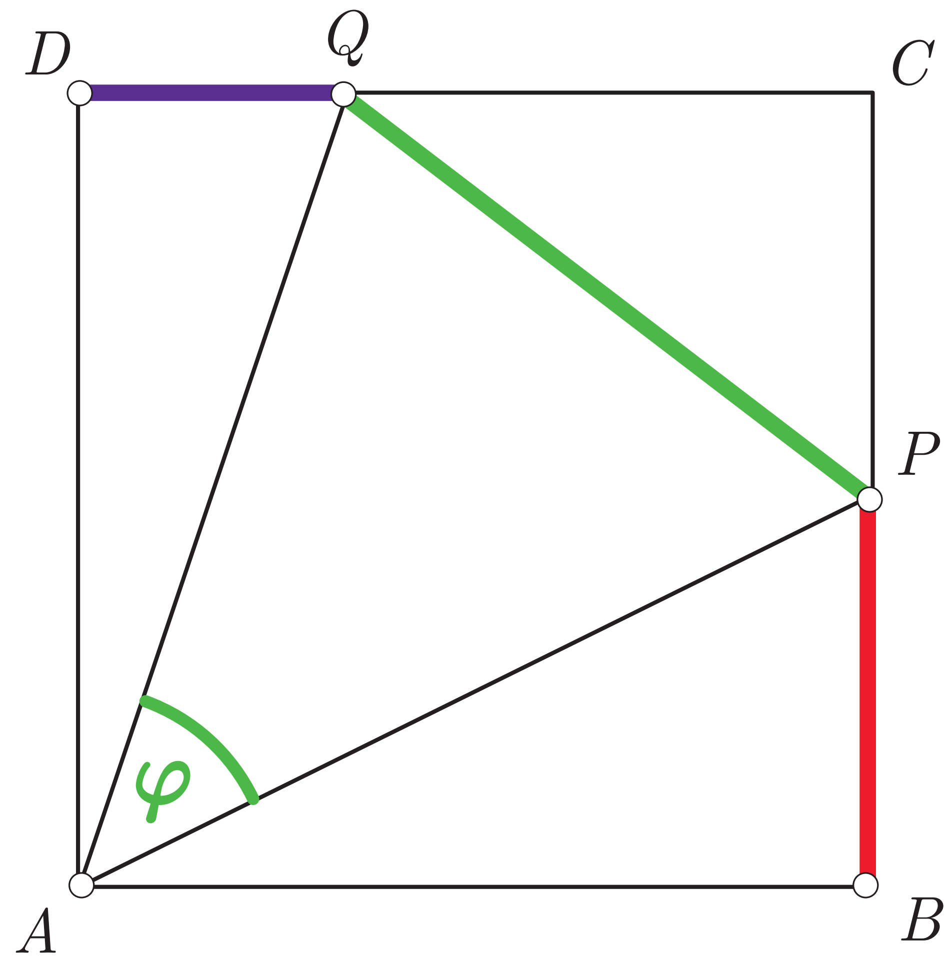
Zadanie 1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $BP + DQ = PQ$. Dowieść, że

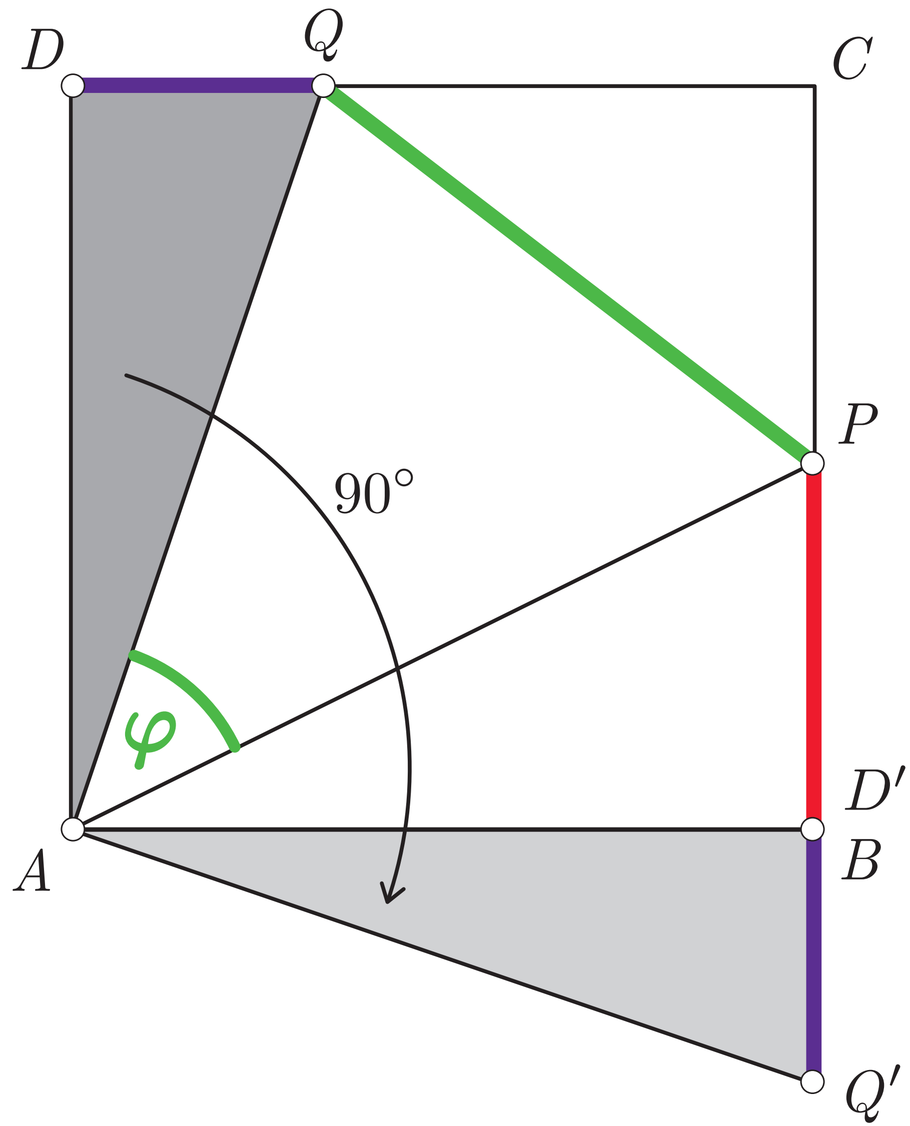
$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ.$$

$$BP + DQ = PQ$$



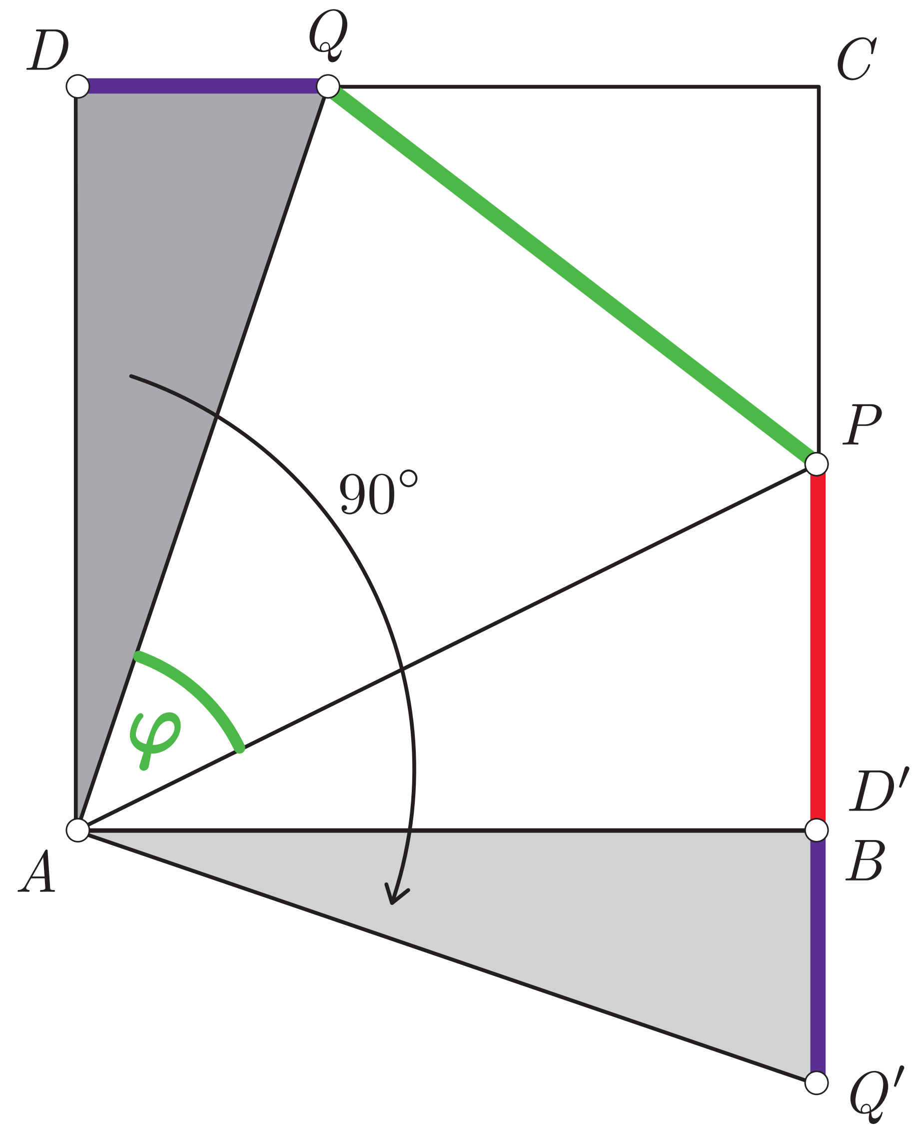
$$BP + DQ = PQ$$





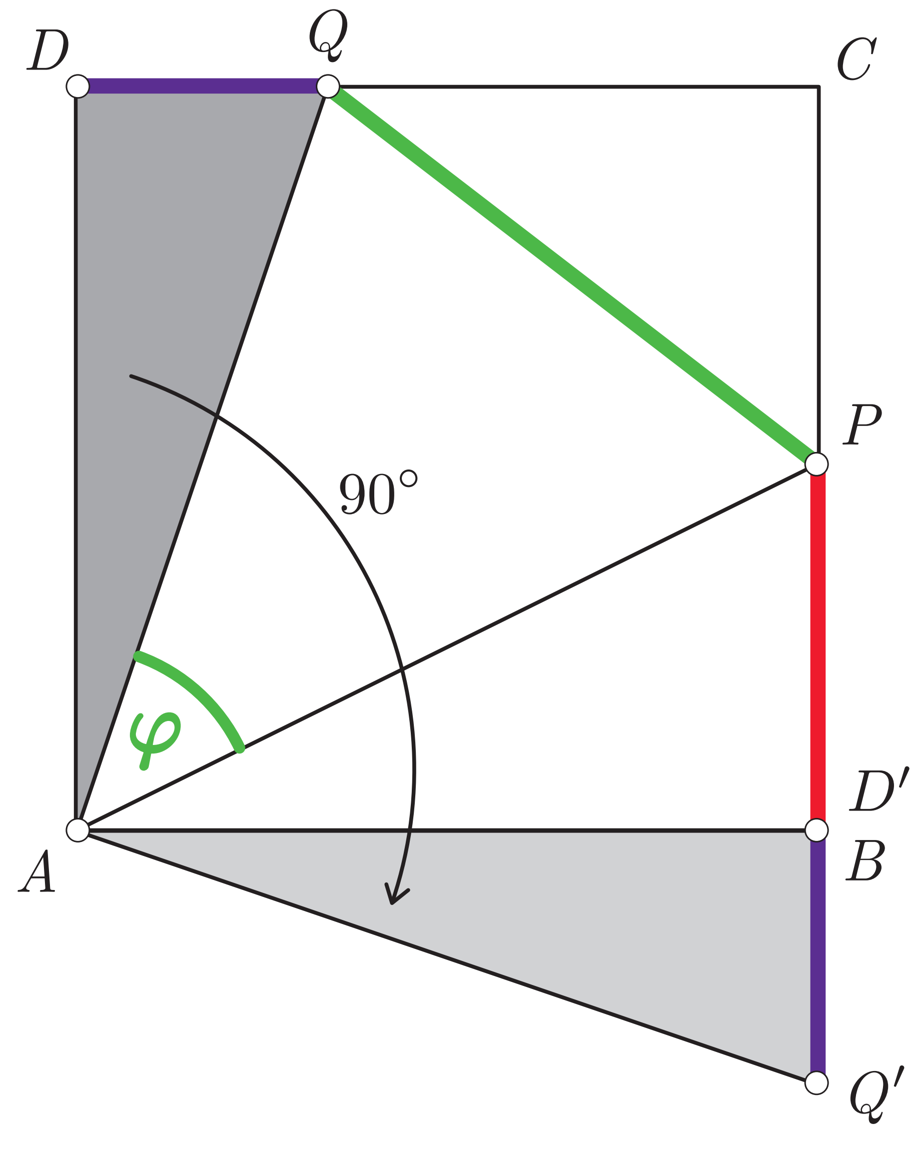
D
Q
C
P
90°
φ
D′
A
B
Q′

$$BP + DQ = PQ$$



$$BP + DQ = PQ$$

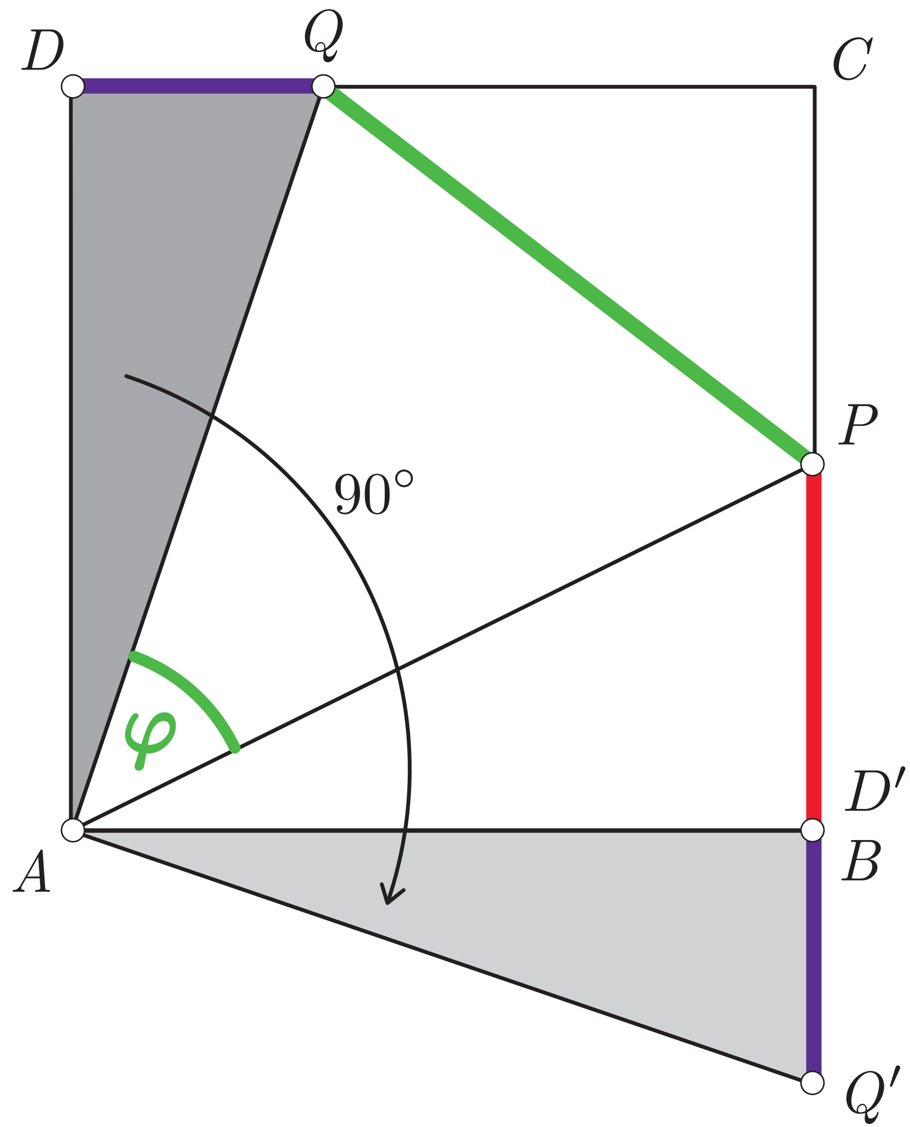
$$BP + D'Q' = PQ$$



$$BP + DQ = PQ$$

$$BP + D'Q' = PQ$$

$$BP + BQ' = PQ$$

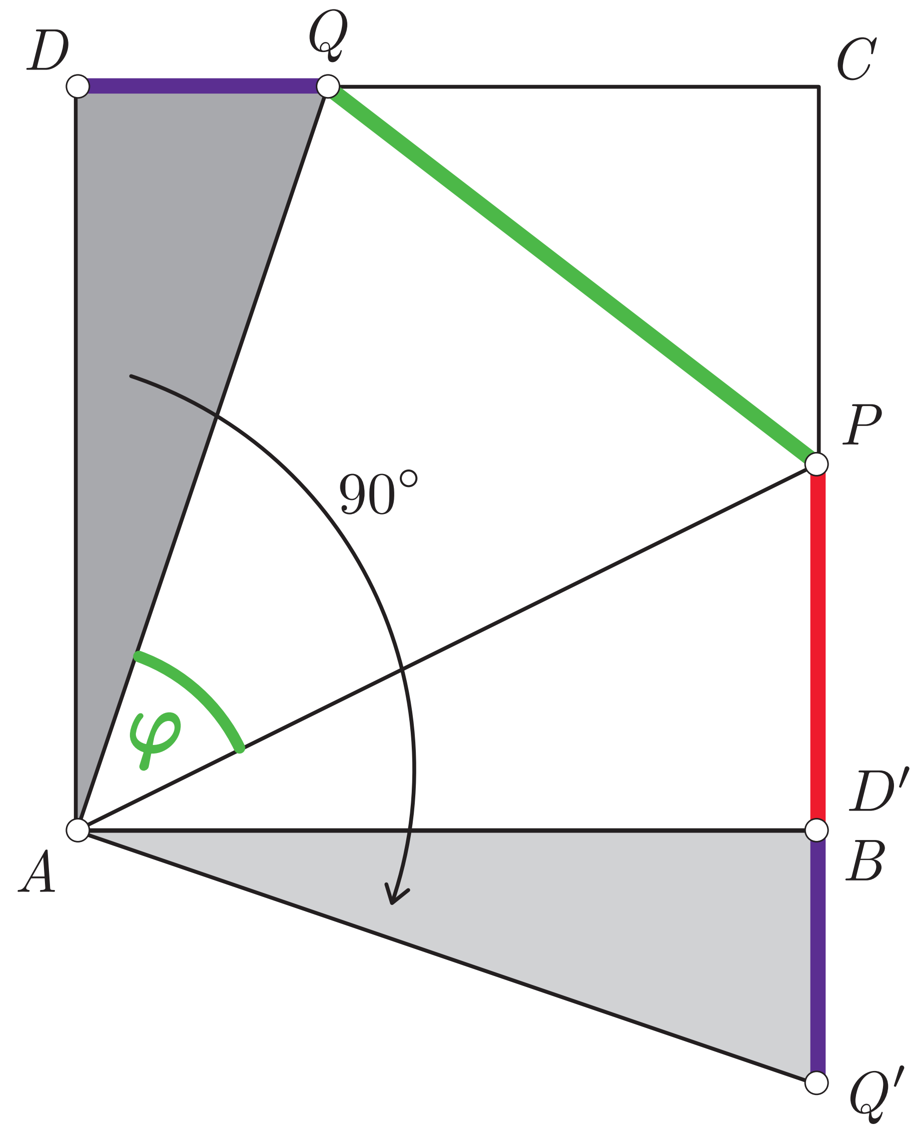


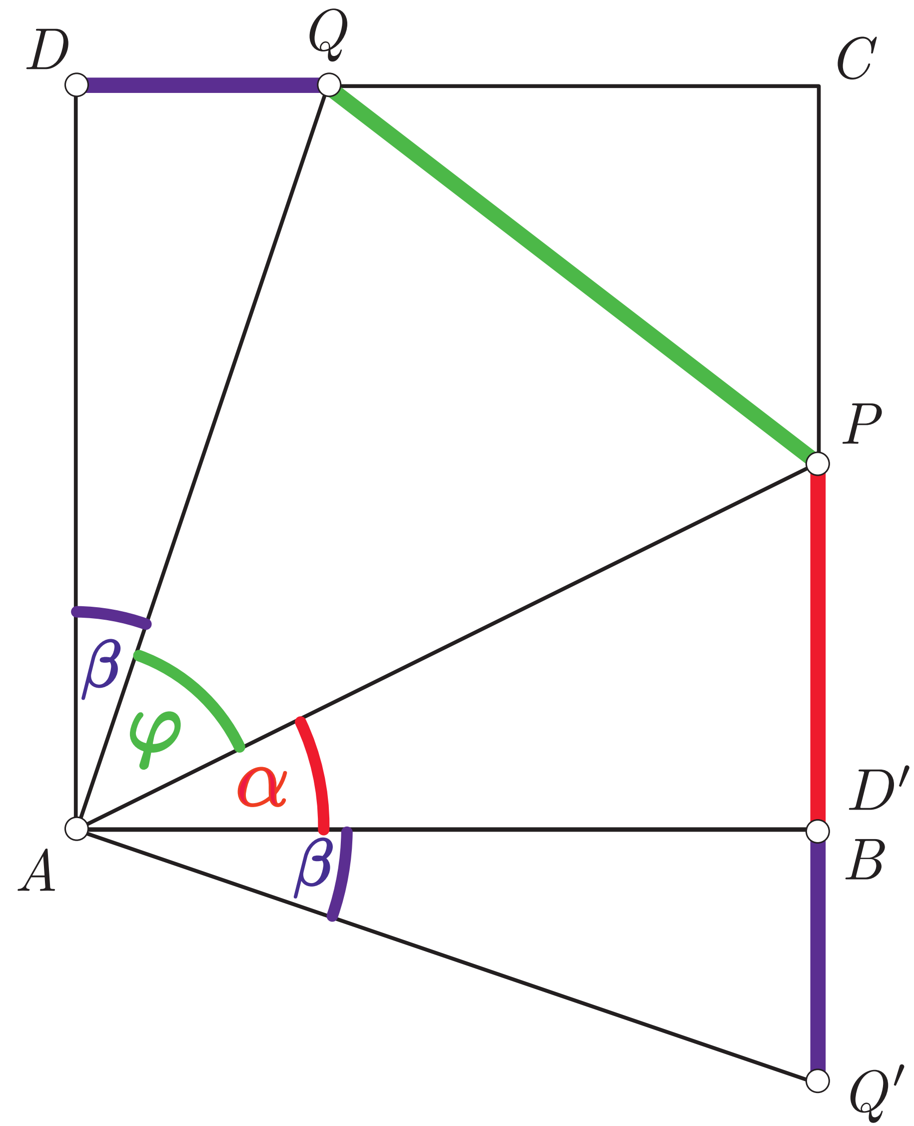
$$BP + DQ = PQ$$

$$BP + D'Q' = PQ$$

$$BP + BQ' = PQ$$

$$PQ' = PQ$$



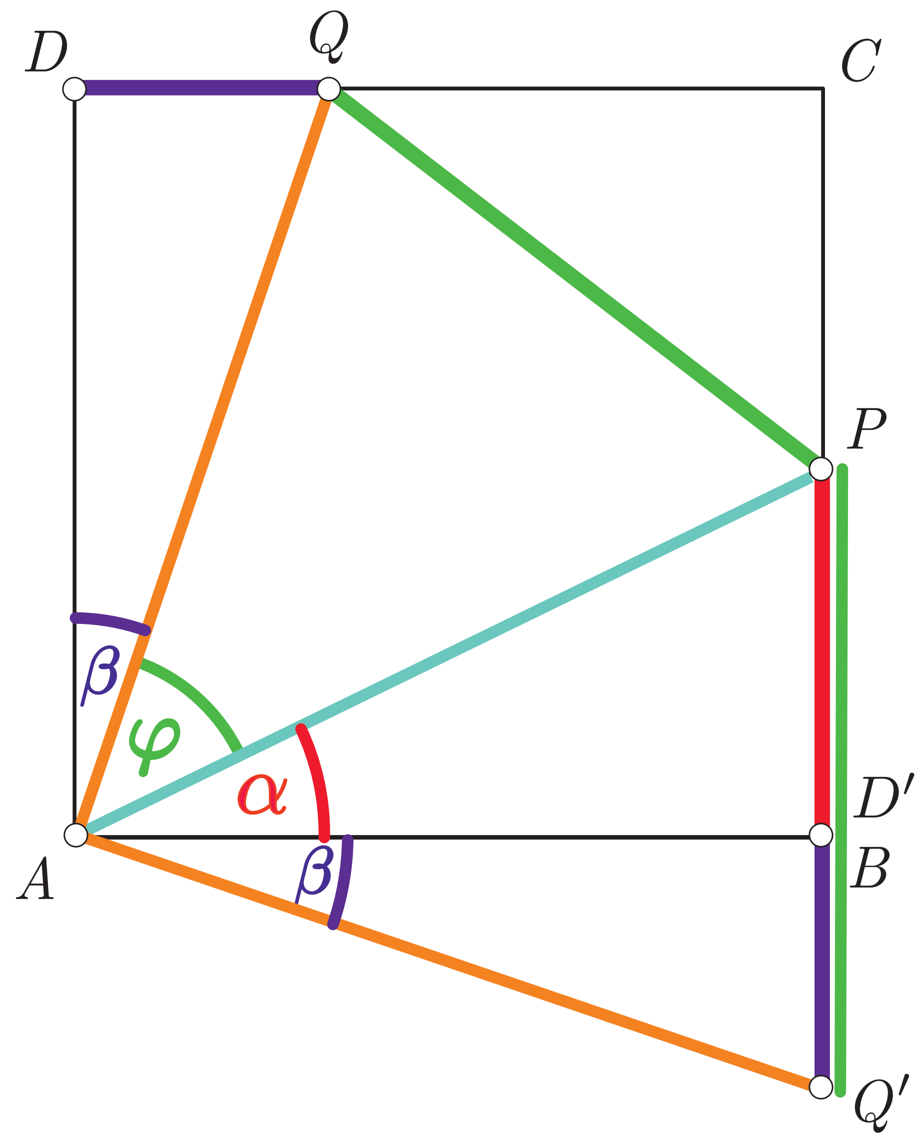

D
Q
C
P
β
φ
α
D′
A
β
B
Q′

$PQ' = PQ$

$AQ' = AQ$

AP — wspólny

dla trójkątów APQ' i APQ



$PQ' = PQ$

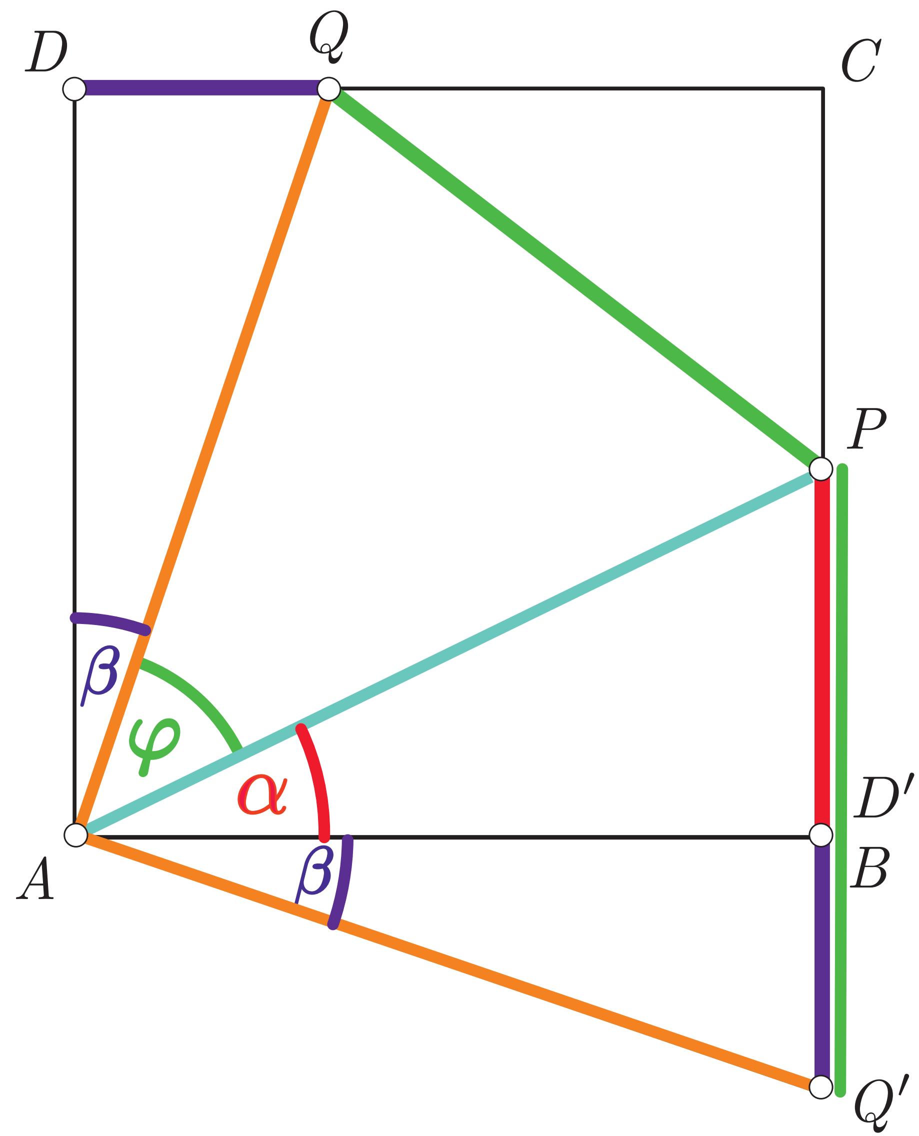
$AQ' = AQ$

AP — wspólny

dla trójkątów APQ' i APQ

$$\Downarrow$$

$$\Delta APQ' \equiv \Delta APQ$$



$PQ' = PQ$

$AQ' = AQ$

AP — wspólny

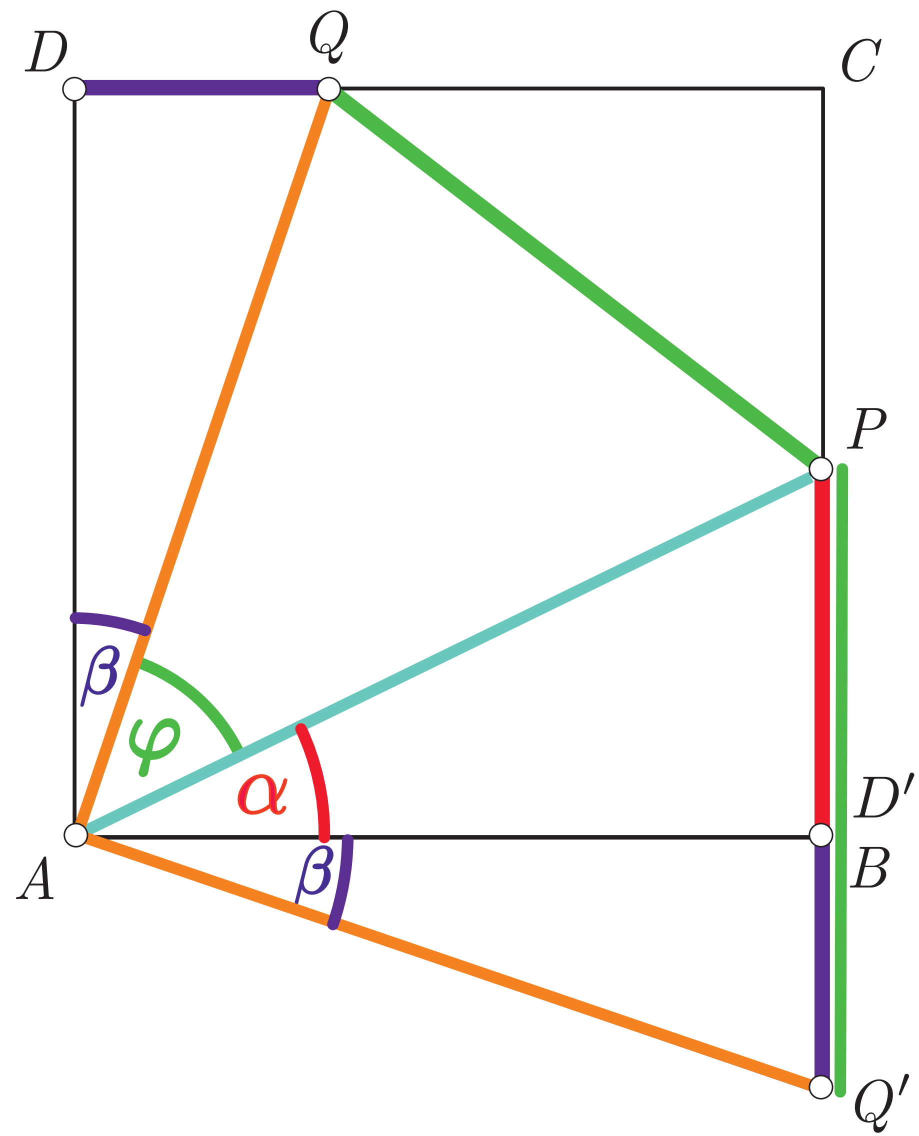
dla trójkątów APQ' i APQ

$$\Downarrow$$

$$\Delta APQ' \equiv \Delta APQ$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha + \beta = \varphi$$



$PQ' = PQ$

$AQ' = AQ$

AP — wspólny

dla trójkątów APQ' i APQ

$$\Downarrow$$

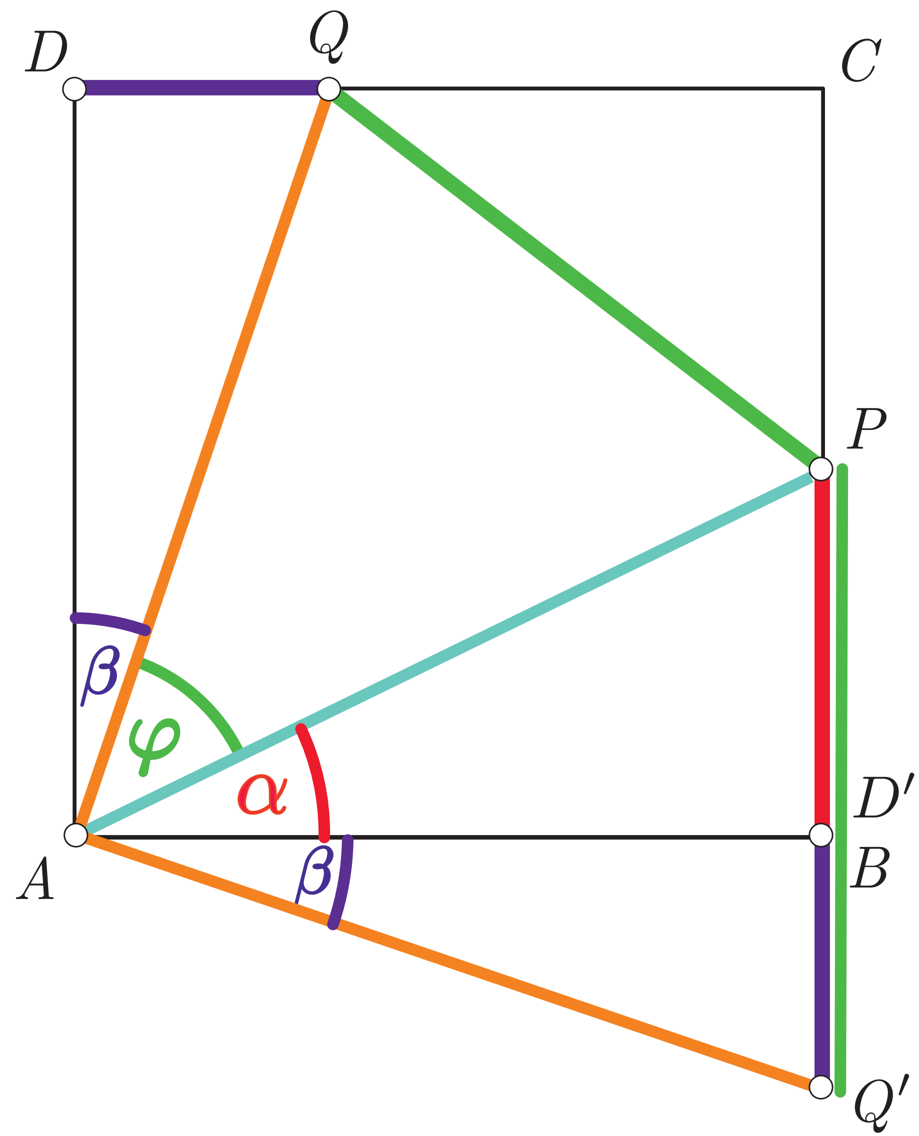
$$\Delta APQ' \equiv \Delta APQ$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha + \beta = \varphi$$

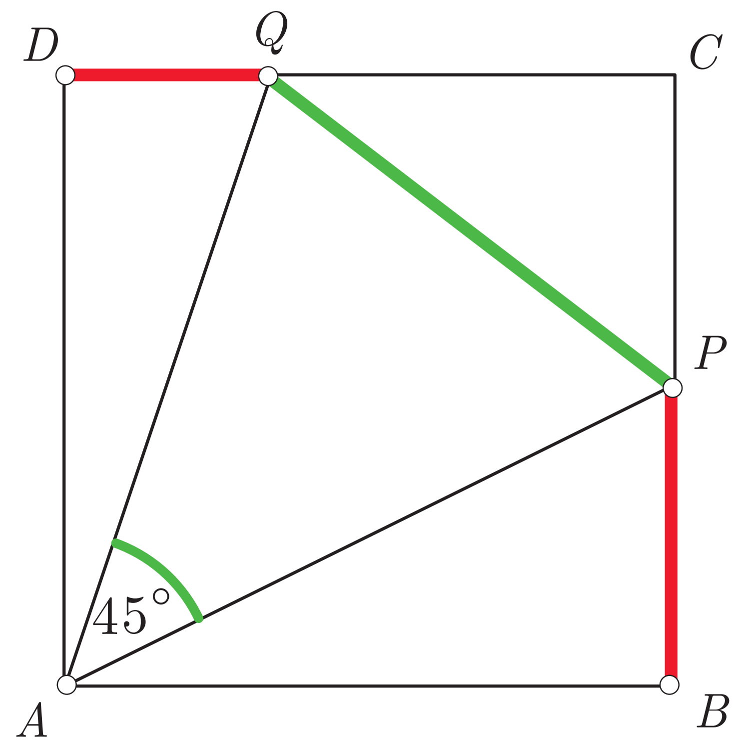
$$\Downarrow$$

$$\varphi = 45^\circ$$



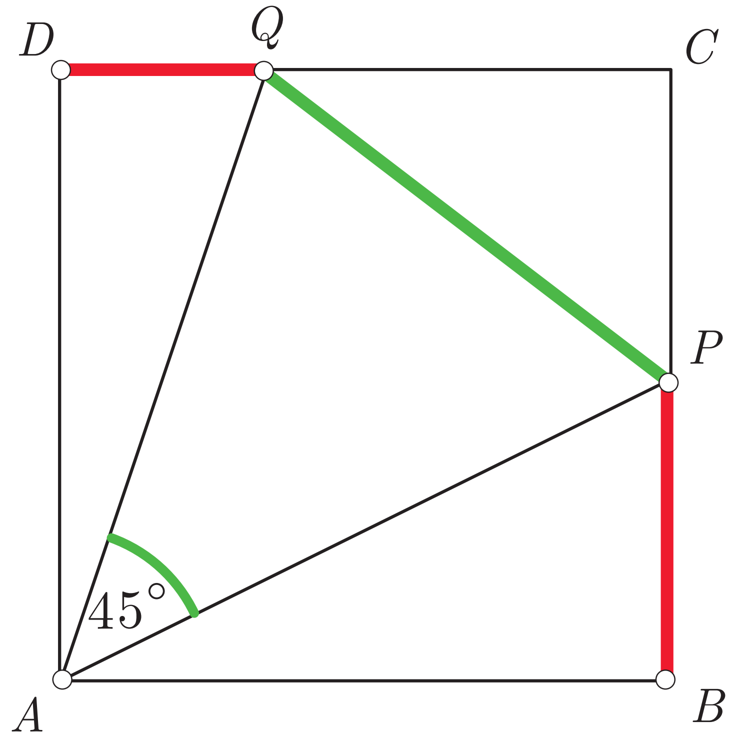
Zadanie 2. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$. Dowieść, że

$$BP + DQ = PQ$$



Zadanie 2. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$. Dowieść, że

$$BP + DQ = PQ$$



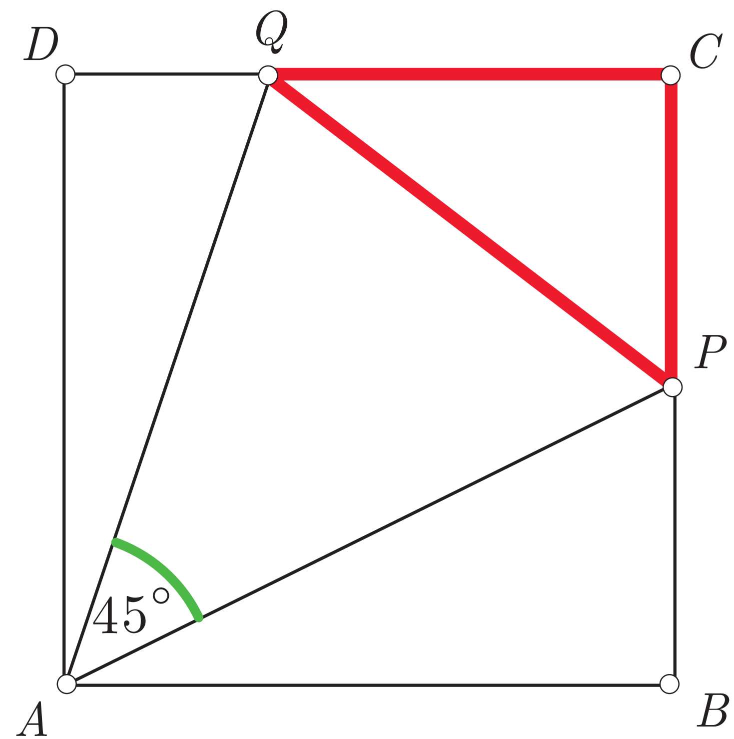
Zatem

$$BP + DQ = PQ \iff \sphericalangle PAQ = 45^\circ$$

Zadanie 3. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym

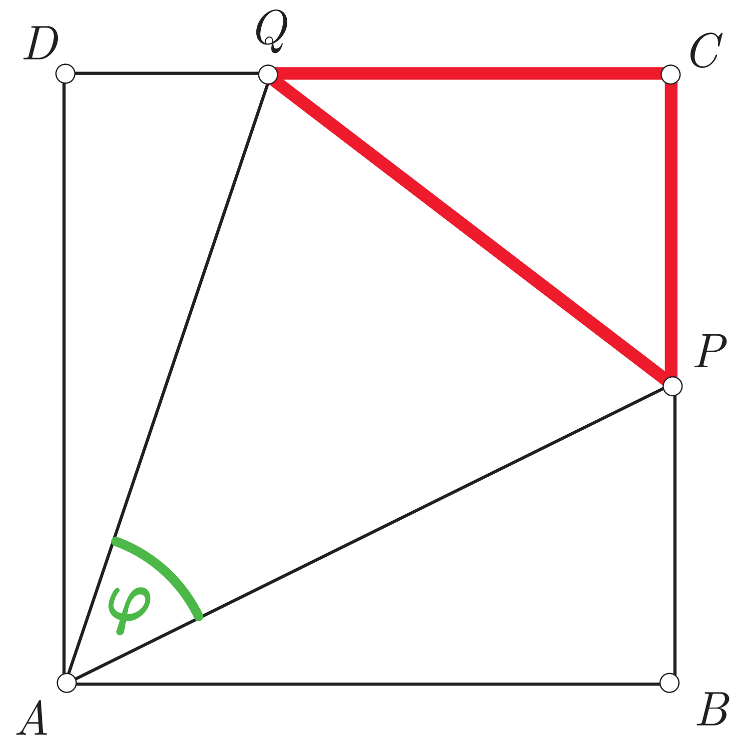
$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ.$$

Wykazać, że obwód trójkąta PCQ jest równy połowie obwodu kwadratu $ABCD$.



Zadanie 4. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym obwód trójkąta PCQ jest równy połowie obwodu kwadratu $ABCD$. Wykazać, że

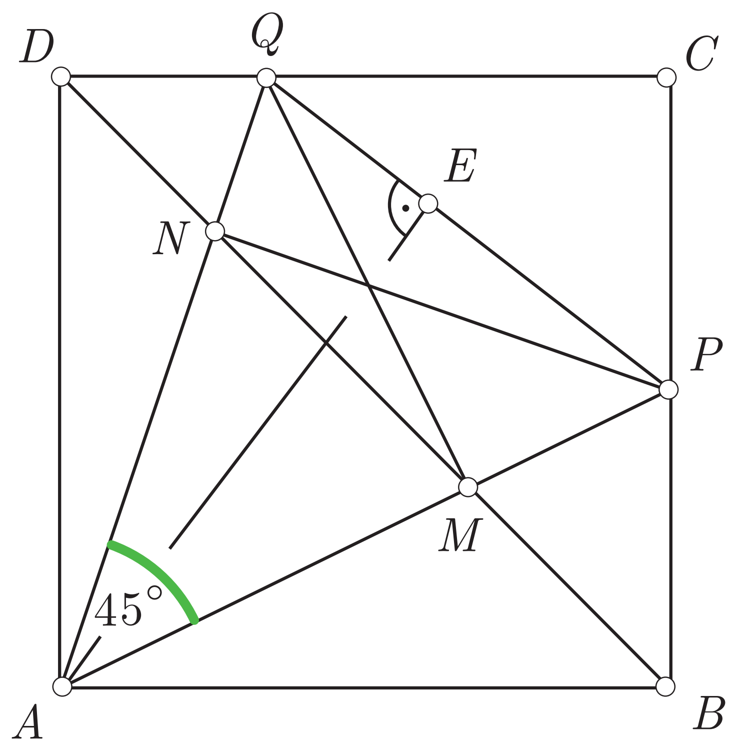
$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ.$$

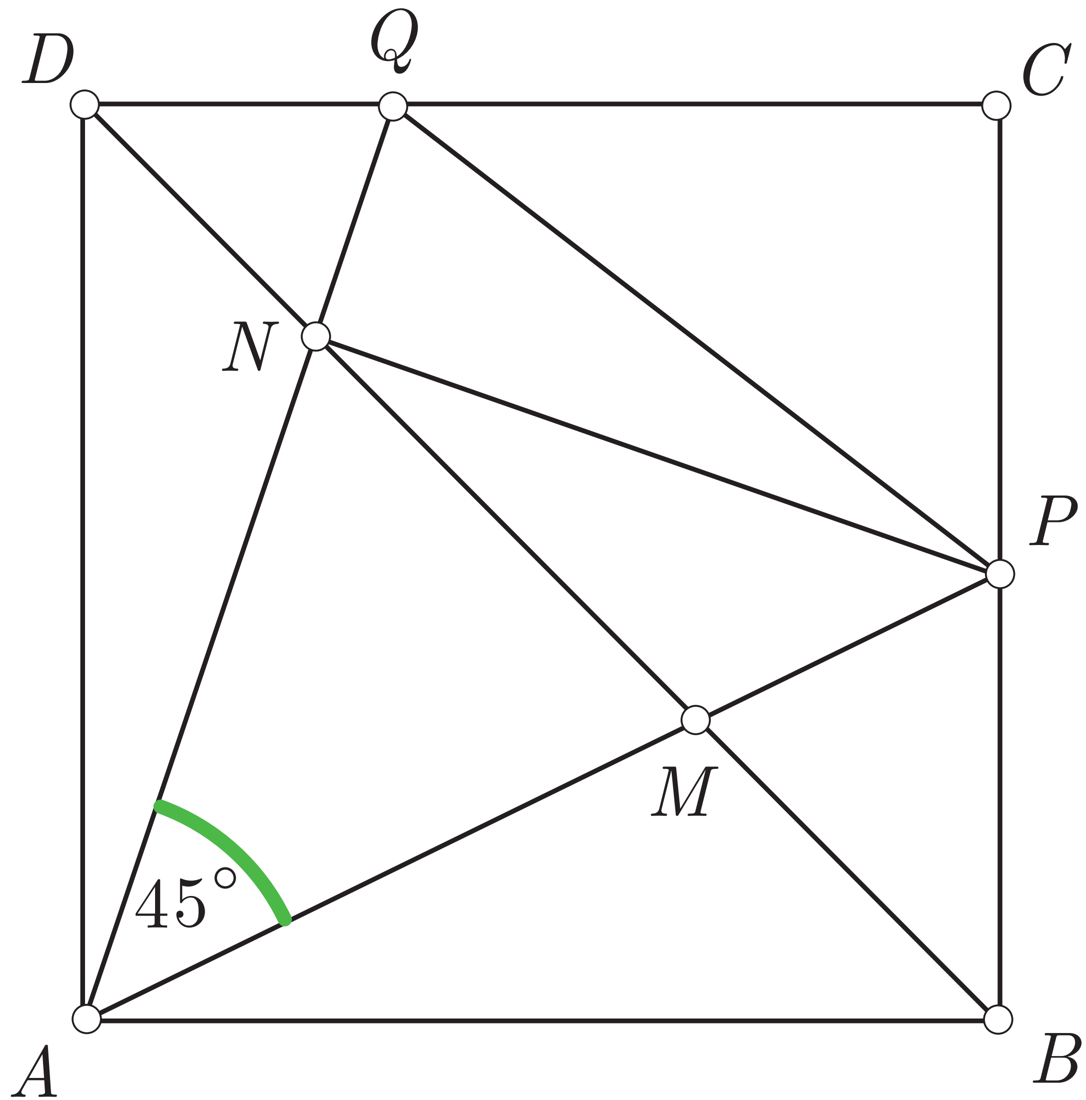


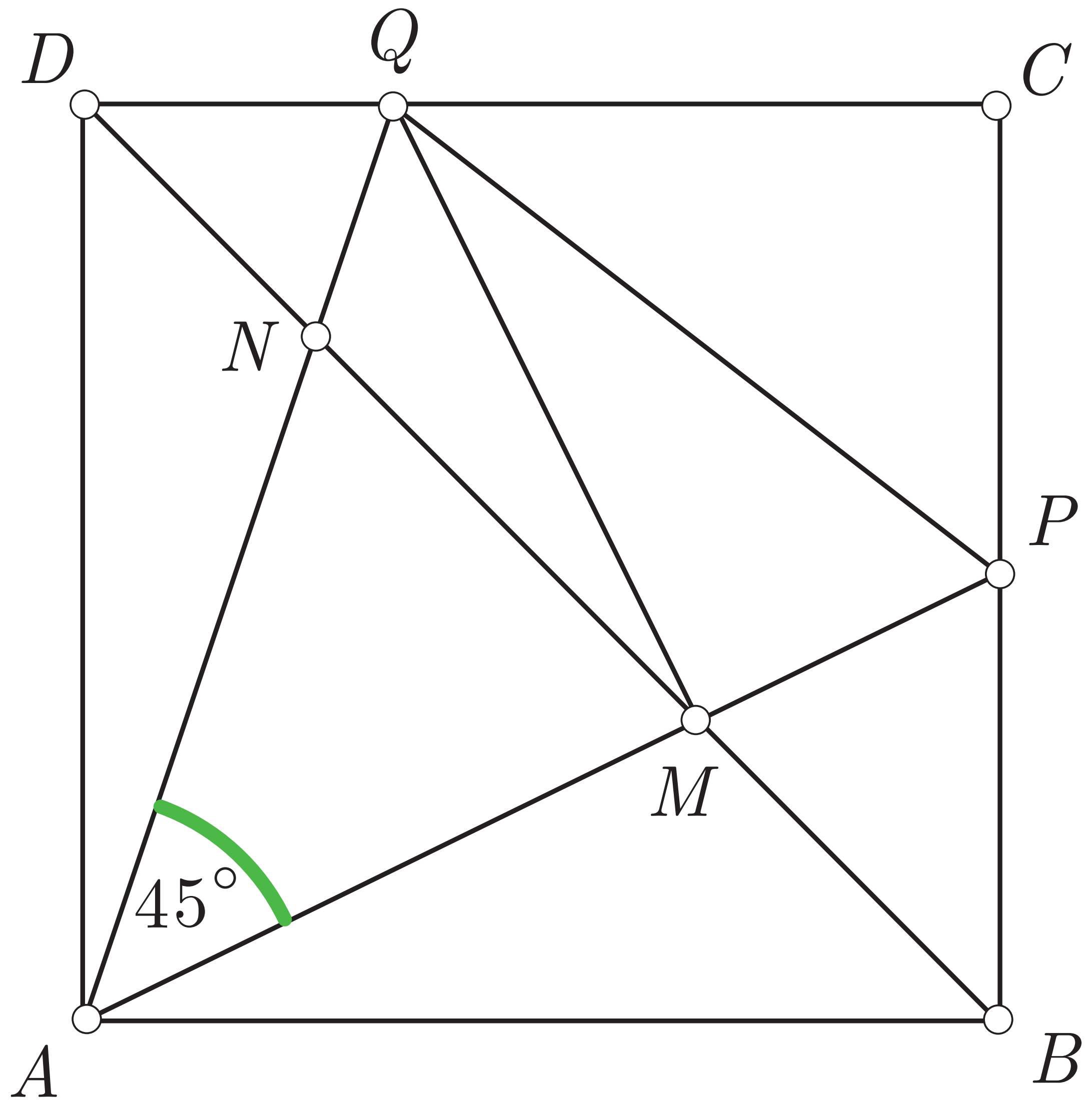
Zadanie 5. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym

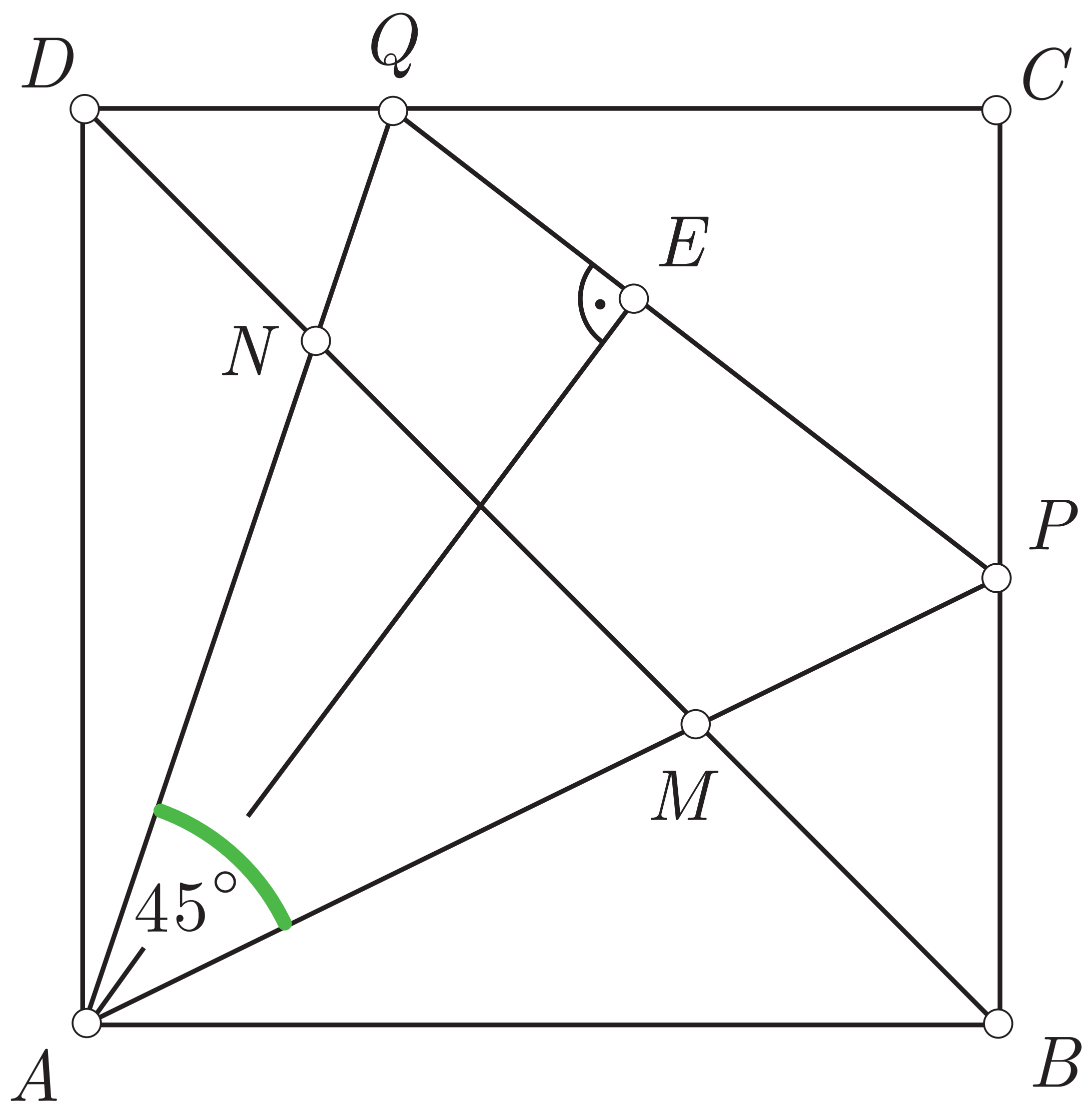
$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ.$$

Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek PQ, a odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że proste PN, QM i AE przecinają się w jednym punkcie.

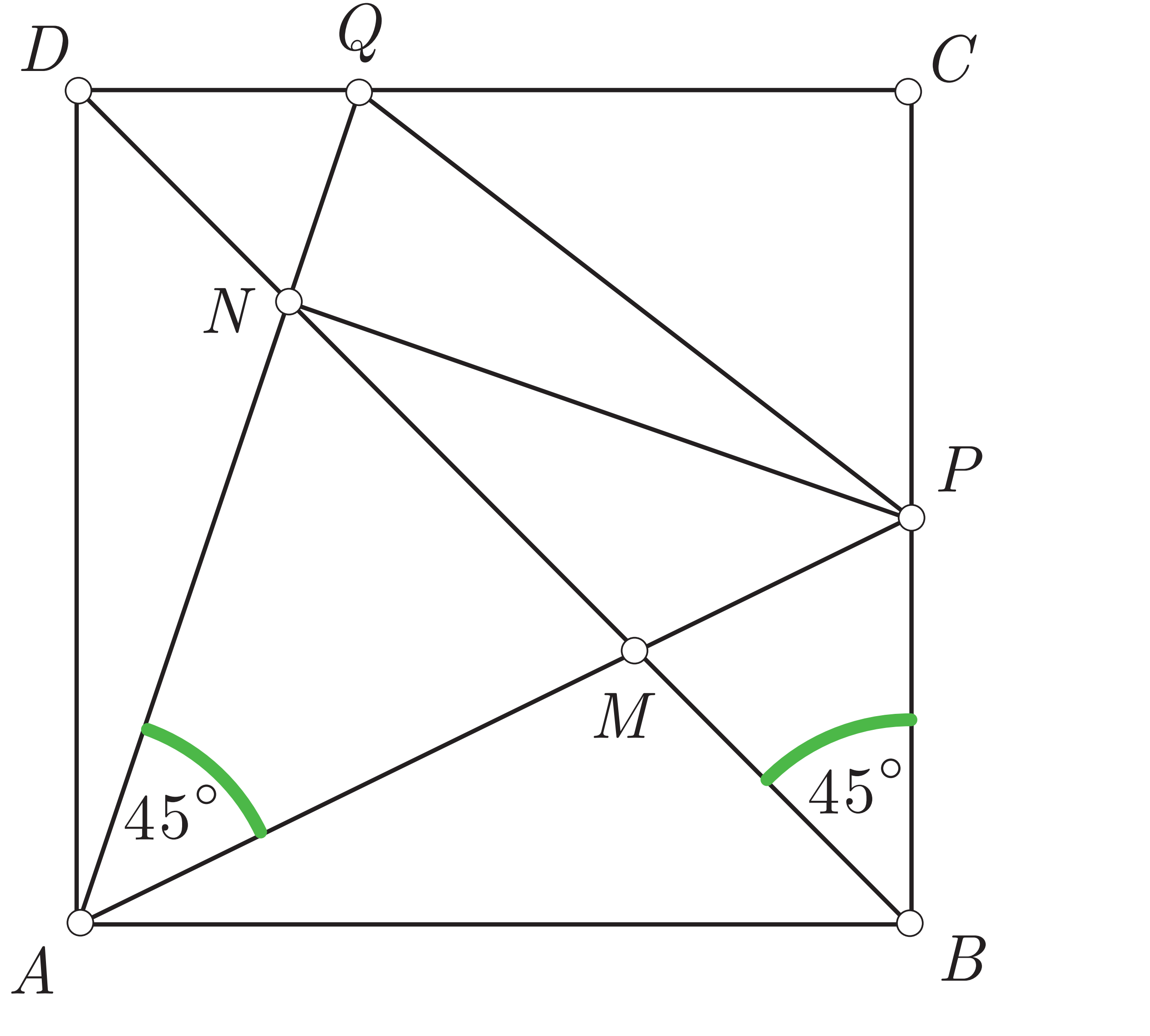



D
Q
C
N
P
M
45°
A
B


D
Q
C
N
P
M
45°
A
B


D
Q
C
E
N
P
M
45°
A
B

$$\measuredangle PAN = \measuredangle PBN = 45^\circ$$

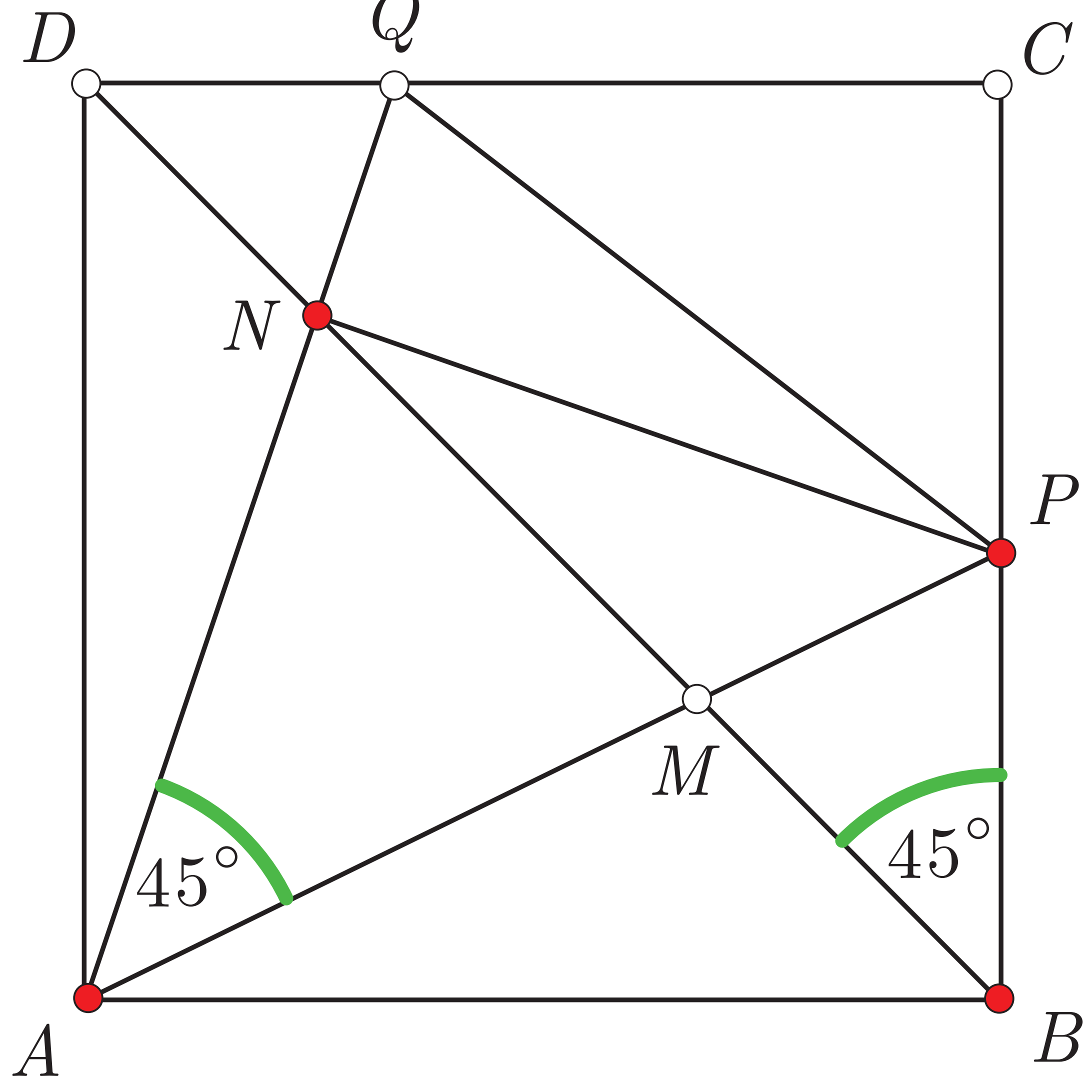


$$\sphericalangle PAN = \sphericalangle PBN = 45^\circ$$

$$\Downarrow$$

A, B, P, N

leżą na jednym okręgu



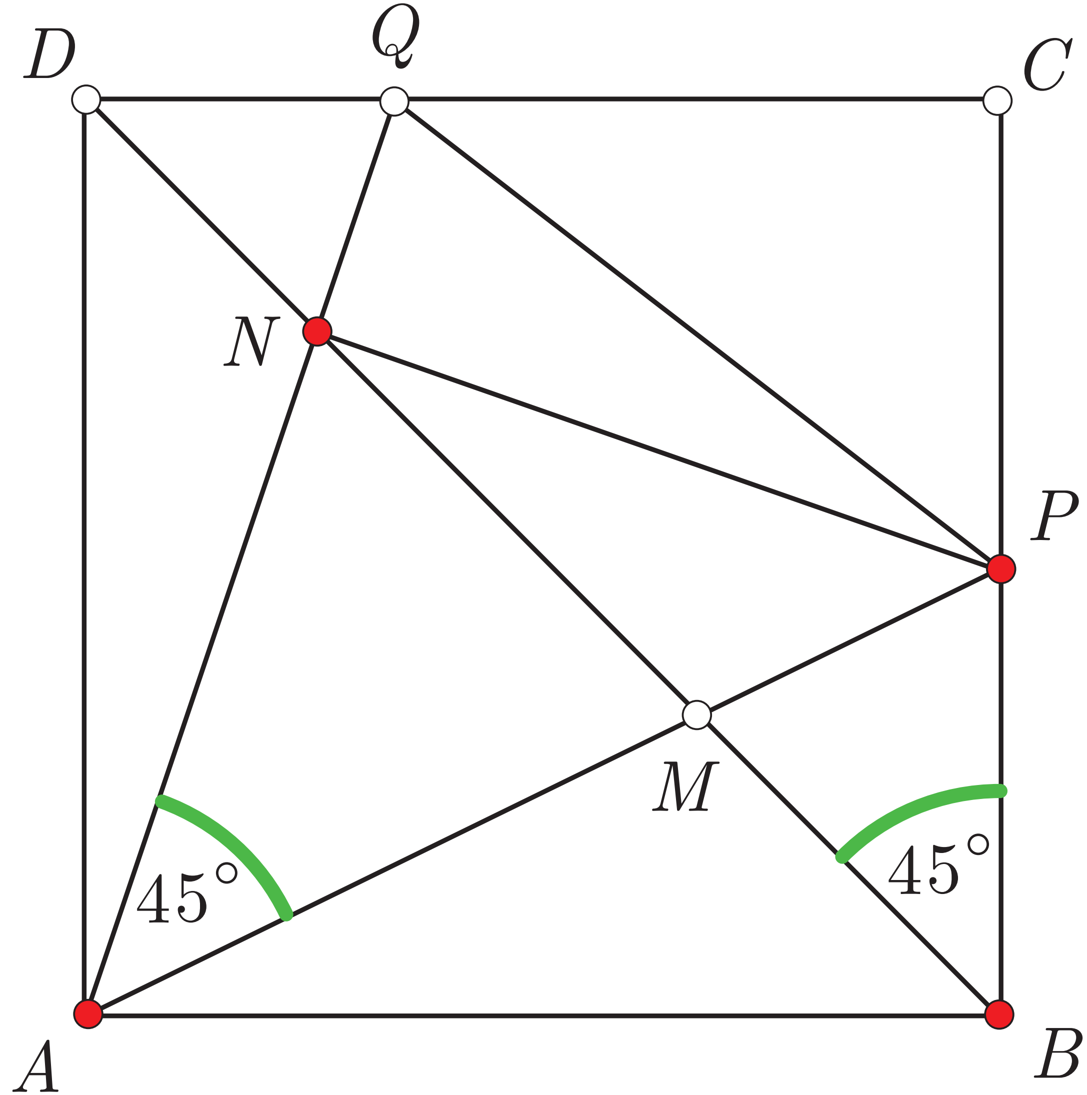
$$\sphericalangle PAN = \sphericalangle PBN = 45^\circ$$

$$\Downarrow$$

A, B, P, N

leżą na jednym okręgu

Ale $\sphericalangle ABP = 90^\circ$



$$\sphericalangle PAN = \sphericalangle PBN = 45^\circ$$

$$\Downarrow$$

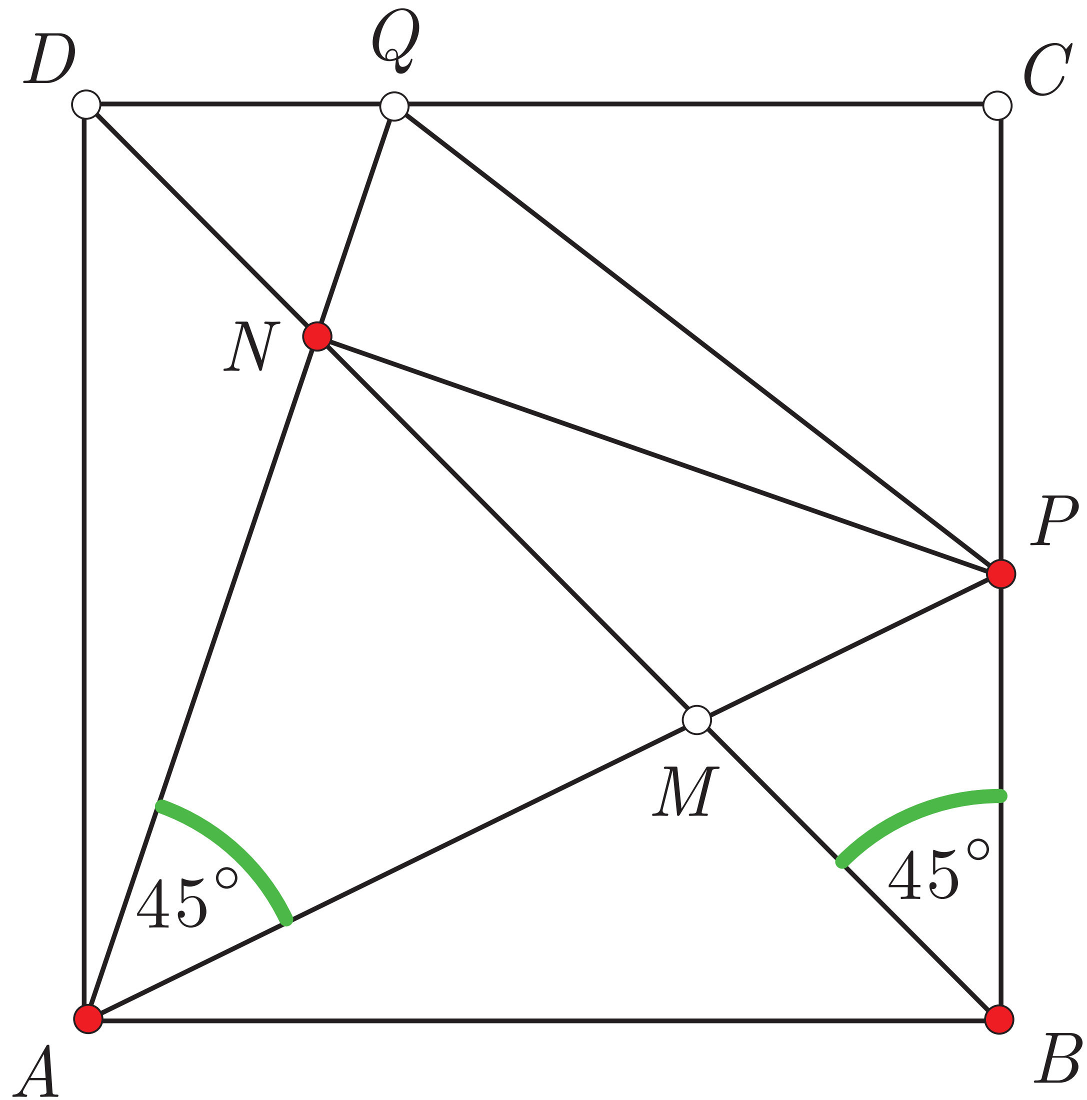
$$A,\ B,\ P,\ N$$

leżą na jednym okręgu

Ale $\sphericalangle ABP = 90^\circ$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ANP = 90^\circ$$



$$\sphericalangle PAN = \sphericalangle PBN = 45^\circ$$

$$\Downarrow$$

A, B, P, N

leżą na jednym okręgu

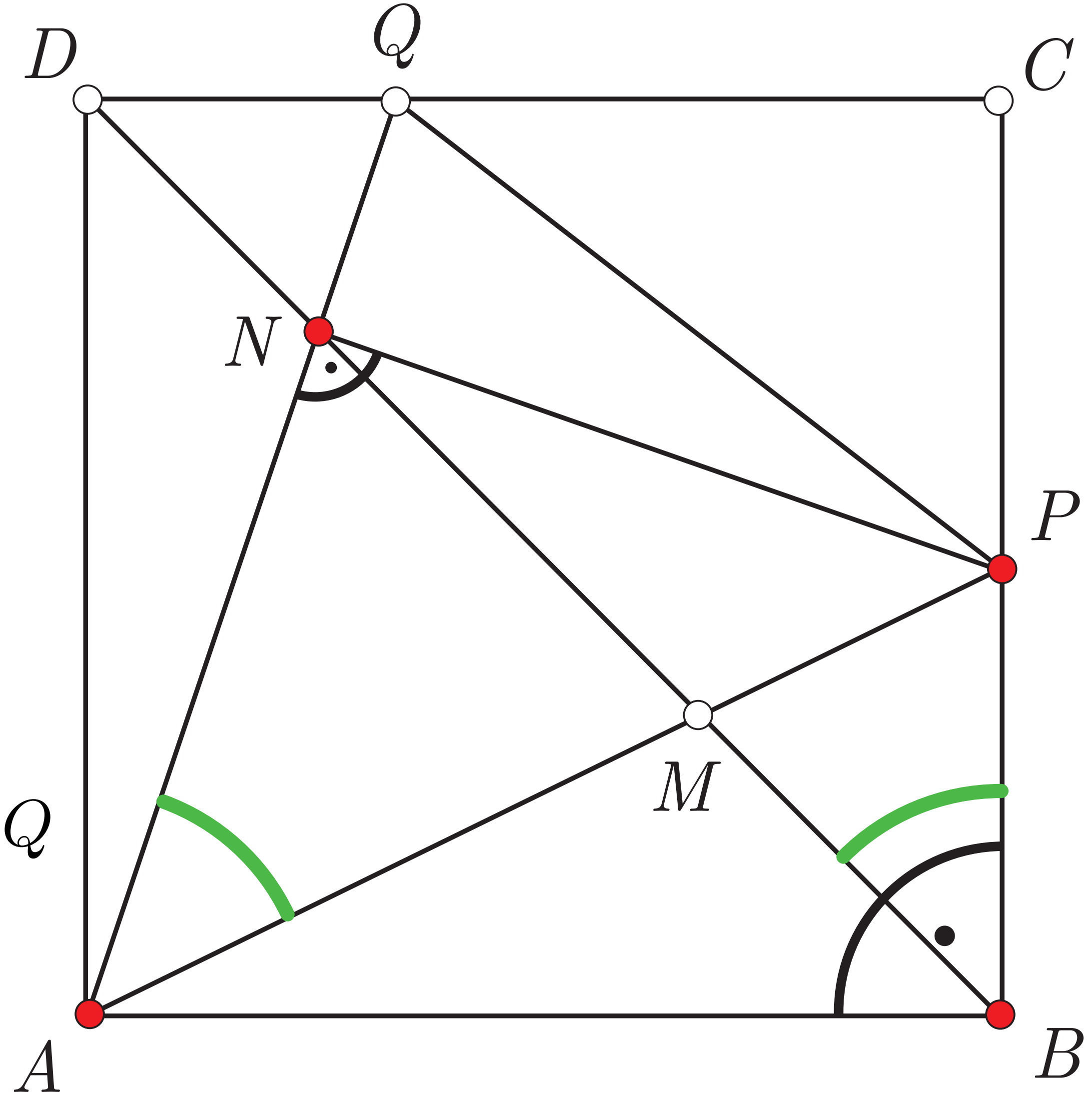
Ale $\sphericalangle ABP = 90^\circ$

$$\Downarrow$$

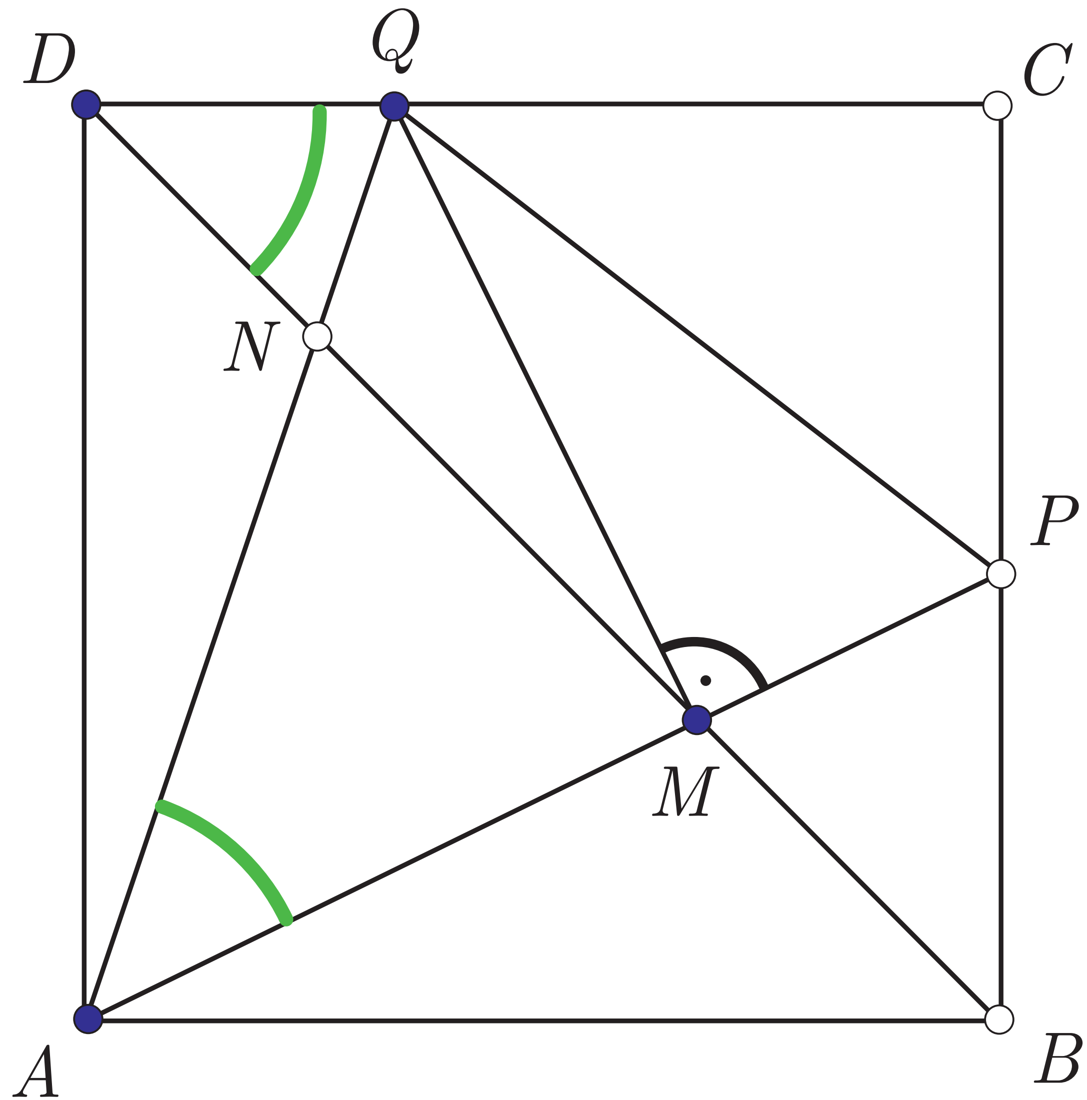
$$\sphericalangle ANP = 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

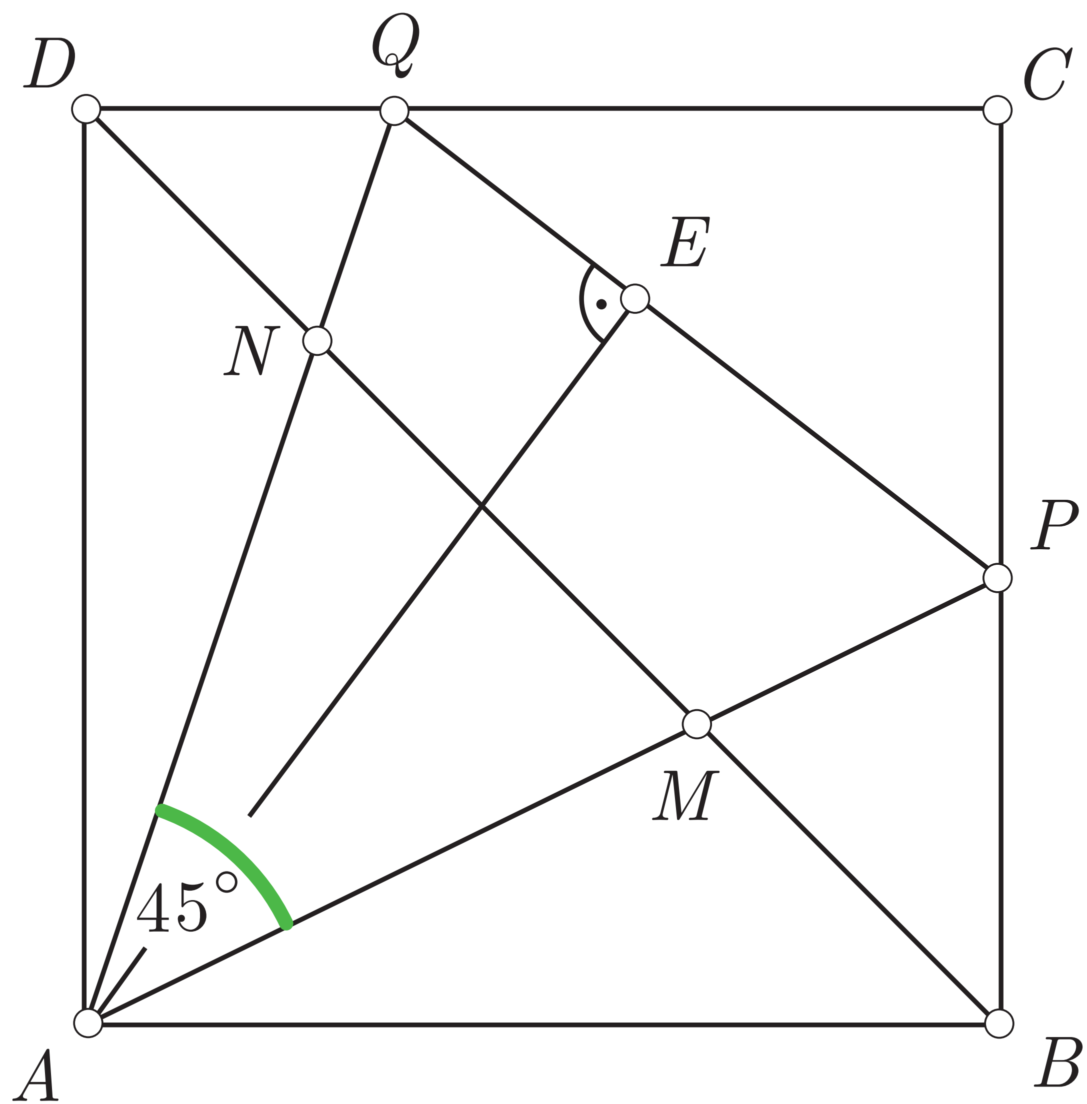
PN — wysokość trójkąta APQ



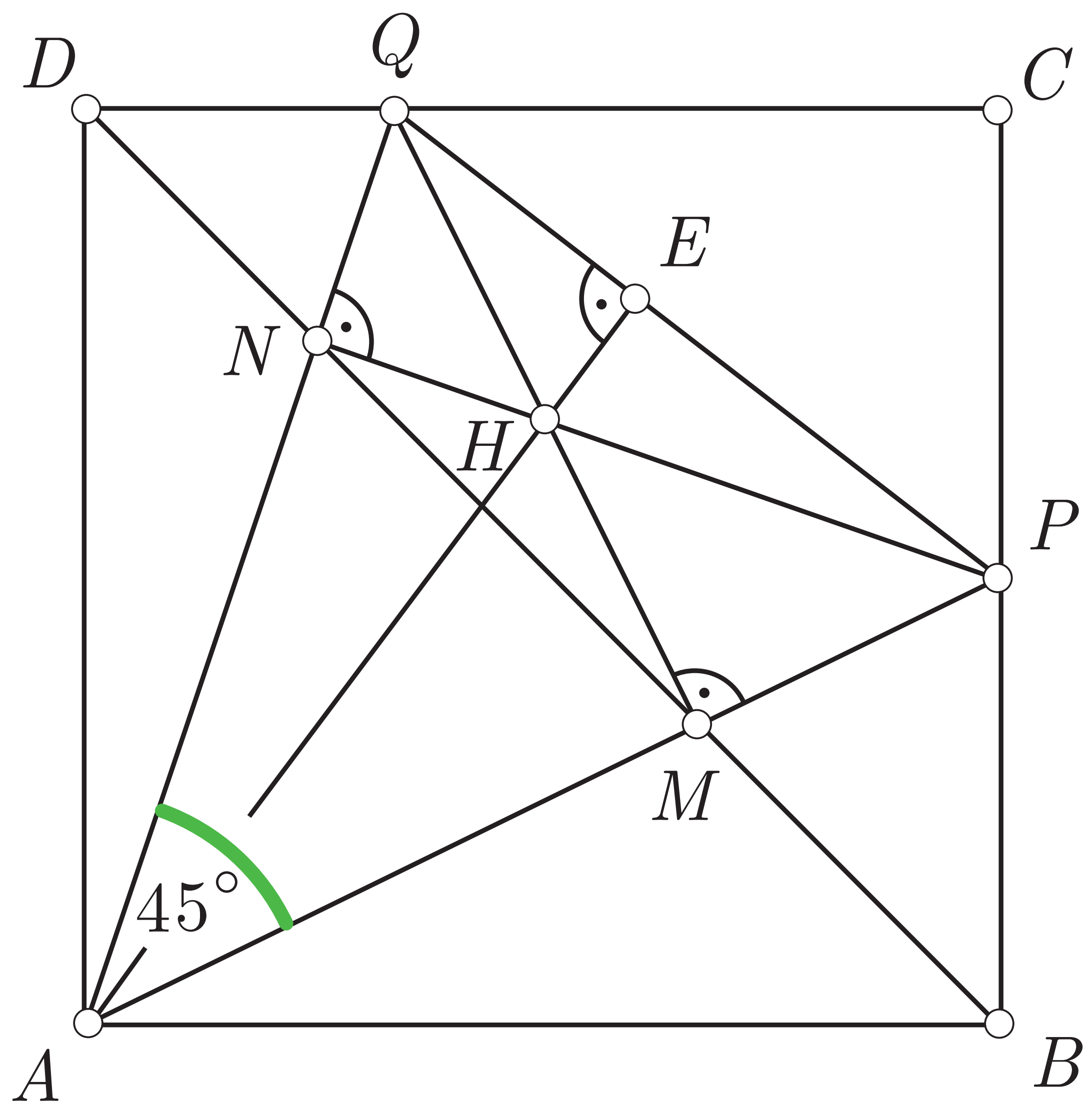
Analogicznie wykazujemy, że punkty A, D, Q, M leżą na jednym okręgu i stąd QM jest wysokością trójkąta APQ



A ponieważ AE też jest wysokością trójkąta APQ,



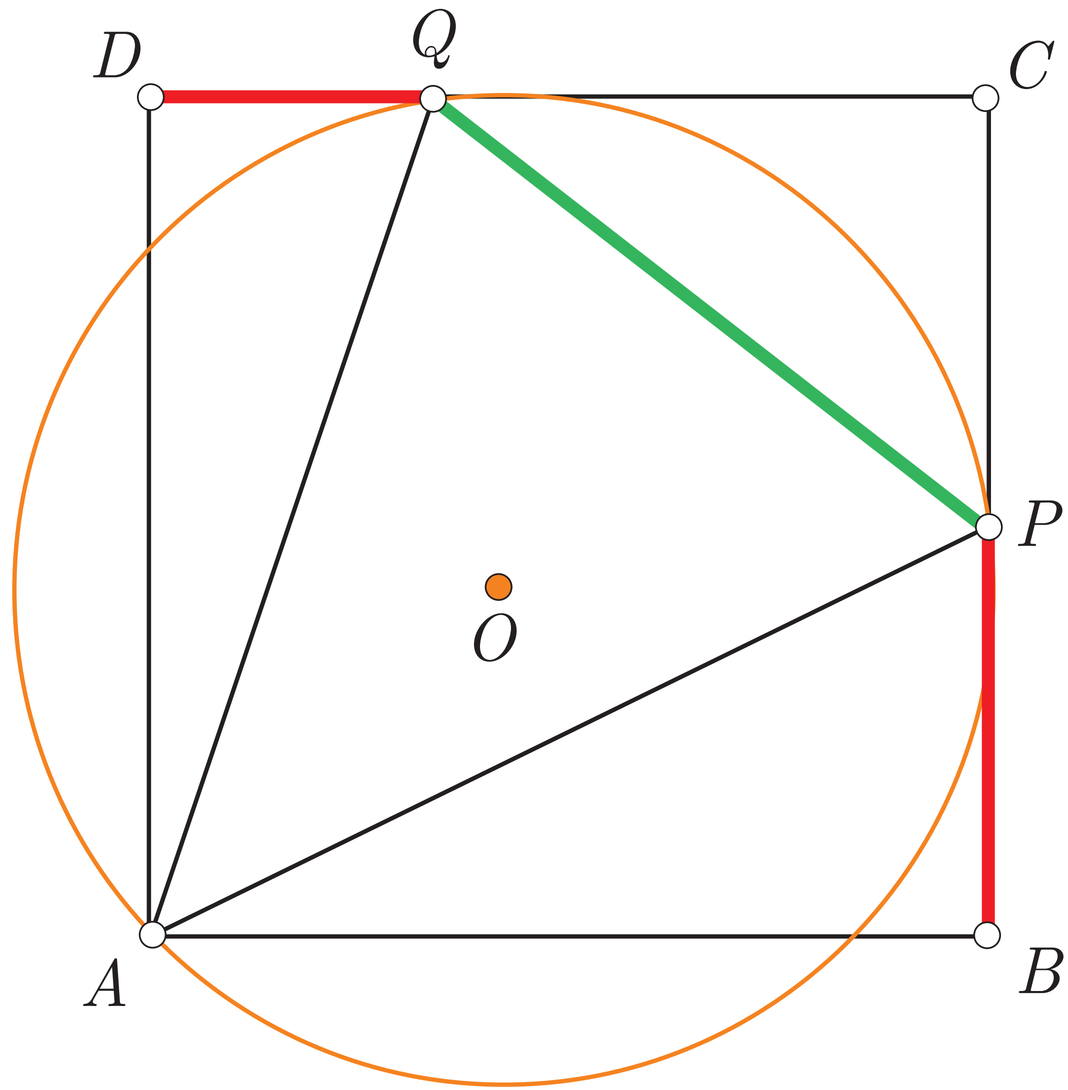
więc proste PN, QM i AE przecinają się w jednym punkcie.



Zadanie 6. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

$$BP + DQ = PQ.$$

Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie APQ leży na przekątnej AC kwadratu $ABCD$.



Wiemy już, że warunki

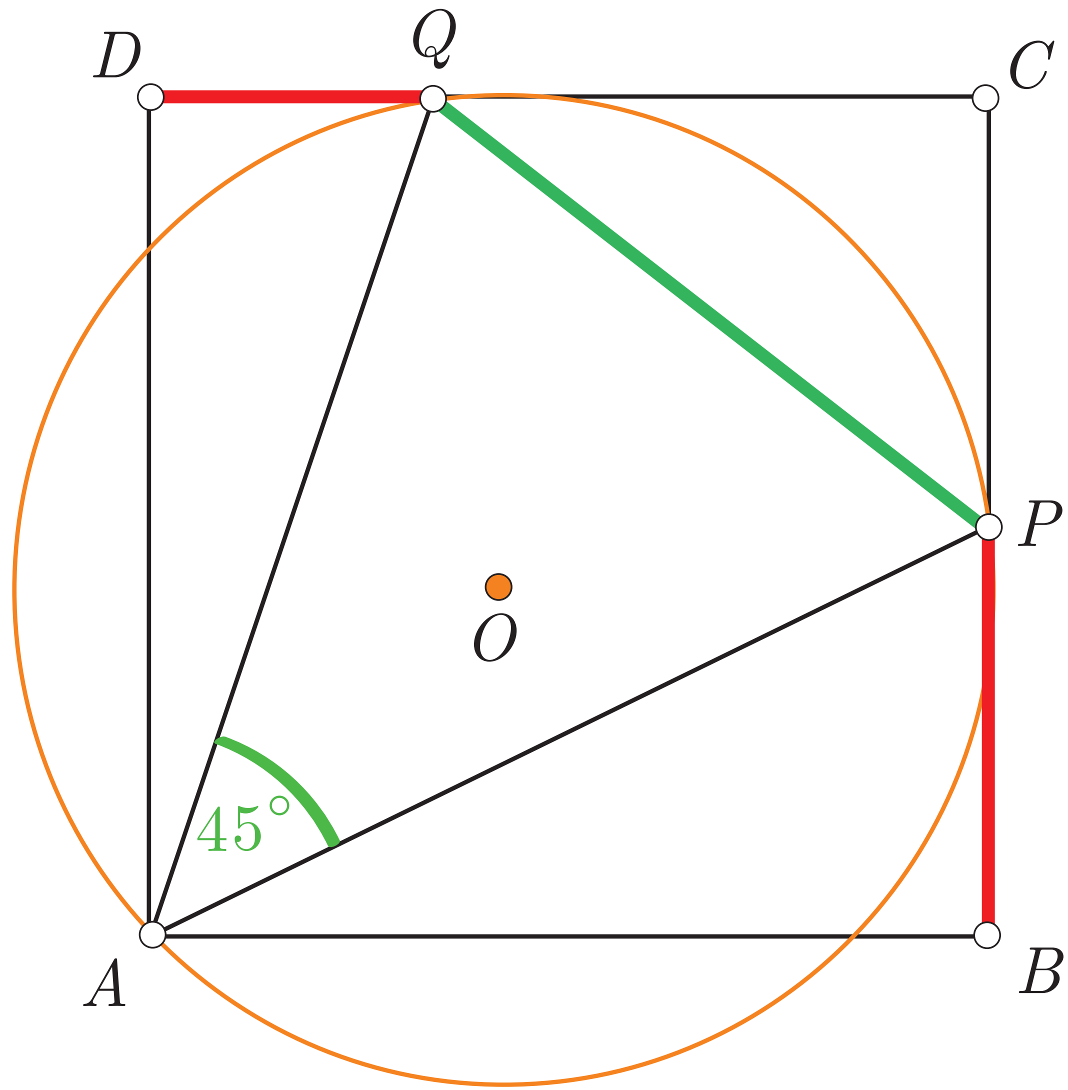
$$BP + DQ = PQ.$$

oraz

$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ$$

są równoważne.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie PAQ.

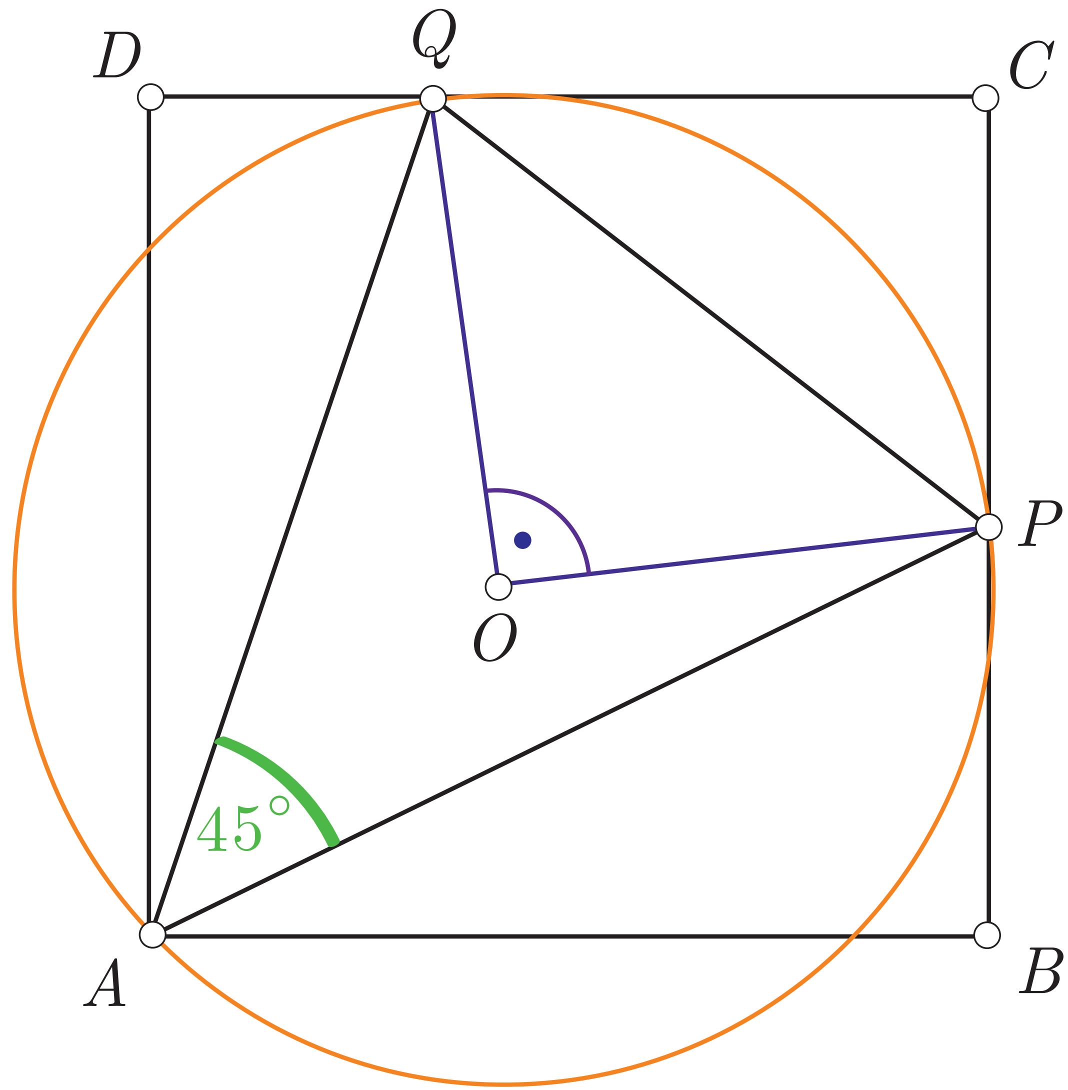


Wtedy

$$OP = OQ$$

oraz

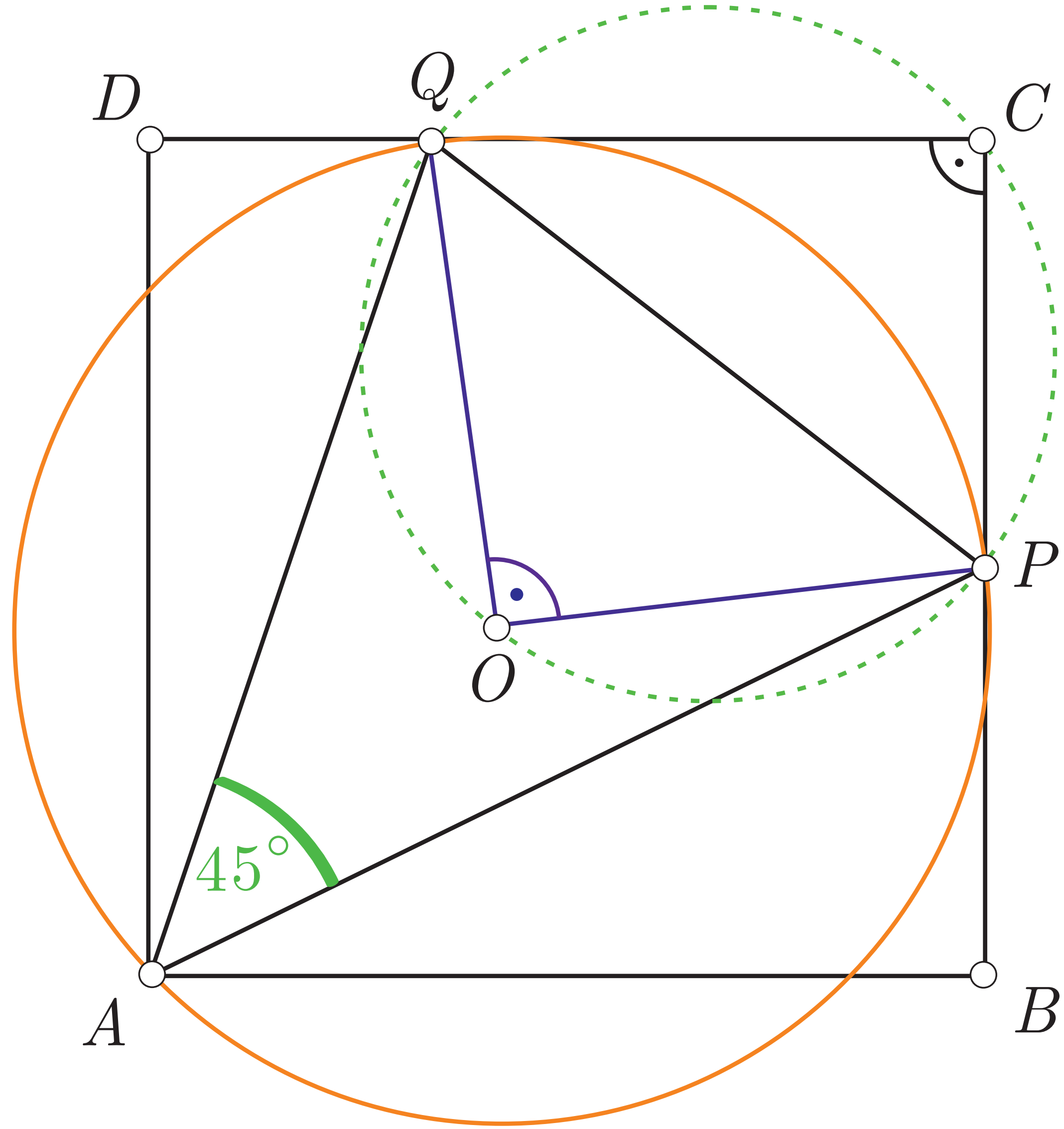
$$\sphericalangle POQ = 2\sphericalangle PAQ = 90^\circ.$$



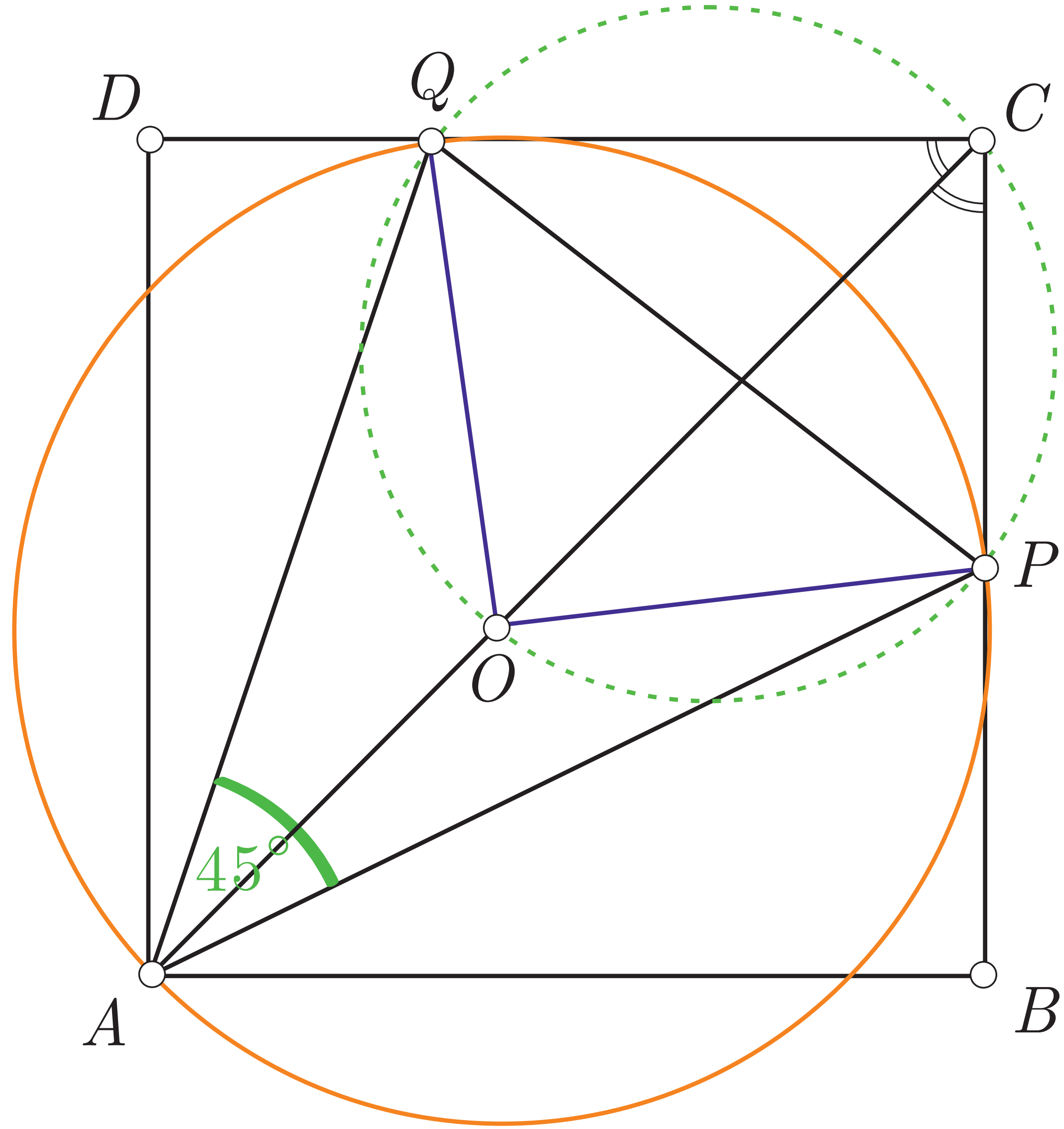
Jednocześnie

$$\sphericalangle PCQ = 90^\circ,$$

więc na czworokącie $PCQO$ można opisać okrąg. Z warunku $OP = OQ$ wynika, że kąty wpisane w okrąg oparte na łukach OP i OQ są równe, więc



punkt O leży na dwusiecznej kąta PCQ, czyli na przekątnej AC kwadratu $ABCD$.

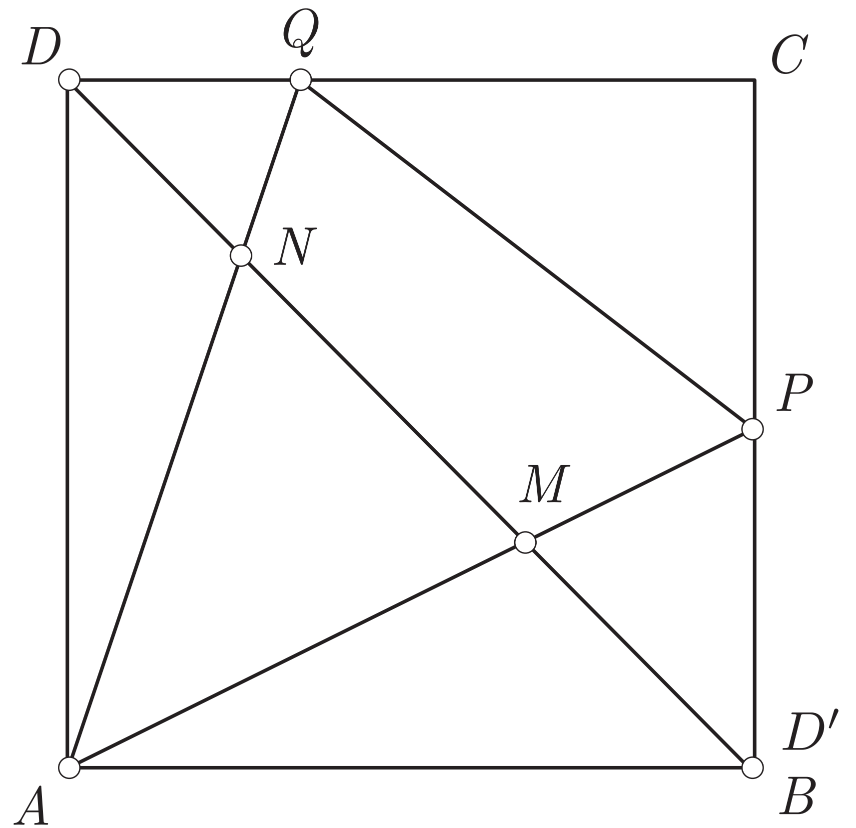


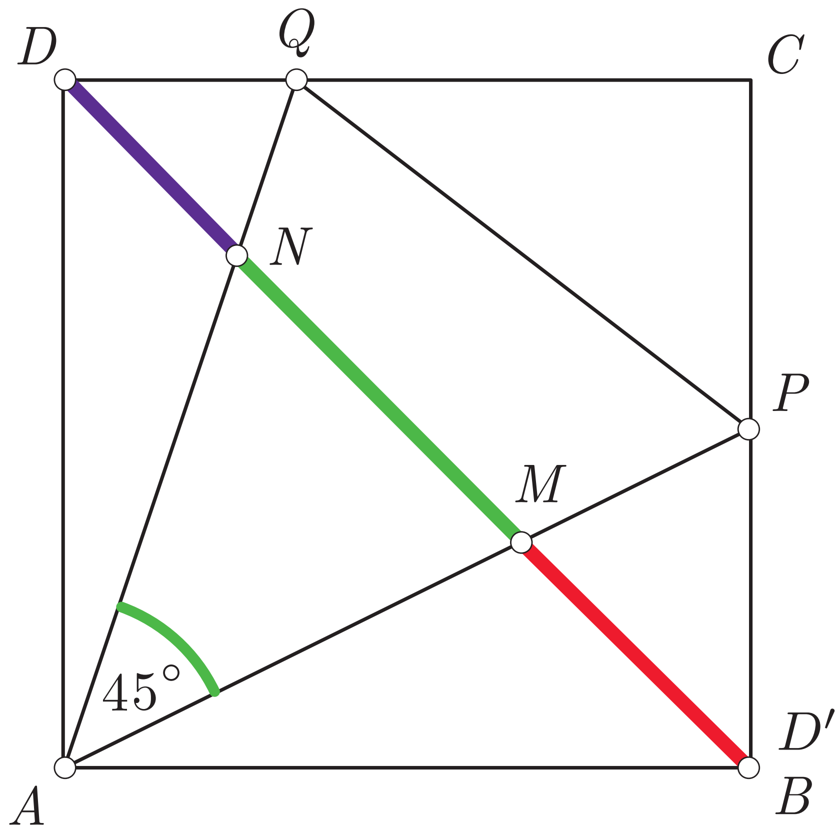
Zadanie 7. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

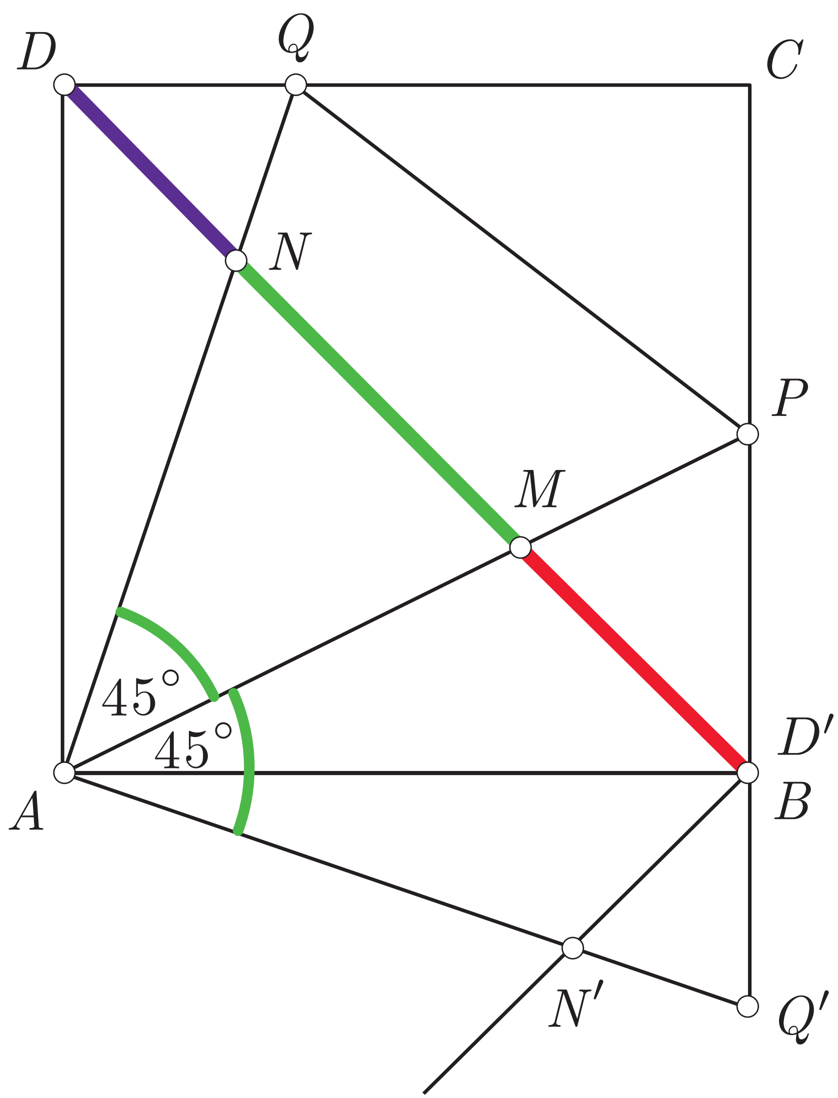
$$BP + DQ = PQ.$$

Odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że

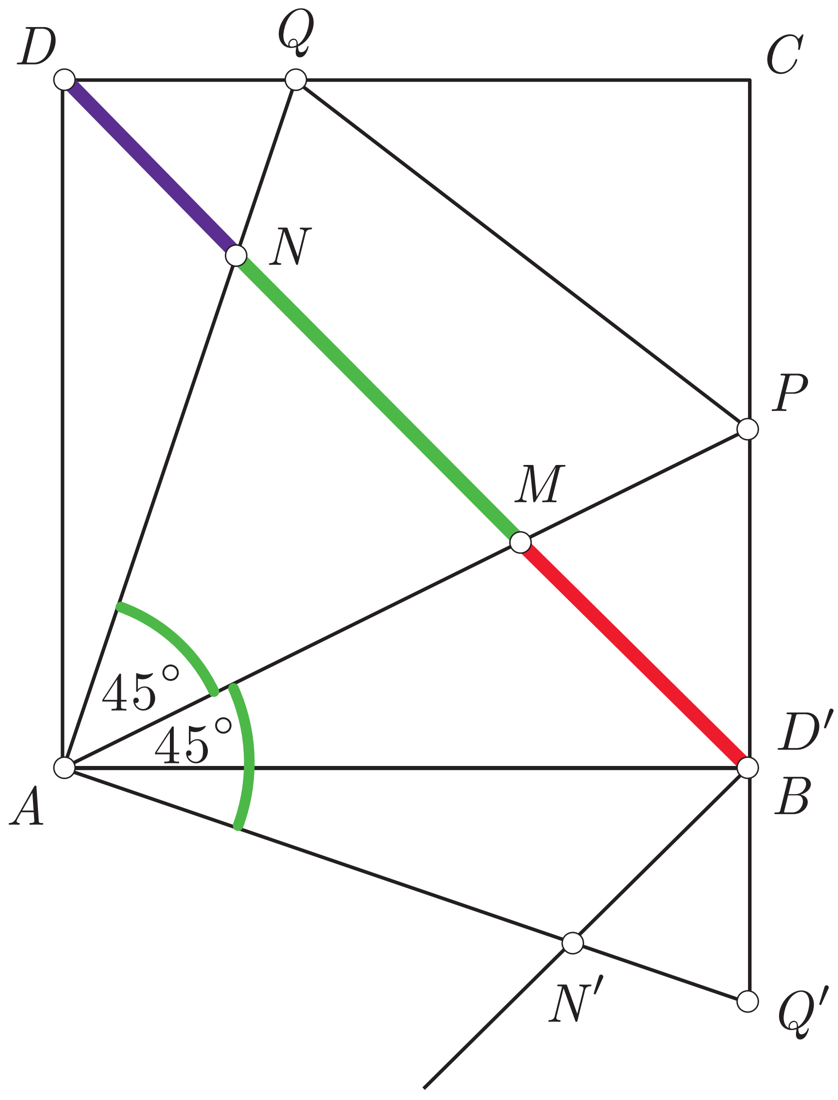
$$MN^2 = BM^2 + DN^2.$$

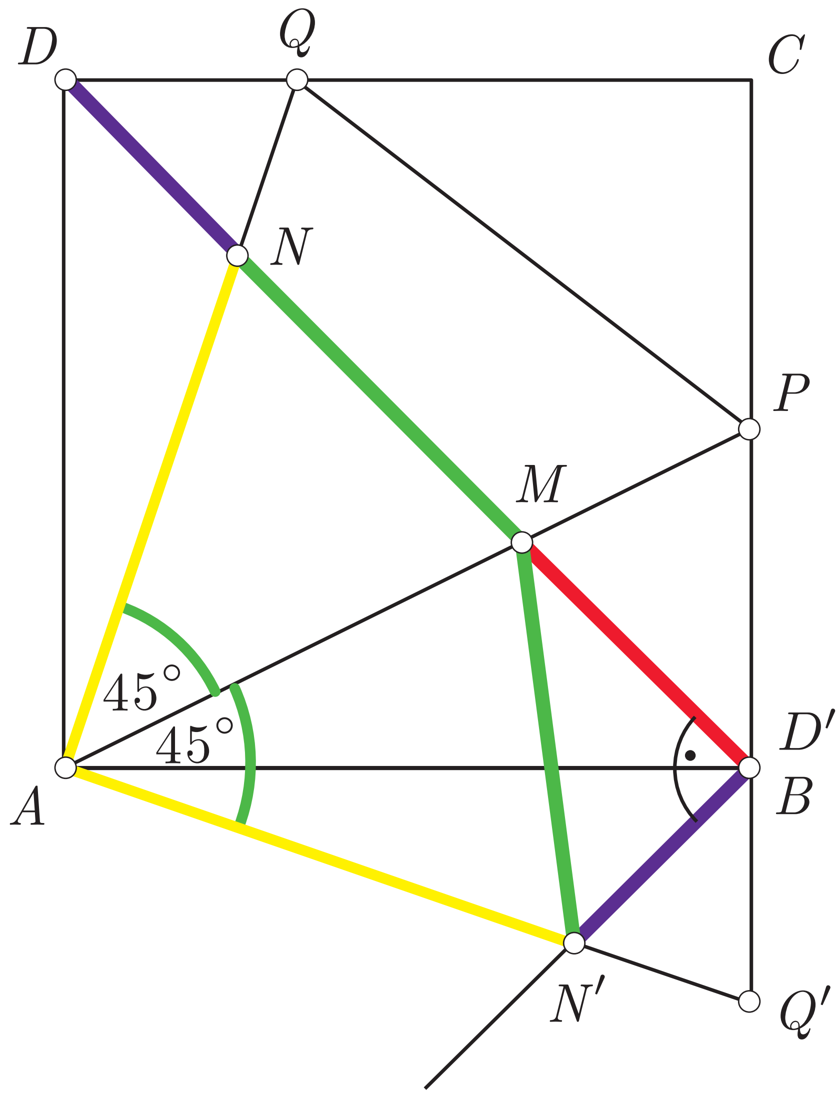



D
Q
C
N
P
M
45°
D′
A
B



D
Q
C
N
P
M
45°
45°
D′
A
B
N′
Q′

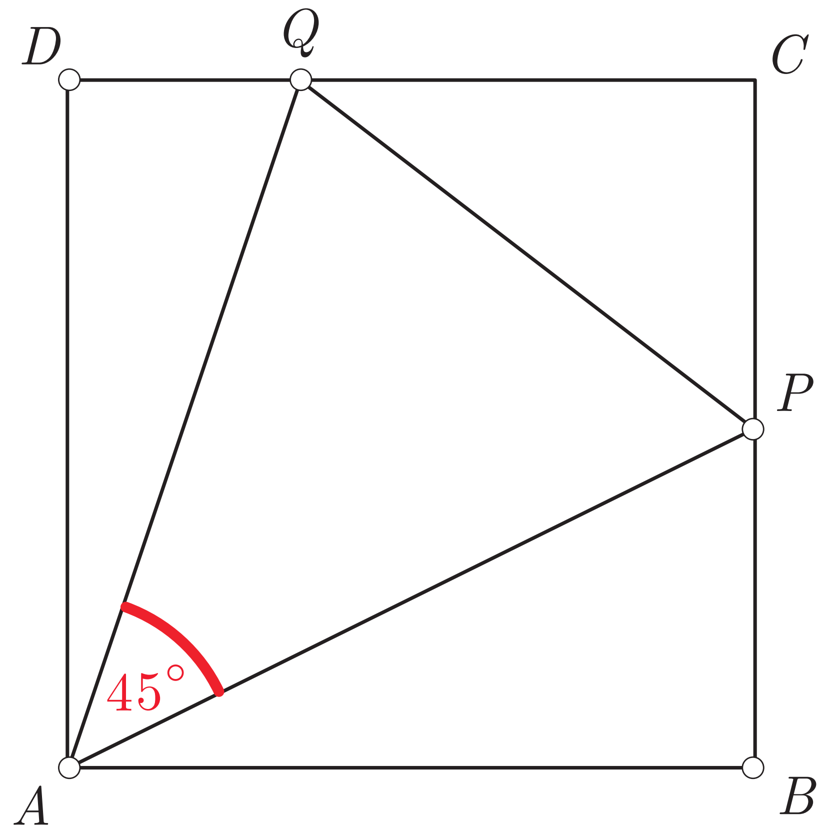

D
Q
C
N
P
M
45°
45°
D′
A
B
N′
Q′

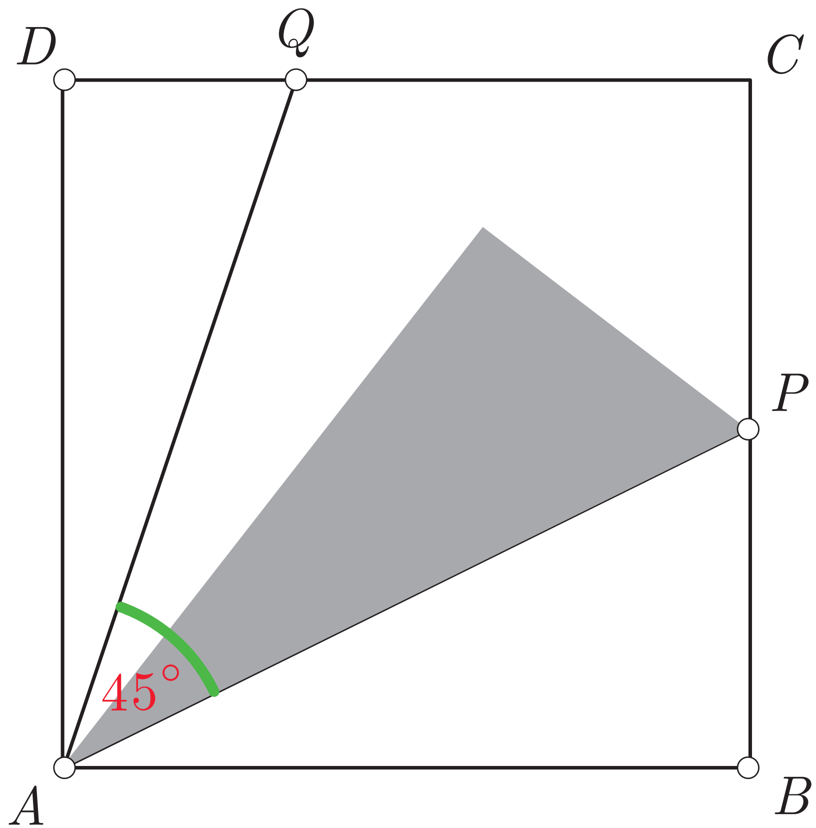

D
Q
C
N
P
M
45°
45°
D′
A
B
N′
Q′

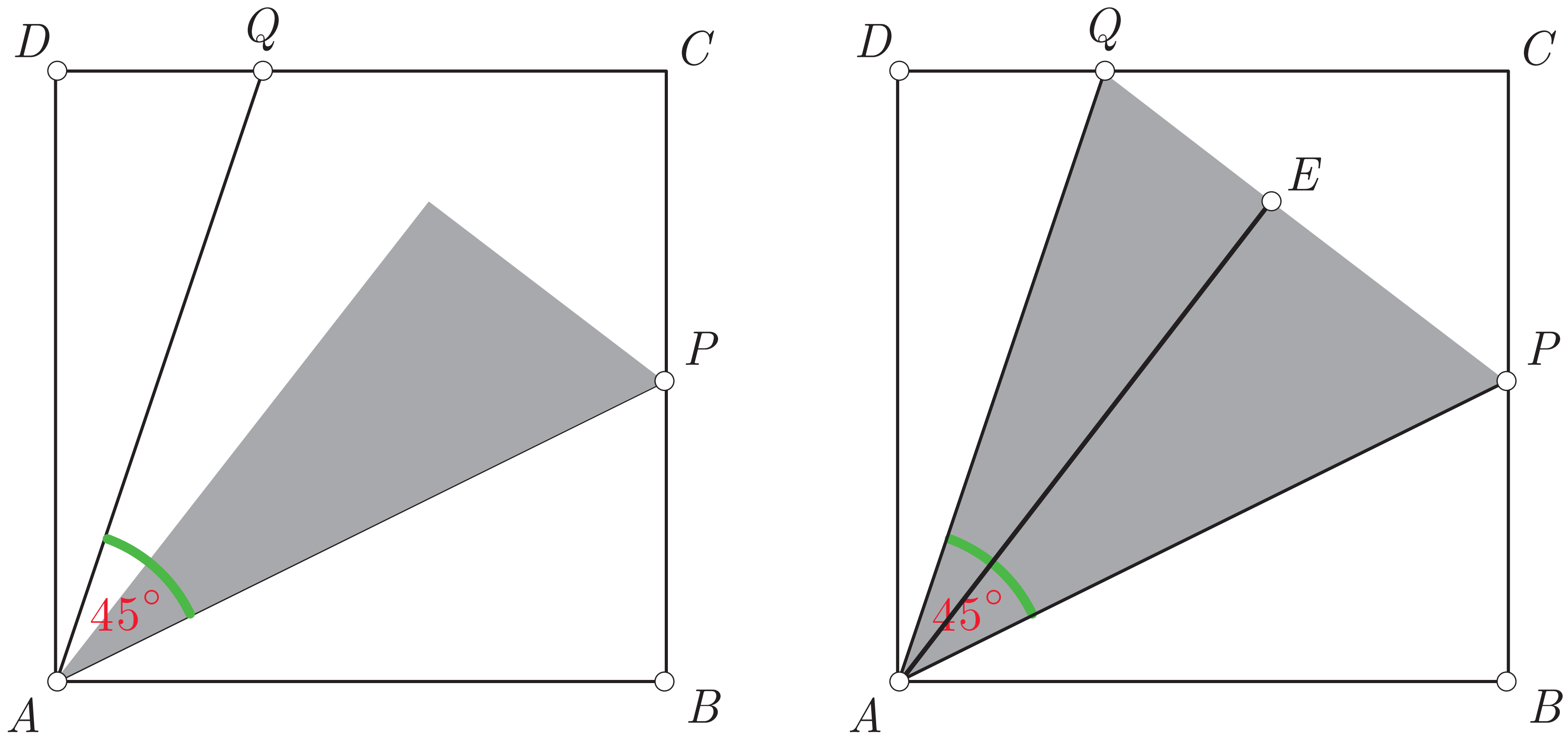
Zadanie 8. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

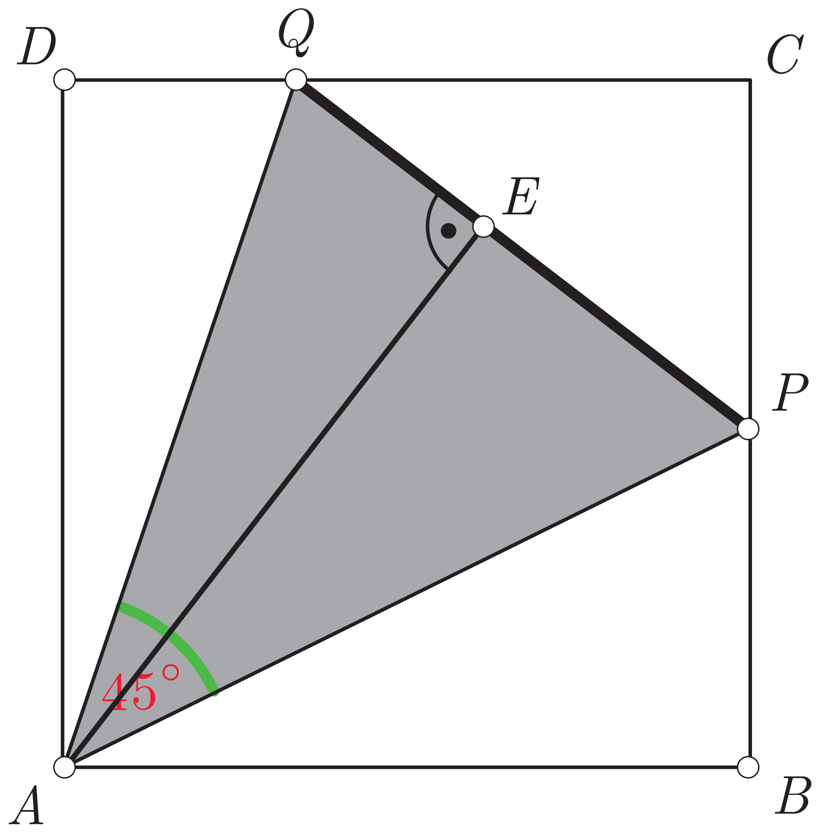
$$\sphericalangle PAQ = 45^\circ.$$

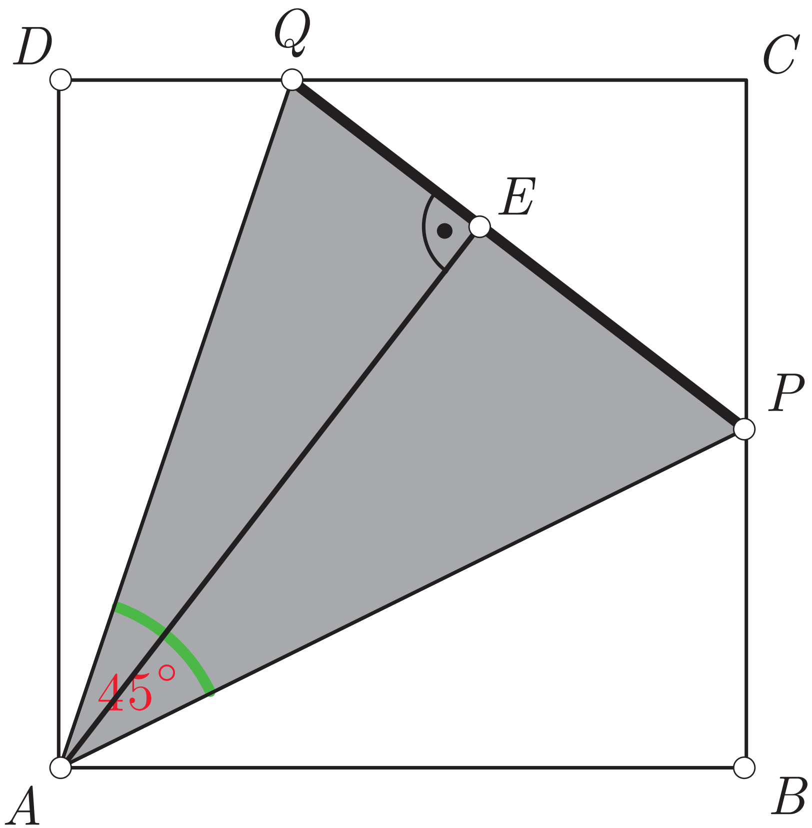
Wykazać, że pole trójkąta PAQ jest równe sumie pól trójkątów ABP i ADQ.

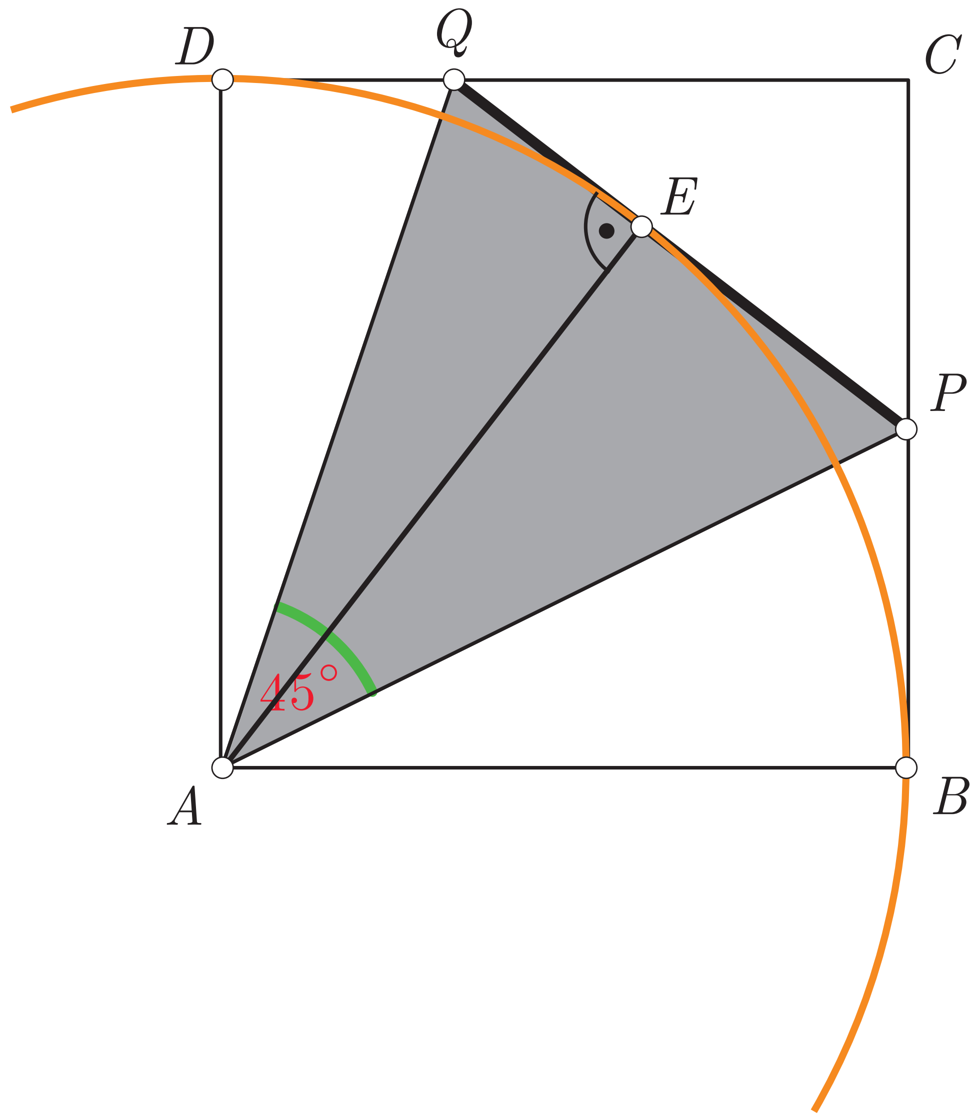



D
Q
C
P
45°
A
B


D
Q
C
P
A
B
45°
D
Q
C
E
P
A
B
45°


D
Q
C
E
P
45°
A
B


D
Q
C
E
P
45°
A
B


D
Q
C
E
P
45°
A
B

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

Угол в квадрате

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Большая часть этих задач была придумана автором для турниров математических боев имени А.П.Савина, а три задачи есть в его книжке «Задачи на вырост». В статье использованы также материалы геометрических кружков Ю.А.Блинкова и Д.В.Швецова (http://www.geometry.ru/kruzhki_big.htm).

Мы постараемся проследить несколько «сюжетных линий» и показать не только тесные связи между разными задачами, но и богатство геометрических методов, которые позволяют их решить.

Начнем с задачи, которая уже давно стала классикой.

Задача 1. *На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$*

Таким свойством обладает единственная точка – центр вневписанной окружности треугольника CMN (подробнее – см. статью «Вневписанная окружность» в «Кванте» №2 за 2009 г.). Следовательно, $AE = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Второй способ. Расположив квадрат так, как показано на рисунке 2,*б*, рассмотрим поворот с центром A на угол $90°$ против часовой стрелки. Образом вершины D будет являться вершина B, образом прямой DC – прямая BC', ей перпендикулярная, поэтому точка N' (образ точки N) будет лежать на отрезке BC'. Так как $\angle NAN' = 90°$, то $\angle MAN' = \angle MAN$, значит, треугольник AMN' равен треугольнику AMN (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, т.е. $AE = AB$.

Третий способ. «Перегнем» квадрат по прямым AM и AN. Так как $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$ и $AB = AD$, то после перегибания отрезки AB и AD совместятся (рис. 2,*в*). Кроме того, $\angle ABM = \angle ADN = 90°$, значит, из точки, в которой оказались вершины B и D, отрезки AM и AN видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка E. Значит, $AE = AB = AD$.

Замечание. Этот авторский прием, который В.В.Произво-