O kolorowaniu

Wojciech Guzicki

1. Kilka zadań na początek

Kolorowanie jest częstym tematem zadań o charakterze olimpijskim. Na początku tego wykładu pokażę 10 takich zadań; większość (dokładniej: wszystkie z wyjątkiem jednego) pochodzi z Olimpiady Matematycznej i Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (lub pod późniejszą nazwą Olimpiady Matematycznej Juniorów).

1. (XXI OM, zadanie 11/I)
Udowodnij, że przy każdym podziale płaszczyzny na trzy zbiory w co najmniej jednym z nich istnieją dwa punkty odległe o 1.

To zadanie możemy sformułować inaczej, używając pojęcia kolorowania. Oto takie sformułowanie:

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano jednym z trzech kolorów. Udowodnij, że na tej płaszczyźnie istnieją dwa punkty odległe o 1 pokolorowane tym samym kolorem.

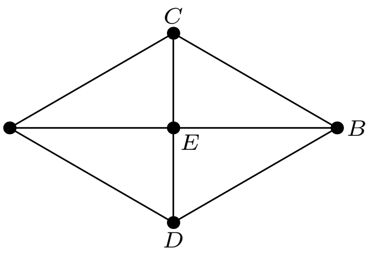
Rozwiązanie. Pokażę rozwiązanie oryginalne (por. archiwym Olimpiady Matematycznej: `archom.ptm.org.pl`). Przypuśćmy, że to twierdzenie jest fałszywe, tzn. istnieje takie kolorowanie płaszczyzny trzema kolorami (niebieskim, zielonym i czerwonym), w którym dowolne punkty odległe o 1 są innego koloru. Pokażemy najpierw, że każde dwa punkty odległe o $\sqrt{3}$ są pokolorowane tym samym kolorem. Niech zatem będzie dany odcinek AB długości $\sqrt{3}$. Weźmy na płaszczyźnie dwa punkty C i D takie, że:

$$AC = BC = AD = BD = 1.$$

Są to punkty przecięcia dwóch okręgów o środkach A i B i promieniu 1. Takie punkty istnieją, ponieważ odległość środków tych okręgów jest mniejsza od sumy promieni i większa od różnicy promieni. Nietrudno teraz udowodnić, że mamy także $CD = 1$. Mianowicie

$$AC = BC \quad \text{oraz} \quad AD = BD.$$

Stąd wynika, że punkty C i D leżą na symetralnej odcinka AB. Niech teraz prosta CD (która właśnie jest symetralną odcinka AB) przecina odcinek AB w punkcie E. Wówczas punkt E jest środkiem odcinka AB oraz $\measuredangle AEC = 90°$.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy więc:

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

skąd wynika, że $CE = \frac{1}{2}$. Zatem $CD = 1$.

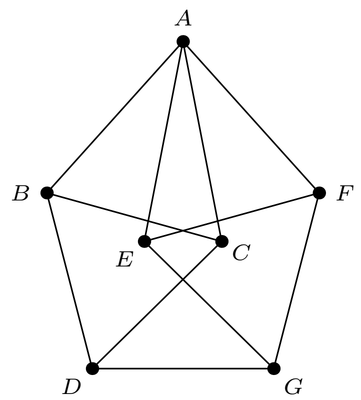
Punkty C i D są odległe o 1, więc mają dwa różne kolory. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że punkt C jest niebieski, a punkt D jest zielony. Punkt A jest odległy o 1 od punktów C i D, więc nie może być ani niebieski, ani zielony. Zatem punkt A jest czerwony. Dokładnie tak samo pokazujemy, że punkt B jest czerwony. Udowodniliśmy więc, że punkty A i B są tego samego koloru.

Teraz weźmy trójkąt KLM taki, że

$$KL = KM = \sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad LM = 1.$$

Wówczas oba wierzchołki L i M mają ten sam kolor co wierzchołek K, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem, że każde dwa punkty oddalone o 1 mają różne kolory. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Nieco dokładniejsza analiza przedstawionego wyżej rozumowania pokazuje, że rozwiązanie zadania sprowadza się do wykazania, że następujących siedmiu punktów płaszczyzny nie możemy pokolorować trzema kolorami tak, by punkty połączone na rysunku odcinkiem miały różne kolory (na rysunku zaznaczone są odcinki między tymi punktami, mające długość równą 1):



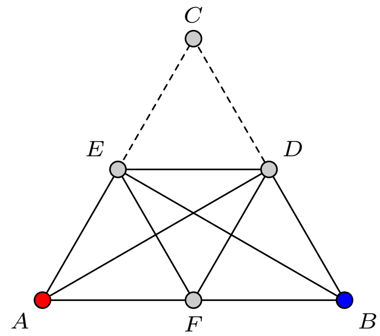
A oto zadanie podobne, z tą różnicą, że tym razem rozpatrujemy dwie różne długości odcinków.

2. (Olimpiada Matematyczna Australii, 2016 r.)
Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z czterech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty tego samego koloru w odległości 1 lub $\sqrt{3}$.

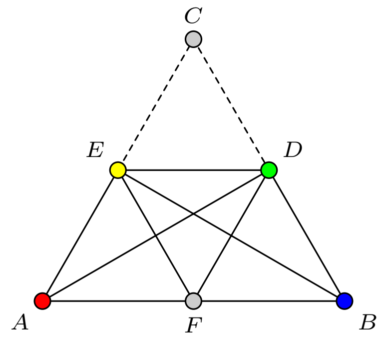
Rozwiązanie. Rozpatrujemy dowolne kolorowanie punktów płaszczyzny czterema kolorami: czerwonym, niebieskim, zielonym i żółtym. Zakładamy następnie, że dowolne punkty odległe o 1 lub o $\sqrt{3}$ mają różne kolory. Najpierw pokazujemy, że istnieją dwa punkty odległe o 2 pokolorowane różnymi kolorami. W tym celu weźmy dowolny trójkąt XYZ o bokach następujących długości:

$$XY = 1 \quad \text{oraz} \quad XZ = YZ = 2.$$

Zgodnie z przyjętym założeniem punkty X i Y mają różne kolory. Punkt Z ma jakiś kolor: jest on różny od koloru punktu X lub od koloru punktu Y (lub od obu kolorów). W każdym przypadku dostajemy dwa punkty różnych kolorów odległe o 2. Niech będą to punkty A i B; bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt A ma kolor czerwony i punkt B ma kolor niebieski. Niech następnie punkt C będzie wybrany tak, że trójkąt ABC jest równoboczny (czyli $AC = BC = 2$). Niech wreszcie punkty D, E i F będą środkami boków BC, AC i AB tego trójkąta równobocznego.

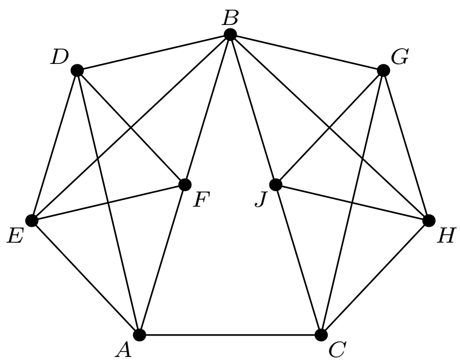


Nietrudno zauważyć, że $AE = BD = 1$ oraz $AD = BE = \sqrt{3}$. Stąd wynika, że żaden z punktów D i E nie może być ani czerwony, ani niebieski. Ponieważ mamy także $DE = 1$, więc punkty D i E muszą mieć różne kolory. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt D jest zielony, a punkt E żółty.



Zauważmy teraz, że punkt F jest odległy o 1 od czterech punktów A, B, D i E mających cztery różne kolory. Niezależnie od tego, jaki kolor ma punkt F, jest on odległy o 1 od innego punktu tego samego koloru. To jednak jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie zadania znów sprowadza się do stwierdzenia, że następujących dziewięciu punktów nie można pokolorować za pomocą czterech kolorów tak, by punkty połączone na rysunku odcinkiem miały różne kolory (tym razem na rysunku są zaznaczone odcinki mające długość równą 1 lub $\sqrt{3}$):



Następne osiem zadań pokażę teraz bez rozwiązań. Dwa z nich zostaną rozwiązane w dalszym ciągu wykładu.

3. (XLIV OM, zadanie 4/III)
Dany jest wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są trójkątami. Wierzchołki tego wielościanu kolorujemy trzema kolorami. Udowodnij, że liczba ścian mających wierzchołki wszystkich trzech kolorów jest parzysta.

4. (LI OM, zadanie 4/I)
Każdy punkt okręgu jest pokolorowany jednym z trzech kolorów. Udowodnij, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

5. (LIX OM, zadanie 4/III)
Każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że ze zbioru wszystkich pomalowanych punktów można wybrać nieskończony podzbiór, który ma środek symetrii i którego wszystkie punkty mają ten sam kolor.

6. (IV OMG, zadanie 6/I)
Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na niebiesko lub czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego wierzchołki są tego samego koloru.

7. (VIII OMG, zadanie 4/II)
Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

8. (IX OMG, zadanie 4/II)
Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

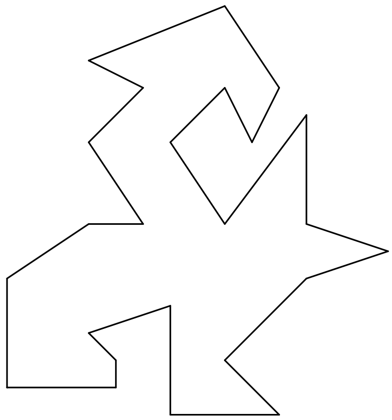
9. (X OMG, zadanie 2/III)
Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na pewien kolor. Okazało się, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b większych od 1 liczby $a + b$ i ab są tego samego koloru. Wykaż, że wszystkie liczby większe od 4 zostały pomalowane tym samym kolorem.

10. (XIII OMJ, zadanie 5/II)
Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

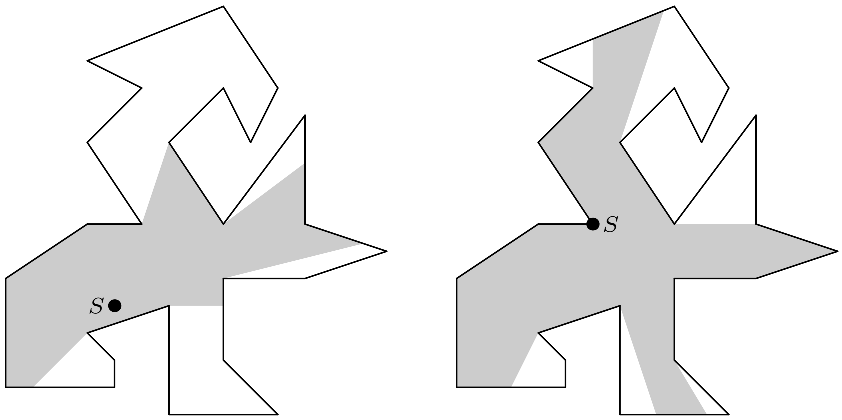
2. Galeria sztuki

Metoda kolorowania może być przydatna w rozwiązywaniu problemów, w których sformułowaniu kolorowanie nie występuje. Pokażę teraz jeden taki problem.

Dany jest dowolny wielokąt na płaszczyźnie, niekoniecznie wypukły. Tak naprawdę zadanie jest interesujące dla wielokątów, które nie są wypukłe. Ten wielokąt jest to tytułowa galeria sztuki. Na poniższym rysunku widzimy przykład takiego wielokąta:



Galeria powinna być pilnowana przez strażników. Strażnik umieszczony w dowolnym punkcie galerii (w tym także na obwodzie) widzi na ogół tylko część galerii. Reszta galerii jest zasłonięta przez ściany. Na poniższych rysunkach szarym kolorem jest zaznaczona część galerii widoczna przez strażnika umieszczonego w punkcie S. Na rysunku lewym strażnik jest umieszczony wewnątrz galerii, na rysunku prawym w wierzchołku wielokąta.



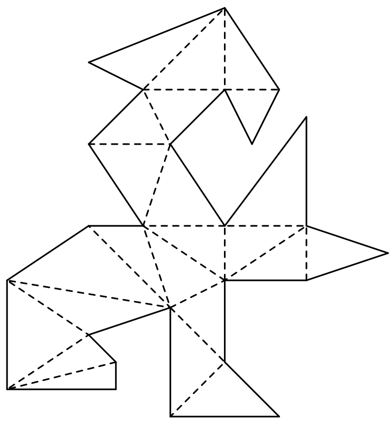
Sformułujmy teraz nasze zadanie.

Zadanie. Dana jest galeria sztuki, będąca wielokątem (niekoniecznie wypukłym) mającym n boków. Jaką najmniejszą liczbę strażników należy rozmieścić w galerii, by widzieli oni całą galerię?

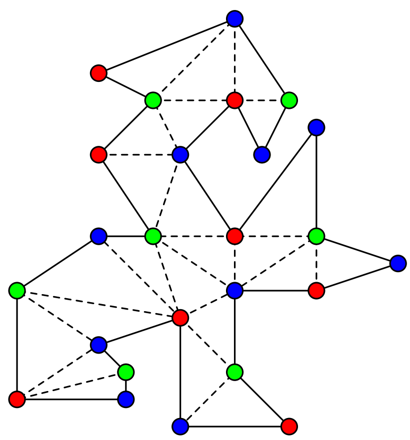
Rozwiązanie powyższego zadania jest zawarte w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. Dla dowolnego wielokąta mającego n boków wystarczy $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ strażników. Ponadto istnieją wielokąty mające n boków, w których konieczne jest rozmieszczenie $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ strażników.

Naszkicuję teraz dowód twierdzenia 2.1. Pierwszy krok dowodu polega na podzieleniu wielokąta przekątnymi na trójkąty. Pominę tu szczegóły dowodu tego, że taki podział dowolnego wielokąta jest możliwy. Jest oczywiste, że podział wielokąta na trójkąty jest możliwy dla wielokąta wypukłego: prowadzimy wszystkie możliwe przekątne wychodzące z jednego wierzchołka. Jednak w przypadku wielokąta niewypukłego nie jest to tak oczywiste. Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę boków wielokąta. Najpierw znajdujemy przekątną wielokąta całkowicie zawartą w tym wielokącie (to jest największa trudność dowodu). Następnie zauważamy, że ta przekątna dzieli wielokąt na dwa mniejsze wielokąty, które z założenia indukcyjnego można podzielić na trójkąty. Te dwa podziały łącznie dają podział całego wielokąta. Popatrzmy teraz na podział naszego przykładowego wielokąta (nie jest to jedyny taki podział):



W drugim kroku kolorujemy wierzchołki wielokąta trzema kolorami w taki sposób, by każdy trójkąt, na które podzieliliśmy wielokąt, miał wierzchołki trzech kolorów. Znów pominę szczegóły dowodu tego, że takie kolorowanie istnieje. Ten dowód także prowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę boków wielokąta. Na poniższym rysunku widzimy takie przykładowe kolorowanie:

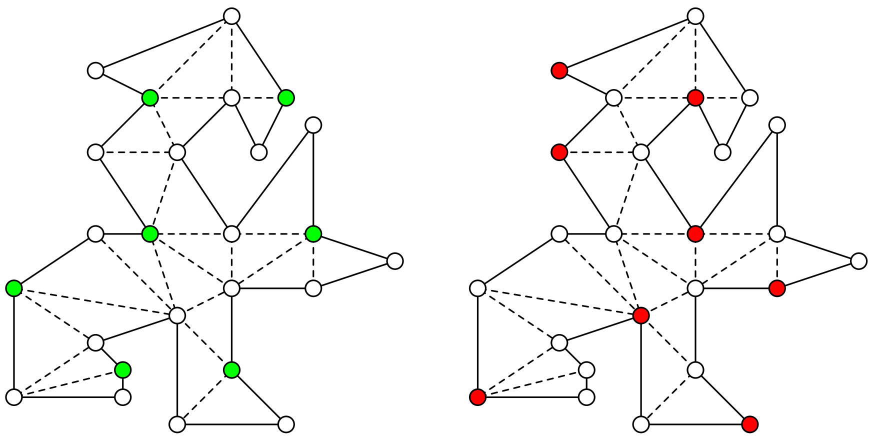


Wreszcie w trzecim kroku dowodu wybieramy ten kolor, który występuje najmniejszą liczbę razy. Oczywiście liczba wierzchołków tego koloru jest niewiększa od $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Umieszczamy strażników w wierzchołkach tego koloru i oczywiście tak rozmieszczeni strażnicy widzą całą galerię. Mianowicie każdy trójkąt ma jeden wierzchołek wybranego koloru oraz cały taki trójkąt jest widoczny z tego wierzchołka. To kończy szkic dowodu pierwszej części twierdzenia 2.1.

W naszym przykładzie mamy $n = 25$ oraz 7 wierzchołków zielonych. Mamy zatem

$$7 \leq 8 = \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor .$$

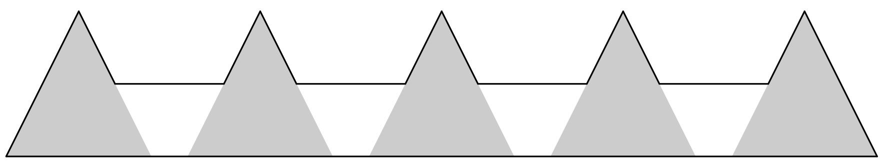
Strażnicy umieszczeni w zielonych wierzchołkach widzą całą galerię (zob. rysunek poniżej po lewej stronie). Zauważmy także, że w naszej przykładowej galerii mamy 8 wierzchołków czerwonych. Strażnicy umieszczeni w wierzchołkach czerwonych także widzą całą galerię (zob. rysunek po prawej stronie).



Oczywiście strażnicy umieszczeni w wierzchołkach niebieskich także widzą całą galerię, ale jest ich zbyt wielu:

$$10 > 8 = \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor .$$

Popatrzmy teraz na przykład wielokąta, w którym umieszczenie $\frac{n}{3}$ strażników jest konieczne. Poniższy wielokąt ma 15 boków i konieczne jest umieszczenie w nim 5 strażników (każdy z nich musi obserwować jeden z pięciu obszarów zaznaczonych na rysunku kolorem szarym).

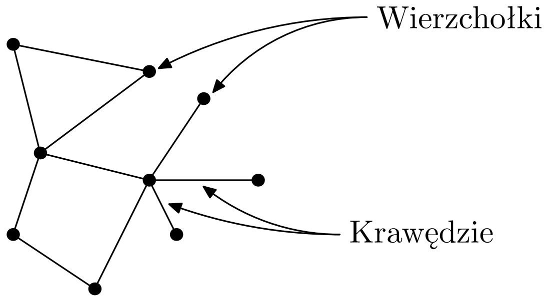


Skonstruowanie analogicznego przykładu dla dowolnej liczby n podzielnej przez 3 jest oczywiste. To kończy szkic dowodu drugiej części twierdzenia 2.1.

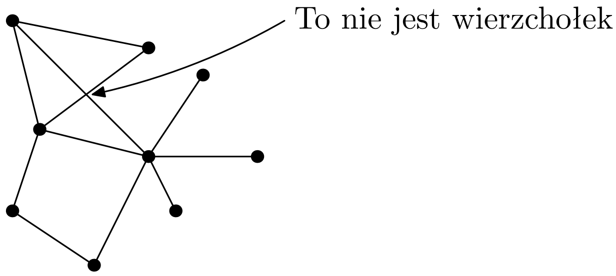
3. Kolorowanie grafów

Rozwiązania zadań 1 i 2 zostały sprowadzone do pytania o to, czy pewien skończony podzbiór płaszczyzny można pokolorować za pomocą trzech lub czterech kolorów. Rysunki tych zbiorów zostały sporządzone tak, by uwidocznić pewne odcinki mające długości istotne w zadaniu. Punkty płaszczyzny połączone tymi odcinkami miały być pokolorowane różnymi kolorami. Takie rysunki nazywamy **grafami**.

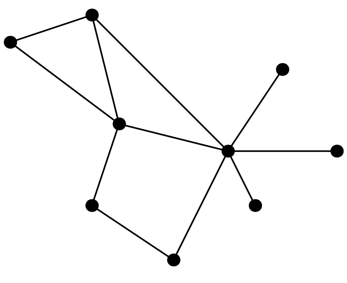
Nie będę w tym wykładzie podawał ścisłej definicji grafu. Zadowolimy się tylko graficzną ilustracją. Graf składa się z **wierzchołków** — na rysunku są to pogrubione punkty na płaszczyźnie — oraz z **krawędzi** — na rysunku są to odcinki łączące niektóre (lub wszystkie) wierzchołki.



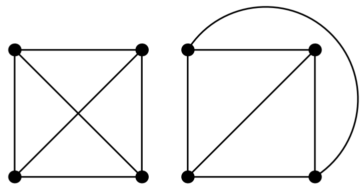
Często krawędzie będą rysowane jako linie krzywe łączące wierzchołki. Te linie czasem się przecinają na rysunku. Takie punkty przecięcia nie są uznawane za wierzchołki. Możemy sobie wyobrazić, że jedna krawędź przebiega nad drugą — tak jak w bezkolizyjnych dwupoziomowych skrzyżowaniach dróg.



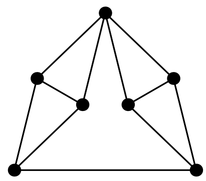
Jeśli żadne krawędzie grafu na rysunku się nie przecinają, to mówimy, że został narysowany **graf płaski**. Oto przykład takiego grafu:



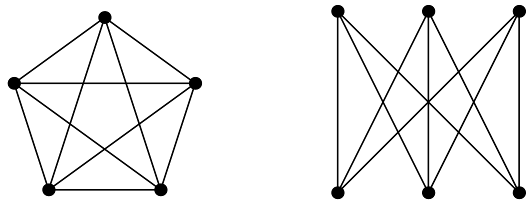
Graf można na ogół narysować na wiele sposobów. Niektóre z nich są rysunkami grafów płaskich, na innych krawędzie mogą się przecinać. Popatrzmy na następne trzy rysunki:



Przedstawiają one ten sam graf, narysowany za każdym razem inaczej. Na pierwszym rysunku widzimy kwadrat z obydwiema przekątnymi. Te przekątne przecinają się. Na drugim rysunku jedna z tych przekątnych została „wyprowadzona” poza kwadrat; jest jednakże linią krzywą. Na trzecim rysunku wierzchołki zostały przesunięte tak, że krawędzie się wyprostowały i teraz są odcinkami. Graf, który można narysować jako graf płaski, nazywamy **grafem planarnym**. Oto inny przykład grafu planarnego. Jest to graf, który widzieliśmy w rozwiązaniu zadania 1. W tym rozwiązaniu był on narysowany tak, że wszystkie krawędzie miały długość równą 1 i wtedy niektóre krawędzie przecinały się. Na poniższym rysunku jedna krawędź została wydłużona, dwie zostały skrócone i został narysowany graf płaski.

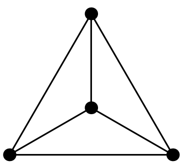


Nie każdy graf jest planarny. Oto dwa przykłady grafów nieplanarnych.

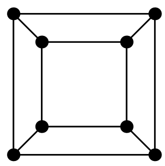


W dalszym ciągu wykładu naszkicuję dowód nieplanarności tych grafów.

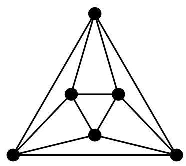
Terminologia teorii grafów pochodzi z geometrii. Przykładem grafu jest dowolny wielościan. Jego wierzchołki są wierzchołkami grafu, krawędzie wielościanu zaś są krawędziami grafu. Można wykazać, że każdy wielościan wypukły jest grafem planarnym. Oto grafy płaskie powstałe z pięciu wielościanów foremnych (czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu):



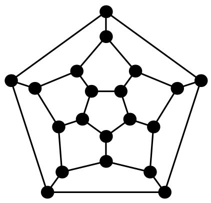
G_4



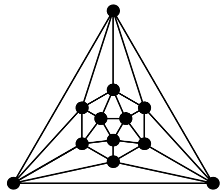
G_6



G_8



G_{12}



G_{20}

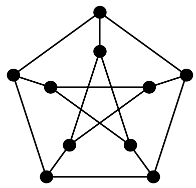
W tym wykładzie interesuje nas kolorowanie grafów. Każdy wierzchołek grafu kolorujemy jednym z k kolorów w taki sposób, by każda krawędź miała końce różnych kolorów. Kolorowanie wierzchołków grafu za pomocą k kolorów, spełniające ten warunek, nazywamy k-kolorowaniem. Zazwyczaj kolory numerujemy liczbami naturalnymi od 1 do k; kolorowanie jest więc funkcją ze zbioru $V(G)$ wierzchołków grafu G w zbiór liczb naturalnych od 1 do k:

$$c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}.$$

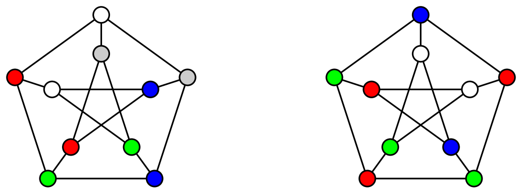
Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę kolorów, którymi można pokolorować graf przy zachowaniu powyższego warunku (tzn. tak, że każda krawędź ma końce różnych kolorów). Inaczej mówiąc, jest to najmniejsza liczba naturalna k, dla której istnieje k-kolorowanie grafu G.

Oznaczenie: Symbolem $\chi(G)$ oznaczamy liczbę chromatyczną grafu G.

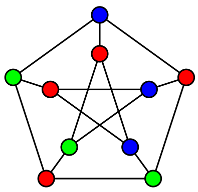
Popatrzmy na przykładowe kolorowania grafu. Na poniższym rysunku widzimy tzw. graf Petersena:



Ten graf możemy łatwo pokolorować pięcioma, a także czterema kolorami:



Można go także pokolorować trzema kolorami:



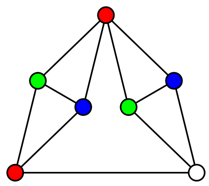
Ćwiczenie 3.1. Grafu Petersena nie można pokolorować dwoma kolorami.

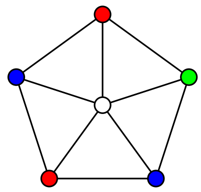
Można także łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. Jeśli graf zawiera cykl długości nieparzystej, to tego grafu nie można pokolorować dwoma kolorami.

Wniosek 3.3: Liczba chromatyczna grafu Petersena jest równa 3.

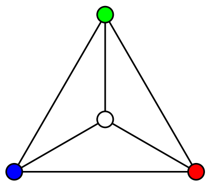
Popatrzmy na dwa inne przykłady kolorowań grafów:



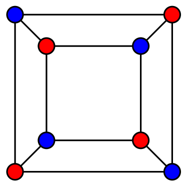


Te dwa grafy mają liczbę chromatyczną równą 4.

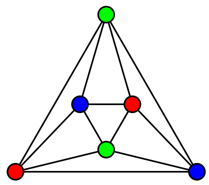
Popatrzmy jeszcze na kolorowania grafów wielościanów foremnych. W każdym przypadku graf został pokolorowany najmniejszą możliwą liczbą kolorów.



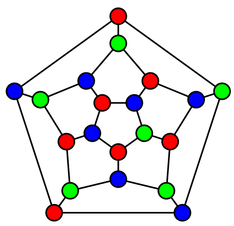
G_4



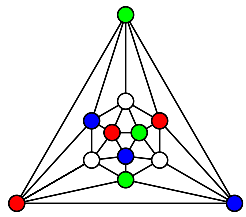
G_6



G_8



G_{12}



G_{20}

Powstaje następujący problem: jak obliczyć liczbę chromatyczną danego grafu skończonego? Pewną informację o liczbie chromatycznej grafu podaje następujące twierdzenie udowodnione przez Brooksa. Potrzebna będzie jeszcze jedna definicja. **Stopniem** wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi schodzących się w tym wierzchołku (czyli inaczej, liczbę wierzchołków sąsiadujących z danym wierzchołkiem).

Twierdzenie 3.4. (Brooks, 1941) Niech Δ będzie maksymalnym stopniem wierzchołka grafu G. Wówczas

$$\chi(G) \leq \Delta + 1,$$

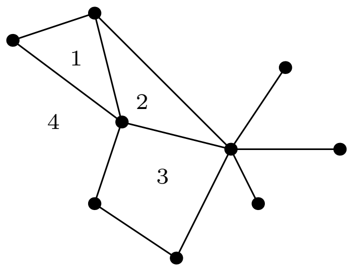
przy czym równość $\chi(G) = \Delta + 1$ ma miejsce jedynie w dwóch przypadkach:

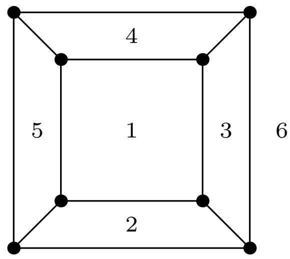
- graf G jest grafem pełnym $K_{\Delta+1}$ (tzn. graf G ma $\Delta + 1$ wierzchołków i każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią),
- graf G jest cyklem długości nieparzystej (wówczas $\Delta = 2$ i $\chi(G) = 3$).

Można łatwo stwierdzić, czy $\chi(G) = 2$: wystarczy sprawdzić, czy graf ma cykl długości nieparzystej. Problem, czy graf jest 3-kolorowalny, jest znacznie poważniejszy. Pokazano, że jest on problemem NP-zupełnym. Problem, czy istnieje efektywny algorytm rozstrzygający, czy dany graf jest 3-kolorowalny jest jednym z tzw. problemów milenijnych i dotychczas jest nierozwiązany (za rozwiązanie jest nagroda 10^6 dolarów).

4. Kolorowanie grafów płaskich i map

Graf płaski dzieli płaszczyznę na obszary — nazywamy je ścianami grafu płaskiego. Oto dwa przykłady grafów płaskich z ponumerowanymi ścianami:





Należy zwrócić uwagę na to, że jedną ze ścian jest obszar nieograniczony.

Jednym z ważniejszych twierdzeń dotyczących grafów płaskich jest twierdzenie Eulera, które przytoczę tutaj bez dowodu.

Twierdzenie 4.1. Jeśli G jest grafem płaskim, to:

$$w - k + s = 2,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} w &= \text{liczba wierzchołków}, \\ k &= \text{liczba krawędzi}, \\ s &= \text{liczba ścian}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Eulera wynikają trzy wnioski, z których w dalszym ciągu skorzystamy. Oto pierwsze dwa:

Wniosek 4.2. Jeśli G jest grafem planarnym, to

$$k \leq 3w - 6.$$

Dowód. Zauważmy na początku, że każda ściana danego grafu płaskiego G jest ograniczona co najmniej trzema krawędziami. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_s$ będą wszystkimi ścianami grafu G. Przypuśćmy następnie, że ściana A_i ma m_i krawędzi. Wówczas $m_i \geq 3$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$. Oczywiście mamy równość

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_s = 2k.$$

Wynika ona stąd, że zliczając krawędzie wokół każdej ściany policzymy każdą krawędź dwukrotnie. Ponieważ $m_i \geq 3$, więc

$$2k \geq 3s.$$

Ze wzoru Eulera wynika teraz, że

$$2k \geq 3 \cdot (k + 2 - w),$$

czyli

$$k \leq 3w - 6.$$

To kończy dowód.

Wniosek 4.3. Jeśli G jest grafem planarnym bez cykli długości 3, to

$$k \leq 2w - 4.$$

Dowód. Postępujemy tak samo jak w dowodzie poprzedniego wniosku. Zauważamy jednak tym razem, że każda ściana jest ograniczona przez co najmniej trzy krawędzie, gdyż w grafie G nie ma cykli długości 3. Mamy więc tym razem nierówności $m_i \geq 4$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, skąd wynika, że $2k \geq 4s$, czyli $k \geq 2s$. Stąd wynika nierówność

$$k \geq 2 \cdot (k + 2 - w),$$

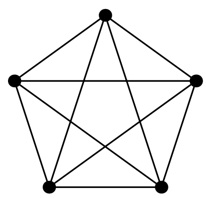
czyli

$$k \leq 2w - 4.$$

To kończy dowód.

Z udowodnionych dwóch wniosków wynikają dwa twierdzenia dotyczące nieplanarności grafów.

Twierdzenie 4.4. Następujący graf (oznaczany symbolem K_5) jest nieplanarny:



Dowód. Ten graf ma 5 wierzchołków i 10 krawędzi. Zatem mamy:

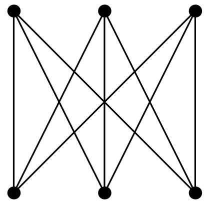
$$w = 5 \quad \text{oraz} \quad k = 10.$$

Gdyby ten graf był planarny, to mielibyśmy nierówność

$$10 = k \leq 3w - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że graf K_5 jest nieplanarny.

Twierdzenie 4.5. Następujący graf (oznaczany symbolem $K_{3,3}$) jest nieplanarny:



Dowód. Można łatwo zauważyć, że ten graf nie ma cykli długości nieparzystej; w szczególności nie ma cykli długości 3. Ponadto ma 6 wierzchołków i 9 krawędzi. Mamy zatem:

$$w = 6 \quad \text{oraz} \quad k = 9.$$

Gdyby ten graf był planarny, to mielibyśmy nierówność

$$9 = k \leq 2w - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że graf $K_{3,3}$ jest nieplanarny.

Grafy nieplanarne pokazane w twierdzeniach 4.4 i 4.5 są w pewnym sensie wzorcami nieplanarności. Twierdzenie udowodnione przez Kuratowskiego mówi, że każdy graf nieplanarny zawiera w pewnym sensie jeden z tych dwóch grafów.

Trzeci wniosek z twierdzenia Eulera jest następujący:

Wniosek 4.6. W każdym grafie planarnym istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

Dowód. Załóżmy, że dany graf G został narysowany jako graf płaski. Przypuśćmy, że każdy wierzchołek grafu G ma stopień równy co najmniej 6. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_w$ będą wszystkimi wierzchołkami grafu G i niech $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_w)$ będą stopniami tych wierzchołków. Wówczas z przyjętego założenia wynika, że $d(v_i) \geq 6$ dla $i = 1, 2, \ldots, w$. Następująca równość jest oczywista:

$$2k = d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_w).$$

Wynika ona stąd, że zliczając krwędzie wychodzące z każdego wierzchołka, policzymy każdą krawędź dwukrotnie. Mamy zatem nierówność

$$2k \geq 6w,$$

czyli $k \geq 3w$. Z drugiej strony, z wniosku 4.2 wynika, że $k \leq 3w - 6$. Łącznie mamy zatem

$$3w \leq k \leq 3w - 6,$$

co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Z wniosku 4.6 łatwo wynika pierwsza część następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.7. Jeśli G jest grafem płaskim, to

- $\chi(G) \leq 6$.
- $\chi(G) \leq 5$.
- $\chi(G) \leq 4$.

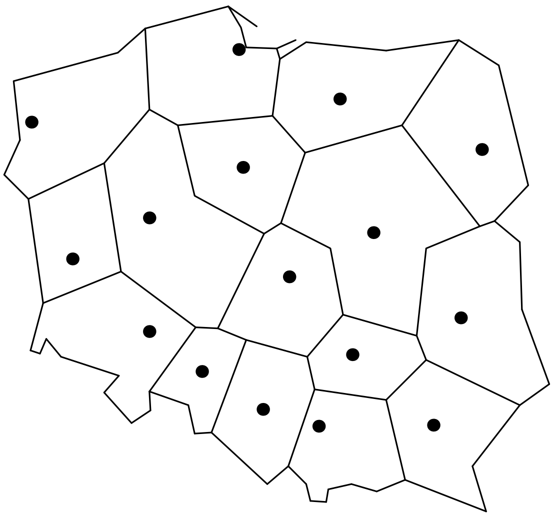
Pierwszej części dowodzi się przez indukcję względem liczby wierzchołków grafu. W kroku indukcyjnym znajdujemy wierzchołek stopnia co najwyżej 5 i usuwamy go z grafu. Pozostałą część grafu kolorujemy sześcioma kolorami (z założenia indukcyjnego). Jednak zauważmy, że sąsiedzi wierzchołka usuniętego zużywają tylko co najwyżej 5 kolorów; usunięty wierzchołek przywracamy i kolorujemy go szóstym kolorem.

Nieco bardziej skomplikowany jest dowód drugiej części. Prowadzimy go także przez indukcję. Problem powstaje wtedy, gdy sąsiedzi wierzchołka usuniętego zużywają wszystkie 5 kolorów. Dowodzi się wtedy, że można tak zamienić kolory w części grafu, by po tej zamianie sąsiedzi wierzchołka usuniętego zużywali co najwyżej 4 kolory. Wtedy można ten usunięty wierzchołek przywrócić i pokolorować go piątym kolorem.

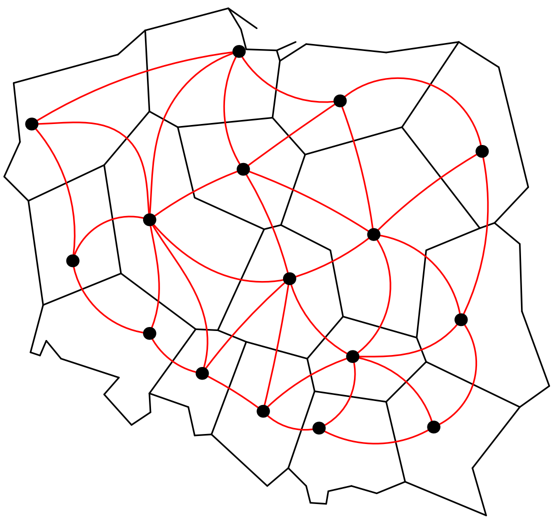
Trzecia część twierdzenia została udowodniona w 1976 roku przez Appela i Hakena za pomocą ogromnych obliczeń komputerowych.

Zagadnieniem blisko związanym z kolorowaniem grafów jest kolorowanie map. Omówię je na przykładzie. Popatrzmy na schematyczną mapę Polski z obowiązującym obecnie podziałem na województwa. Chcemy pokolorować tę mapę w taki sposób, by sąsiadujące województwa były pokolorowane różnymi kolorami. Jedna kwestia wymaga wyjaśnienia: co rozumiemy przez województwa „sąsiadujące". Otóż dwa województwa sąsiadują ze sobą, jeśli mają wspólną granicę, która jest linią niezredukowaną do punktu.

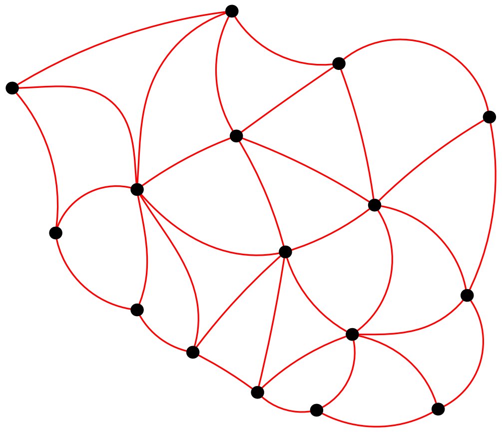
W każdym województwie zostało zaznaczone jedno miasto:



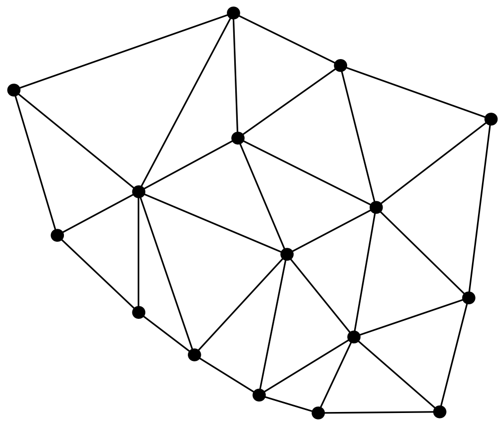
Łączymy miasta w sąsiadujących województwach liniami przechodzącymi przez wspólną granicę:



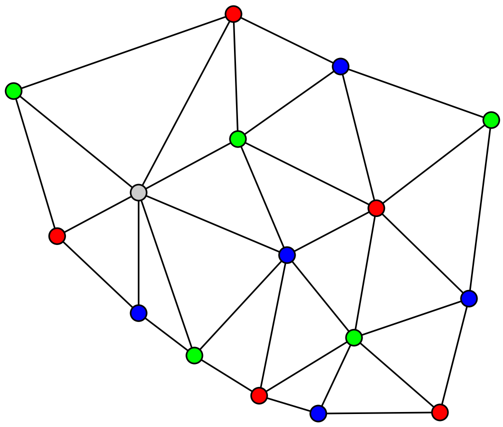
Następnie usuwamy mapę. Otrzymaliśmy graf, którego wierzchołki odpowiadają województwom, a krawędzie łączą województwa mające wspólną granicę. Można zauważyć, że graf otrzymany w ten sposób z płaskiej mapy jest grafem płaskim.



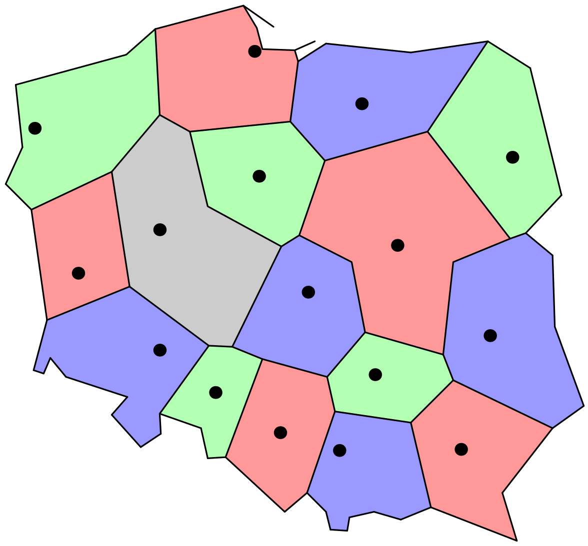
Oto ten sam graf, w którym krawędzie są odcinkami:



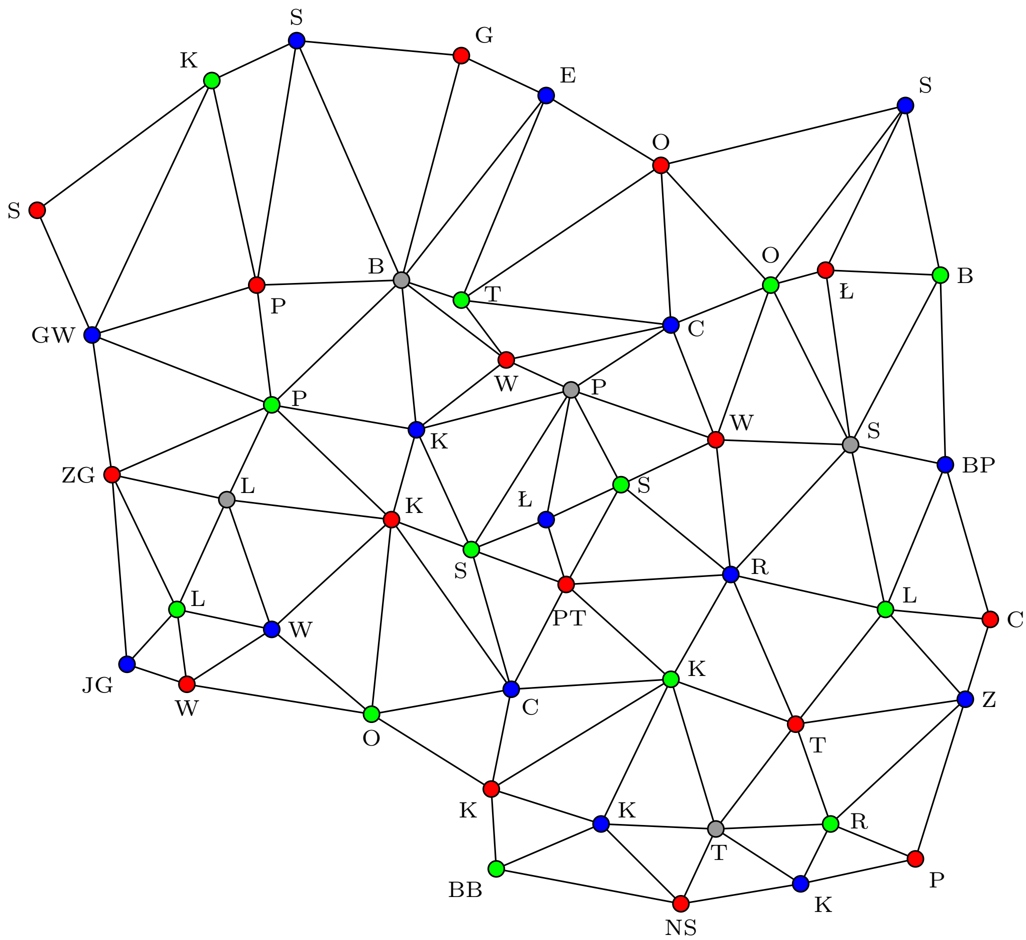
Ten graf można pokolorować czterema kolorami. Przykładowe takie kolorowanie grafu województw czterema kolorami widzimy na następnym rysunku:



Tymi czterema kolorami możemy teraz pokolorować oryginalną mapę:



Popatrzmy na jeszcze jeden przykład. Oto graf utworzony na tej samej zasadzie z podziału Polski na województwa, obowiązującego do 31 grudnia 1998 roku, pokolorowany czterema kolorami.



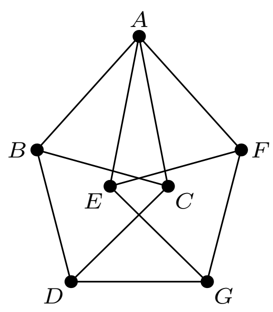
5. Kolorowanie płaszczyzny

Niech teraz będzie dana płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z ustaloną jednostką odległości. Potraktujmy tę płaszczyznę jako graf nieskończony, którego wierzchołkami są punkty płaszczyzny, a krawędzie łączą punkty odległe dokładnie o 1. Liczbą chromatyczną płaszczyzny nazywamy liczbę chromatyczną tego grafu. Zatem liczba chromatyczna płaszczyzny $\chi(\mathbb{R}^2)$ jest to najmniejsza liczba kolorów, którymi możemy pokolorować punkty płaszczyzny w taki sposób, by żadne dwa punkty odległe dokładnie o 1 nie były tego samego koloru. Inaczej mówiąc, jest to najmniejsza liczba kolorów, którymi możemy pokolorować punkty płaszczyzny w taki sposób, by każdy odcinek długości 1 miał końce różnych kolorów.

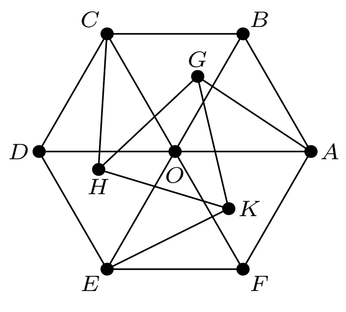
Co wiemy o liczbie chromatycznej płaszczyzny? Mamy następujące trzy nietrudne twierdzenia. Zaczniemy od najłatwiejszego.

Twierdzenie 5.1. $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$.

Dowód. Dowód tego twierdzenia został przeprowadzony w rozwiązaniu zadania 1. Sprowadza się on do tego, że następujący graf (którego krawędzie mają na płaszczyźnie długość równą 1) ma liczbę chromatyczną równą 4.



Inny dowód otrzymamy rozpatrując następujący graf (którego krawędzie także mają na płaszczyźnie długość równą 1):



Twierdzenie 5.2. $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 9$.

Dowód. Narysujmy na płaszczyźnie kratki, których bok jest równy $a = 0{,}6$. Pokolorujmy te kratki dziewięcioma kolorami tak jak na rysunku:

1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9

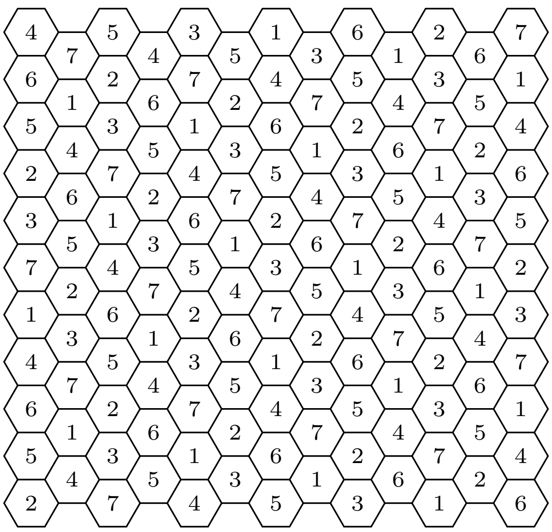
Wówczas odległość punktów w dwóch różnych kratkach tego samego koloru jest równa co najmniej 1,2. Wiemy następnie, że długość przekątnej d kwadratu spełnia nierówność $d = a\sqrt{2} \leq 1{,}5 \cdot a$. Zatem przekątna d kratki spełnia nierówność

$$d \leq 1{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}9 < 1.$$

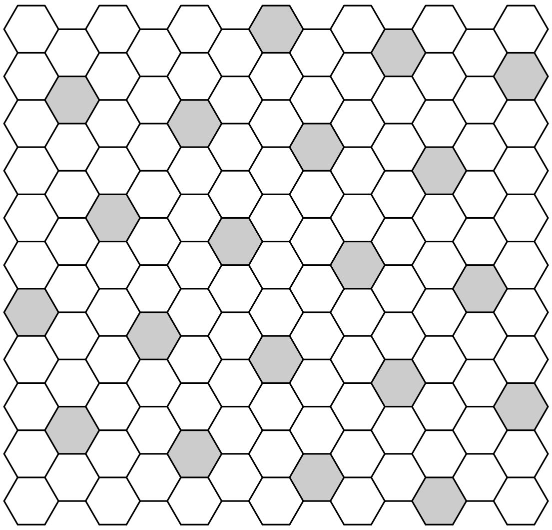
Zatem dwa punkty znajdujące się w tej samej kratce są odległe o mniej niż 1. Łącznie stąd wynika, że na tak pokolorowanej płaszczyźnie każdy odcinek długości 1 ma końce różnych kolorów,

Twierdzenie 5.3. $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

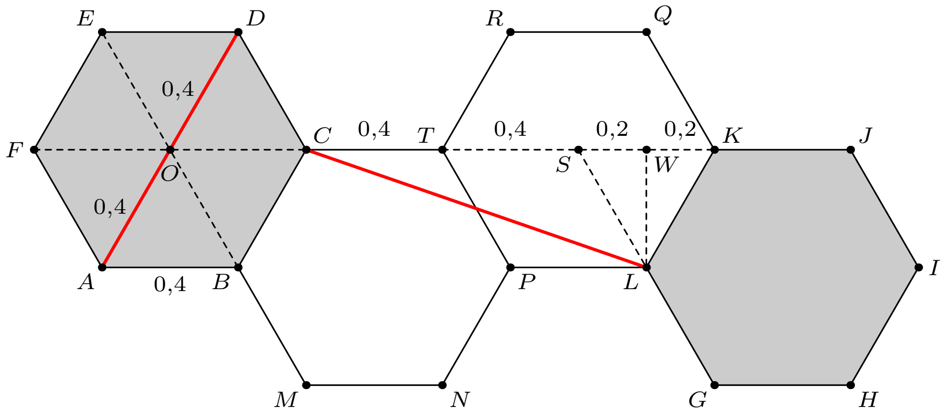
Dowód. Podzielmy płaszczyznę na sześciokąty foremne o boku długości $a = 0{,}4$ i pokolorujmy te sześciokąty tak jak na rysunku:



Sześciokąty tego samego koloru są położone tak jak na rysunku:



Przypuśćmy następnie, że dany jest odcinek mający oba końce tego samego koloru. Te końce mogą leżeć w tym samym sześciokącie lub w dwóch różnych sześciokątach tego samego koloru.



Oczywiście najdłuższy odcinek mający końce w tym samym sześciokącie ma długość co najwyżej taką jak odcinek $AD = 2a = 0{,}8$. Natomiast najkrótszy odcinek o końcach w dwóch różnych sześciokątach tego samego koloru ma długość co najmniej taką jak odcinek CL:

$$CL > CW = CT + TS + TW = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1.$$

Długość CL możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$CL^2 = CW^2 + LW^2 = \left(\frac{5a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{28a^2}{4} = 7a^2.$$

Zatem

$$CL = a\sqrt{7} \approx 2{,}645751 \cdot a.$$

Po podstawieniu $a = 0{,}4$, otrzymujemy $CL \approx 1{,}0583$.

Powyższe trzy twierdzenia dają następujący wniosek:

Wniosek 5.4. Mają miejsce następujące nierówności:

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

W kwietniu 2018 r. Aubrey D. N. J. de Grey udowodnił, że $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$. Mianowicie wskazał on skończony graf G (mający 1581 wierzchołków i 7877 krawędzi) o następujących własnościach:

- każdy wierzchołek grafu G jest punktem płaszczyzny,
- dwa punkty grafu G są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy ich odległość na płaszczyźnie jest równa 1,
- graf G nie może być pokolorowany za pomocą czterech kolorów.

Dalsze badania pokazały, że liczbę wierzchołków odpowiedniego grafu można znacznie zmniejszyć. Znany jest odpowiedni graf mający 553 wierzchołki i 2722 krawędzie.

Wyznaczenie dokładnej wartości $\chi(\mathbb{R}^2)$ jest nadal otwartym problemem.

6. Kolorowanie liczb całkowitych

Przypomnijmy zadanie 10.

10. (XIII OMJ, zadanie 5/II)
Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

To zadanie jest szczególnym przypadkiem problemu znacznie ogólniejszego. Niech D będzie dowolnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych różnych od zera:

$$D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Rozpatrujemy graf nieskończony, którego wierzchołkami są liczby całkowite (lub liczby naturalne). Dwie liczby m i n są połączone krawędzią, jeśli

$$|m-n| \in D.$$

Ten graf oznaczymy symbolem $G(\mathbb{Z}, D)$ (lub odpowiednio $G(\mathbb{N}, D)$). Symbolem $\chi(\mathbb{Z}, D)$ (lub odpowiednio $\chi(\mathbb{N}, D)$) będziemy oznaczać liczbę chromatyczną grafu $G(\mathbb{Z}, D)$ (lub $G(\mathbb{N}, D)$). Zauważmy jednak, że istnieją zbiory D takie, że nie istnieje kolorowanie tych grafów za pomocą skończonej liczby kolorów. Tak jest na przykład, gdy $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wówczas każde dwie liczby całkowite są połączone krawędzią, więc każda liczba musi być innego koloru. W takim przypadku piszemy, że

$$\chi(\mathbb{Z}, D) = \infty \quad \text{(lub odpowiednio: } \chi(\mathbb{N}, D) = \infty).$$

Następne twierdzenie pozwala nam ograniczyć nasze rozważania do grafów $G(\mathbb{N}, D)$, czyli do kolorowania liczb naturalnych.

Twierdzenie 6.1. Dla dowolnego zbioru $D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ma miejsce równość

$$\chi(\mathbb{N}, D) = \chi(\mathbb{Z}, D).$$

Dowód twierdzenia 6.1 pominę w tym wykładzie.

Popatrzmy najpierw na dwa przykłady takich grafów.

Twierdzenie 6.2. Niech D będzie zbiorem potęg liczby 2:

$$D = \{2^n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}.$$

Wówczas mamy równość

$$\chi(\mathbb{N}, D) = 3.$$

Dowód. Oczywiście liczby 1, 2 i 3 muszą mieć różne kolory:

$$|2-1| = |3-2| = 1 = 2^0 \in D \quad \text{oraz} \quad |3-1| = 2 = 2^1 \in D.$$

Stąd wynika, że

$$\chi(\mathbb{N}, D) \geq 3. \tag{6.1}$$

Z drugiej strony, kolorujemy liczby całkowite w następujący sposób:

$$c(n) = n \bmod 3,$$

to znaczy

$$c(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 3 \mid n, \\ 1, & \text{jeśli } 3 \mid n-1, \\ 2, & \text{jeśli } 3 \mid n-2. \end{cases}$$

Wówczas dwie liczby całkowite mają ten sam kolor wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica jest podzielna przez 3. Wtedy jednakże ta różnica nie jest potęgą liczby 2, więc nie należy do zbioru D. Zdefiniowane kolorowanie jest więc 3-kolorowaniem grafu $G(\mathbb{N}, D)$. To dowodzi, że

$$\chi(\mathbb{N}, D) \leq 3. \tag{6.2}$$

Łącząc nierówności (6.1) i (6.2) otrzymujemy dowodzoną równość

$$\chi(\mathbb{N}, D) = 3.$$

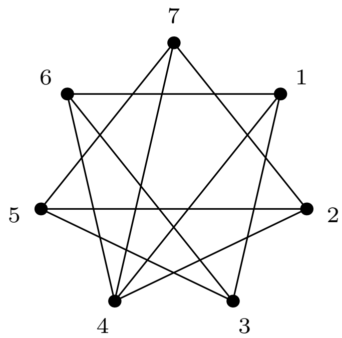
Twierdzenie 6.3. Niech D będzie zbiorem liczb pierwszych:

$$D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}.$$

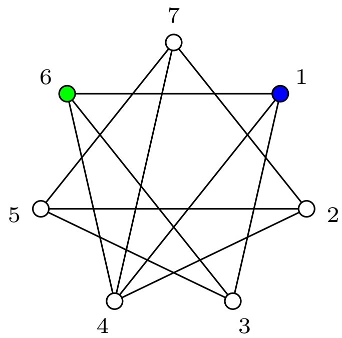
Wówczas

$$\chi(\mathbb{N}, D) = 4.$$

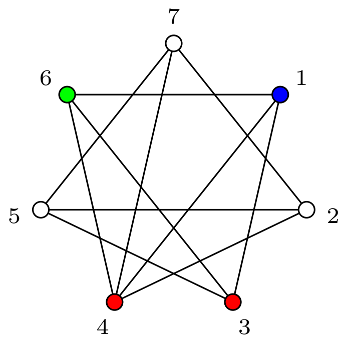
Dowód. Można łatwo zauważyć, że liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 nie mogą być pokolorowane trzema kolorami. Inaczej mówiąc, następujący graf nie jest 3-kolorowalny (tzn. nie istnieje 3-kolorowanie tego grafu):



Przypuśćmy bowiem, że powyższy graf skończony jest 3-kolorowalny. Liczby 1 i 6 mają różne kolory:



Stąd wynika, że liczby 3 i 4 muszą być czerwone.



Teraz widzimy, że żadna z liczb 2, 5 i 7 nie może być czerwona (liczby 2 i 7 sąsiadują z liczbą 4, a liczba 5 z liczbą 3; liczby 3 i 4 są zaś czerwone). Liczby 2, 5, i 7 muszą jednak mieć trzy różne kolory, gdyż każda sąsiaduje z dwiema pozostałymi. To jest niemożliwe. Mamy zatem nierówność

$$\chi(\mathbb{N}, D) \geq 4. \tag{6.3}$$

Z drugiej strony, kolorujemy liczby całkowite w następujący sposób:

$$c(n) = n \bmod 4,$$

to znaczy

$$c(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 4 \mid n, \\ 1, & \text{jeśli } 4 \mid n-1, \\ 2, & \text{jeśli } 4 \mid n-2, \\ 3, & \text{jeśli } 4 \mid n-3. \end{cases}$$

Wówczas dwie liczby całkowite mają ten sam kolor wtedy i tylko wtedy, gdy ich różnica jest podzielna przez 4. Wtedy jednakże ta różnica nie jest liczbą pierwszą, więc nie należy do zbioru D. Zdefiniowane kolorowanie jest więc 4-kolorowaniem grafu $G(\mathbb{N}, D)$. To dowodzi, że

$$\chi(\mathbb{N}, D) \leq 4. \tag{6.4}$$

Łącząc nierówności (6.3) i (6.4) otrzymujemy dowodzoną równość

$$\chi(\mathbb{N}, D) = 4.$$

Interesujące jest badanie liczb chromatycznych dla skończonych zbiorów D. Możemy łatwo udowodnić, że jeśli

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

to

$$\chi(\mathbb{N}, D_1) \leq \chi(\mathbb{N}, D_2).$$

Stąd w szczególności wynika, że jeśli D jest podzbiorem zbioru liczb pierwszych, to $\chi(\mathbb{N}, D) \leq 4$. Interesującym problemem jest znalezienie liczby chromatycznej grafu

$G(\mathbb{N}, D)$ dla dowolnego podzbioru D zbioru liczb pierwszych. Problem ten jest rozwiązany całkowicie tylko dla podzbiorów co najwyżej czteroelementowych.

Powróćmy do zadania 10. Przypomnijmy to zadanie.

10. (XIII OMJ, zadanie 5/II)
Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Pokażę najpierw rozwiązanie „firmowe", pochodzące od Komisji Zadaniowej OMJ. Niech $\mathbb{K}$ będzie zbiorem kwadratów liczb naturalnych różnych od zera:

$$\mathbb{K} = \left\{k^2 :\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = \{1, 4, 9, 14, 25, \ldots\}.$$

Kolorowanie liczb ujemnych w rozwiązaniu tego zadania nie jest konieczne. Wykażemy zatem, że nie istnieje 3-kolorowanie grafu $G(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Będziemy zajmować się kolorowaniami podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Zatem k-kolorowaniem (gdzie $k \geq 2$) dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$ będziemy nazywać funkcję

$$c : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

o następującej własności:

- dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in X$, jeśli $|m - n| \in \mathbb{K}$, to $c(m) \neq c(n)$.

Przypuśćmy zatem, że istnieje 3-kolorowanie zbioru liczb naturalnych. Pokażemy, że przyjęte założenie prowadzi do sprzeczności. Najpierw udowodnimy następujący lemat:

Lemat 6.4. Załóżmy, że funkcja c jest 3-kolorowaniem zbioru $\mathbb{N}$. Niech następnie $m \geq 9$ oraz $n = m + 7$. Wówczas $c(m) = c(n)$.

Dowód. Rozważamy cztery liczby:

$$a = m - 9, \quad m, \quad n \quad \text{oraz} \quad b = n + 9.$$

Wówczas oczywiście

$$0 \leq a < m < n < b.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwie liczby ze zbioru $\{a, m, n, b\}$ mają ten sam kolor. To znaczy, że istnieją dwie różne liczby $x, y \in \{a, m, n, b\}$ takie, że $c(x) \neq c(y)$. Zauważmy następnie, że:

- $m - a = 9 = 3^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(m)$,
- $n - a = (m + 7) - (m - 9) = 16 = 4^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(n)$,
- $b - a = (n + 9) - (m - 9) = (n - m) + 18 = 7 + 18 = 25 = 5^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(b)$,
- $b - m = (n + 9) - m = (n - m) + 9 = 7 + 9 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(m) \neq c(b)$,
- $b - n = 9 = 3^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(n) \neq c(b)$.

Pozostaje ostatnia możliwość: $c(m) = c(n)$. To kończy dowód lematu.

Powróćmy do rozwiązania zadania. Rozważamy następujące liczby: 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51 i 58. Z lematu 6.1 wynika, że

$$c(9) = c(16) = c(23) = c(30) = c(37) = c(44) = c(51) = c(58).$$

To jednak jest niemożliwe, gdyż $58 - 9 = 49 = 7^2 \in \mathbb{K}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

W powyższym rozwiązaniu rozpatrujemy tylko kolorowania skończenie wielu liczb całkowitych. Nietrudno zauważyć, że najmniejszą rozpatrywaną liczbą jest zero, największą jest 65. Zatem tak naprawdę zostało udowodnione następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.5. Dany jest następujący zbiór liczb naturalnych:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 65\}.$$

Niech następnie będzie dana dowolna funkcja $c : X \to \{1, 2, 3\}$. Wówczas istnieją liczby $m, n \in X$ takie, że $|m - n| \in \mathbb{K}$ oraz $c(m) = c(n)$.

Powstaje naturalne pytanie, czy liczbę 65 można zastąpić liczbą mniejszą. W tym wykładzie pokażę odpowiedź na to pytanie. Mianowicie udowodnię następujące twierdzenia:

Twierdzenie 6.6. Dany jest następujący zbiór liczb naturalnych:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 28\}.$$

Niech następnie będzie dana dowolna funkcja $c : X \to \{1, 2, 3\}$. Wówczas istnieją liczby $m, n \in X$ takie, że $|m - n| \in \mathbb{K}$ oraz $c(m) = c(n)$. Inaczej mówiąc, nie istnieje 3-kolorowanie zbioru X.

Twierdzenie 6.7. Dany jest następujący zbiór liczb naturalnych:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 27\}.$$

Wówczas istnieje 3-kolorowanie zbioru X.

W dowodzie twierdzenia 6.6 skorzystamy z lematu analogicznego do lematu 6.4.

Lemat 6.8. Załóżmy, że funkcja c jest 3-kolorowaniem zbioru $X = \{0, 1, 2, \ldots, 28\}$. Niech następnie $9 \leq m \leq 12$ oraz $n = m + 7$. Wówczas $c(m) = c(n)$.

Dowód. Powtarzamy dowód lematu 6.4. Należy zauważyć, że z założenia $9 \leq m \leq 12$ wynika, że liczby a, m, n, b należą do zbioru X.

Dowód twierdzenia 6.6. Przypuśćmy, że funkcja c jest 3-kolorowaniem zbioru

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 28\}.$$

Skorzystamy z lematu 6.8 dla czterech czwórek liczb:

- Niech
$$a = 0, \quad m = 9, \quad n = 16, \quad b = 25.$$
Wówczas $c(9) = c(16)$.
- Niech
$$a = 1, \quad m = 10, \quad n = 17, \quad b = 26.$$
Wówczas $c(10) = c(17)$.
- Niech
$$a = 2, \quad m = 11, \quad n = 18, \quad b = 27.$$
Wówczas $c(11) = c(18)$.
- Niech
$$a = 3, \quad m = 12, \quad n = 19, \quad b = 28.$$
Wówczas $c(12) = c(19)$.

Otrzymaliśmy zatem cztery pary liczb:

$$\{9, 16\}, \quad \{10, 17\}, \quad \{11, 18\} \quad \text{oraz} \quad \{12, 19\}$$

o tej własności, że w każdej parze obie liczby mają ten sam kolor:

$$c(9) = c(16), \quad c(10) = c(17), \quad c(11) = c(18) \quad \text{oraz} \quad c(12) = c(19).$$

Następnie popatrzmy na zbiór czterech liczb: $\{9, 10, 11, 12\}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwie z nich mają ten sam kolor. Mamy teraz sześć przypadków:

- **Przypadek 1.** $c(9) = c(10)$.
Wówczas $10 - 9 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K}$, co jest niemożliwe.
- **Przypadek 2.** $c(9) = c(11)$.
Wówczas wszystkie liczby ze zbioru $\{9, 11, 16, 18\}$ mają ten sam kolor oraz
$$18 - 9 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K},$$
co jest niemożliwe.
- **Przypadek 3.** $c(9) = c(12)$.
Wówczas wszystkie liczby ze zbioru $\{9, 12, 16, 19\}$ mają ten sam kolor oraz
$$16 - 12 = 4 = 2^2 \in \mathbb{K},$$
co jest niemożliwe.

- **Przypadek 4.** $c(10) = c(11)$.
  Wówczas $11 - 10 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K}$, co jest niemożliwe.
- **Przypadek 5.** $c(10) = c(12)$.
  Wówczas wszystkie liczby ze zbioru $\{10, 12, 17, 19\}$ mają ten sam kolor oraz

  $$19 - 10 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K},$$

  co jest niemożliwe.
- **Przypadek 6.** $c(11) = c(12)$.
  Wówczas $12 - 11 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K}$, co jest niemożliwe.

Sprzeczność otrzymana we wszystkich przypadkach dowodzi, że założenie o istnieniu 3-kolorowania jest niemożliwe. To kończy dowód twierdzenia 6.6.

Dowód Twierdzenia 6.7. Wystarczy wskazać odpowiednie 3-kolorowanie zbioru

$$X = \{0, 1, 2, \dots 27\}.$$

Wskażemy zatem funkcje

$$c: X \to \{1, 2, 3\}$$

będące 3-kolorowaniami zbioru X. Przyjmijmy, że $c(0) = 1$ oraz $c(1) = 2$. Okazuje się, że wówczas istnieje dokładnie siedem 3-kolorowań zbioru

$$X = \{0, 1, 2, \dots, 27\}.$$

Oto one:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	2	3	1	2	1	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	2	3	1	2	1	2	3	1	2	1	2	3	1	3	1	2	3	1	3	1	2	3	2	3	1

To kończy dowód twierdzenia 6.7.

Istnieje znacznie krótszy dowód twierdzenia 6.6. Weźmy bowiem następujące cztery liczby:

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ b &= 153^2 = 23409, \\ c &= 185^2 = 34225, \\ d &= 697^2 = 485809. \end{aligned}$$

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}
b - a &= 153^2 - 0 = 153^2 \in \mathbb{K},\\
c - a &= 185^2 - 0 = 185^2 \in \mathbb{K},\\
d - a &= 697^2 - 0 = 697^2 \in \mathbb{K},\\
c - b &= 185^2 - 153^2 = 34225 - 23409 = 10816 = 104^2 \in \mathbb{K},\\
d - b &= 697^2 - 153^2 = 485809 - 23409 = 462400 = 680^2 \in \mathbb{K},\\
d - c &= 697^2 - 185^2 = 485809 - 34225 = 451584 = 672^2 \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Zatem liczby a, b, c i d muszą mieć różne kolory. To kończy dowód twierdzenia 6.6.
Można udowodnić więcej. Okazuje się, że

$$\chi(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \geq 5.$$

Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.9. Nie istnieje 4-kolorowanie zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

W dowodzie tego twierdzenia skorzystamy z następującego lematu.

Lemat 6.10. Załóżmy, że funkcja

$$c : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

jest 4-kolorowaniem zbioru $\mathbb{N}$. Niech $m \geq 270400$ oraz niech $n = m + 44321$. Wówczas $c(m) = c(n)$.

Dowód. Rozważamy pięć liczb:

$$a = m - 270400, \quad b = m - 200704, \quad m, \quad n \quad \text{oraz} \quad d = n + 906304.$$

Wówczas oczywiście

$$a < b < m < n < d.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwie liczby należące do zbioru $\{a, b, m, n, d\}$ mają ten sam kolor. Zauważmy następnie, że:

- $b - a = (m - 200704) - (m - 270400) = 270400 - 200704 = 69696 = 264^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(b)$,
- $m - a = m - (m - 270400) = 270400 = 520^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(m)$,
- $n - a = (m + 44321) - (m - 270400) = 270400 + 44321 = 314721 = 561^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(n)$,
- $d-a = (n+906304)-(m-270400) = 44321+906304+270400 = 1221025 = 1105^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(a) \neq c(d)$,
- $m - b = m - (m - 200704) = 200704 = 448^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(b) \neq c(m)$,
- $n - b = (m + 44321) - (m - 200704) = 44321 + 200704 = 245025 = 495^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(b) \neq c(n)$,

- $d-b = (n+906304)-(m-200704) = 44321+906304+200704 = 1151329 = 1073^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(b) \neq c(d)$,
- $d-m = (n+906304)-m = (n-m)+906304 = 44321+906304 = 950625 = 975^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(m) \neq c(d)$,
- $d - n = 906304 = 952^2 \in \mathbb{K}$, więc $c(n) \neq c(d)$.

Pozostaje ostatnia możliwość: $\chi(m) = \chi(n)$. To kończy dowód lematu.

Dowód twierdzenia 6.9. Najpierw zastosujmy lemat 6.10 do liczb

$$m = 270400 \quad \text{oraz} \quad n = m + 44321 = 314721.$$

Mamy wówczas $\chi(m) = \chi(n)$. Następnie definiujemy ciąg liczb

$$\begin{cases} a_0 = m = 270400, \\ a_{n+1} = a_n + 44321. \end{cases}$$

Wówczas oczywiście $a_1 = n$. Zatem $\chi(a_0) = \chi(a_1)$. Nietrudno zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej i ma miejsce równość

$$a_i = a_0 + i \cdot 44321 = m + i \cdot 44321.$$

Następnie, korzystając wielokrotnie z lematu 6.10 otrzymujemy ciąg równości:

$$\chi(a_0) = \chi(a_1) = \chi(a_2) = \ldots = \chi(a_{44321}).$$

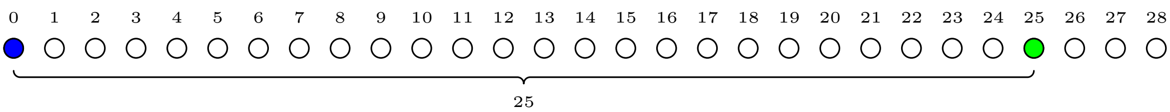
Ale

$$a_{44321} - a_0 = (a_0 + 44321 \cdot 44321) - a_0 = 44321^2 \in \mathbb{K},$$

co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 6.6 można także udowodnić w sposób bezpośredni, analizując możliwe kolorowania liczb od 0 do 28. Pokażę teraz taki dowód.

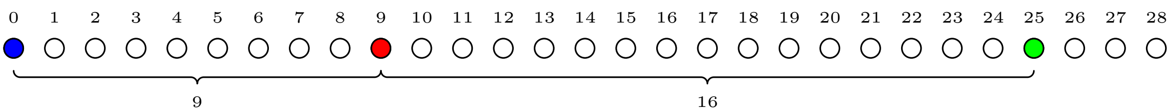
Dowód twierdzenia 6.6. Liczby od 0 do 28 kolorujemy trzema kolorami: czerwonym, niebieskim i zielonym. Zaczynamy od tego, że liczby 0 i 25 muszą mieć różne kolory. Niech na przykład 0 ma kolor niebieski, a 25 ma kolor zielony.



Następnie mamy równości

$$9 - 0 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 25 - 9 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K}.$$

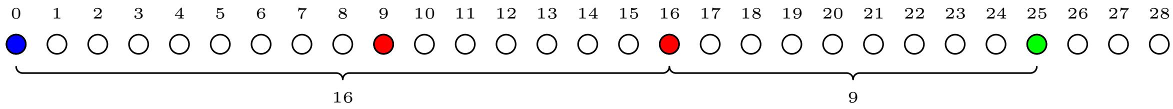
Stąd wynika, że liczba 9 nie może być niebieska i nie może być zielona, zatem musi mieć kolor czerwony.



Następnie zauważmy, że

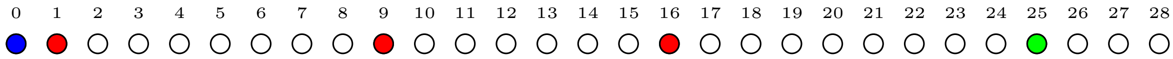
$$16-0=16=4^2\in\mathbb{K}\quad\text{oraz}\quad 25-16=9=3^2\in\mathbb{K}.$$

Tak jak wyżej wnioskujemy, że liczba 16 musi mieć kolor czerwony.



Teraz patrzymy na kolor liczby 1. Ponieważ $1-0=1=1^2\in\mathbb{K}$, więc liczba 1 musi mieć kolor różny od koloru liczby 0, czyli kolor różny od niebieskiego. Mamy zatem 2 przypadki: liczba 1 ma kolor czerwony lub ma kolor zielony. Okaże się, że w obu przypadkach kolory wielu innych liczb są zdeterminowane.

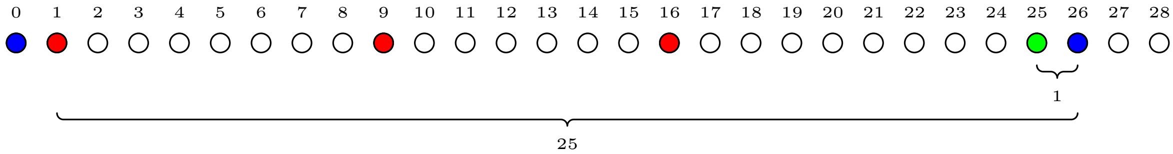
Przypadek 1. Liczba 1 ma kolor czerwony:



Teraz popatrzmy na liczbę 26. Ponieważ

$$26-25=1=1^2\in\mathbb{K}\quad\text{oraz}\quad 26-1=25=5^2\in\mathbb{K},$$

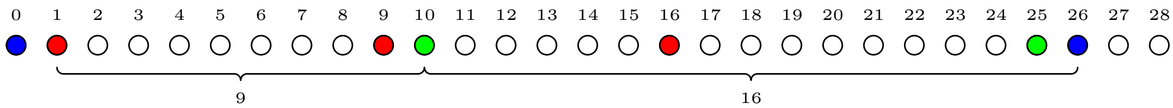
więc liczba 26 musi mieć kolor niebieski:



Następnie weźmy liczbę 10. Mamy tym razem

$$10-9=1=1^2\in\mathbb{K}\quad\text{oraz}\quad 26-10=16=4^2\in\mathbb{K}.$$

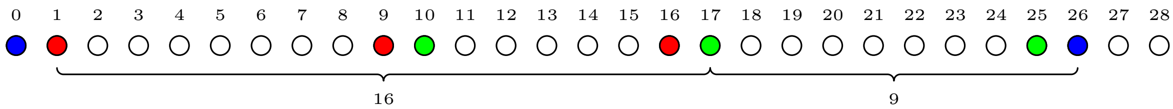
Stąd wynika, że liczba 10 musi mieć kolor zielony:



Kolejną liczbą jest 17. Mamy teraz

$$17-16=1=1^2\in\mathbb{K}\quad\text{oraz}\quad 26-17=9=3^2\in\mathbb{K}.$$

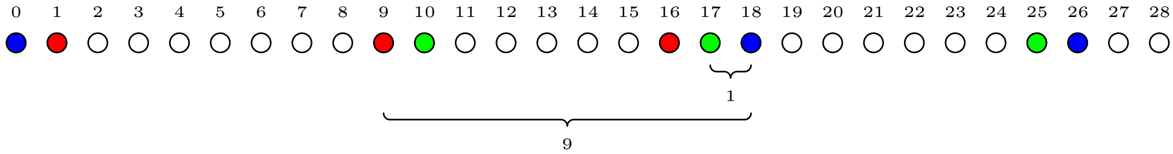
Zatem liczba 17 jest zielona:



Ponieważ

$$18 - 17 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 18 - 9 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K},$$

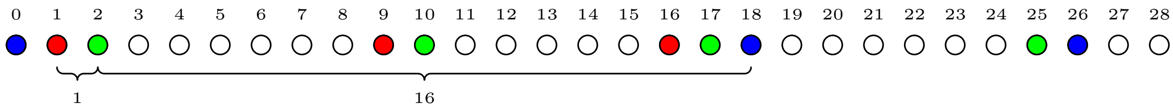
więc liczba 18 jest niebieska:



Następną rozważaną liczbą jest 2. Mamy teraz

$$2 - 1 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 18 - 2 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K}.$$

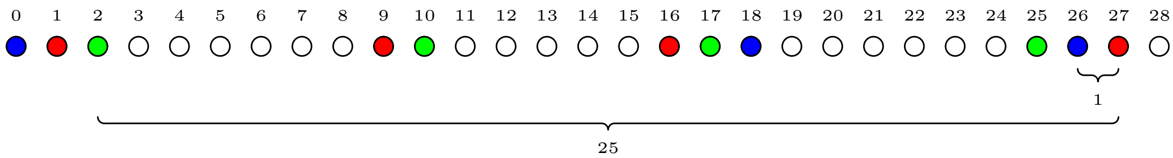
Zatem liczba 2 jest zielona:



Teraz zauważamy, że

$$27 - 26 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 27 - 2 = 25 = 5^2 \in \mathbb{K}.$$

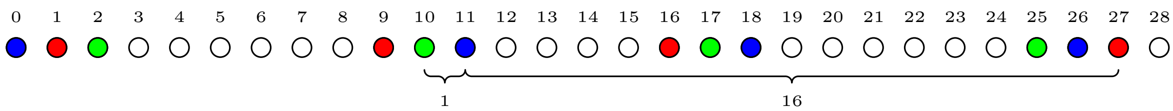
Stąd wynika, że liczba 27 jest czerwona:



Weźmy następnie liczbę 11. Wówczas

$$11 - 2 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 27 - 11 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K},$$

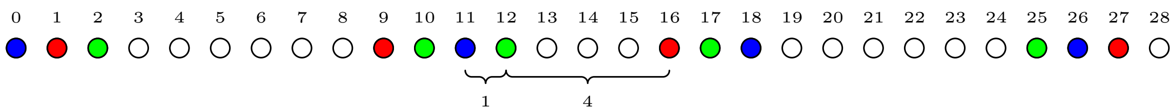
skąd wynika, że liczba 11 jest niebieska:



Kolejną liczbą jest 12. Mamy

$$12 - 11 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 16 - 12 = 4 = 2^2.$$

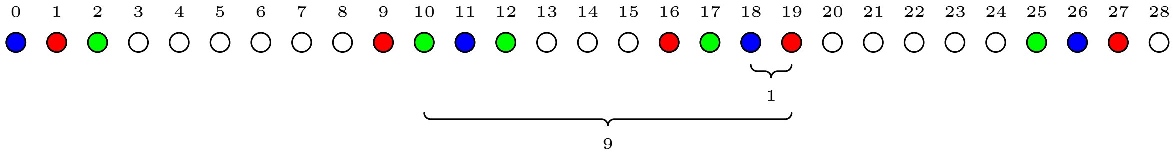
Zatem liczba 12 jest zielona:



Przedostatnią badaną liczbą jest 19. Teraz mamy równości

$$19 - 18 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 19 - 10 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K}.$$

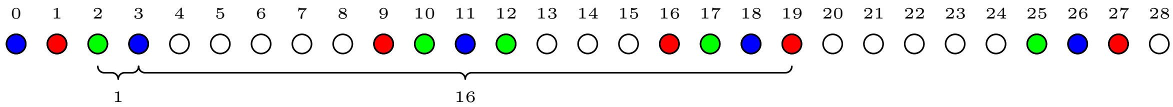
Zatem liczba 19 jest czerwona:



Wreszcie popatrzmy na liczbę 3. Mamy równości

$$3 - 2 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 19 - 3 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K}.$$

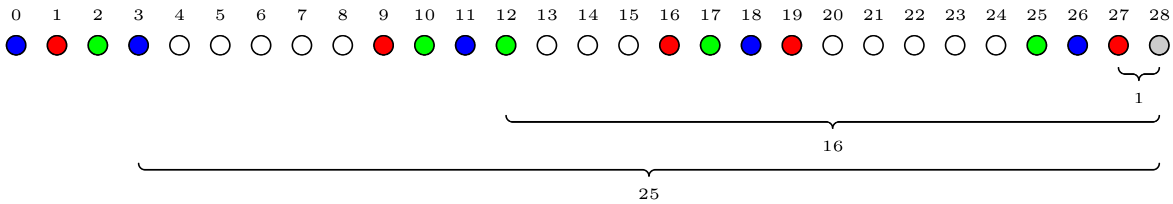
Stąd wynika, że liczba 3 jest niebieska:



Teraz zauważmy, że

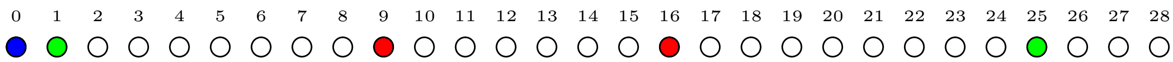
$$28 - 27 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K}, \quad 28 - 12 = 16 = 4^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 28 - 3 = 25 = 5^2 \in \mathbb{K},$$

skąd wynika, że liczba 28 nie może mieć żadnego z trzech kolorów.



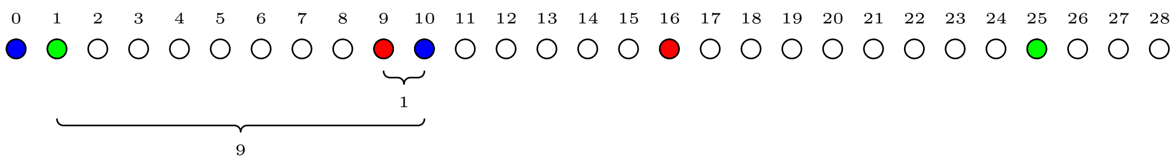
Przypadek 1 jest zatem niemożliwy.

Przypadek 2. Liczba 1 ma kolor zielony.

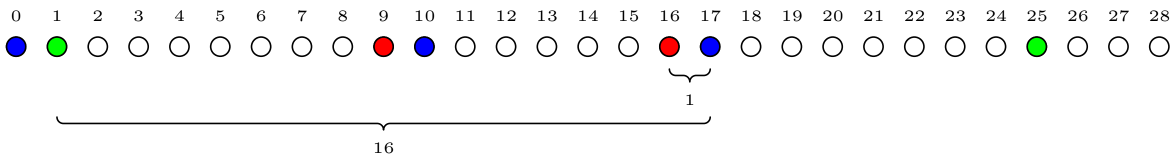


Teraz, w podobny sposób jak w przypadku pierwszym, znajdujemy kolory innych liczb. Mamy zatem kolejno:

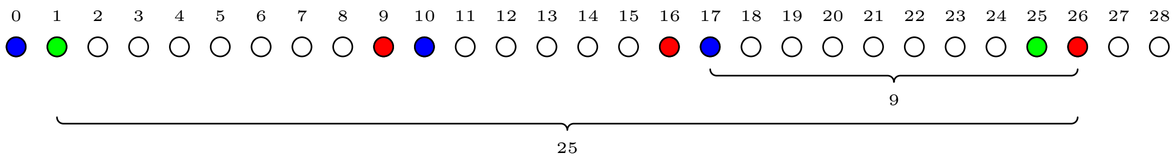
Liczba 10 jest niebieska:



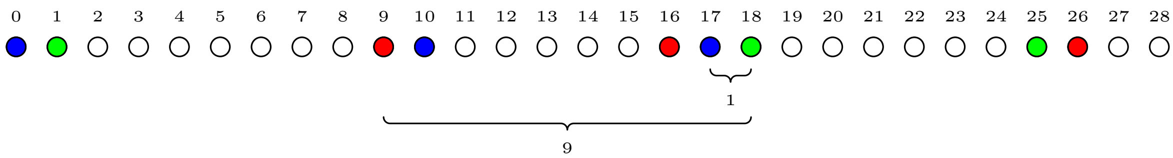
Liczba 17 jest niebieska:



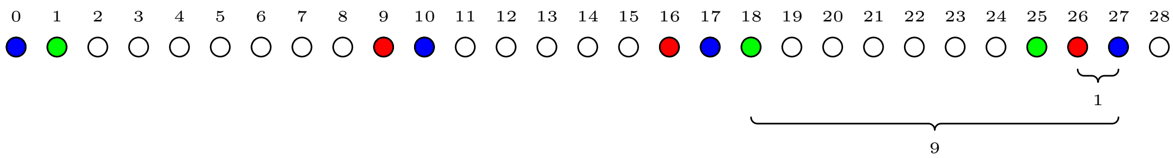
Liczba 26 jest czerwona:



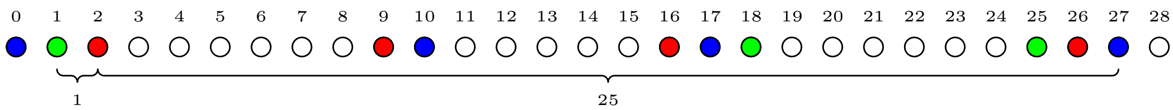
Liczba 18 jest zielona:



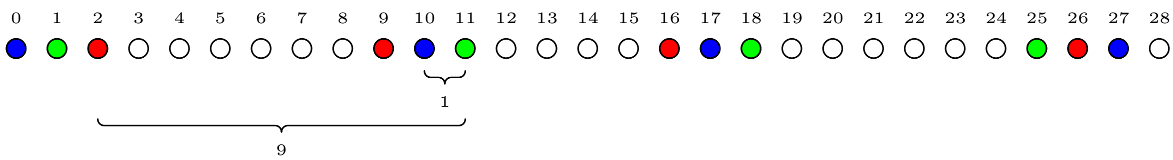
Liczba 27 jest niebieska:



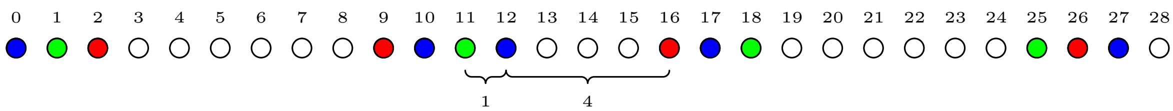
Liczba 2 jest czerwona:



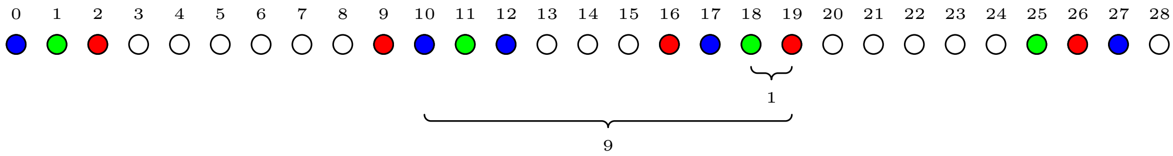
Liczba 11 jest zielona:



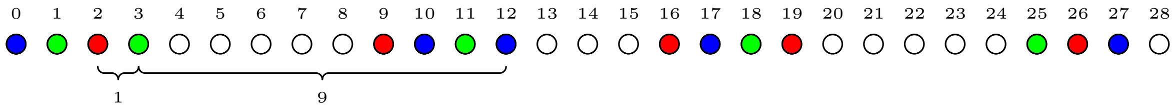
Liczba 12 jest niebieska:



Liczba 19 jest czerwona:



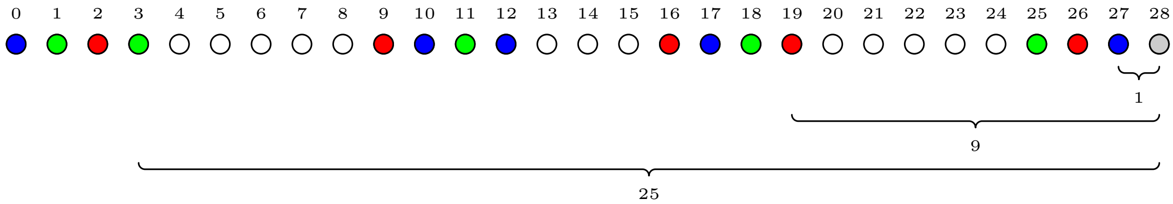
Wreszcie liczba 3 jest zielona:



Teraz zauważmy, że

$$28 - 27 = 1 = 1^2 \in \mathbb{K}, \quad 28 - 19 = 9 = 3^2 \in \mathbb{K} \quad \text{oraz} \quad 28 - 3 = 25 = 5^2 \in \mathbb{K},$$

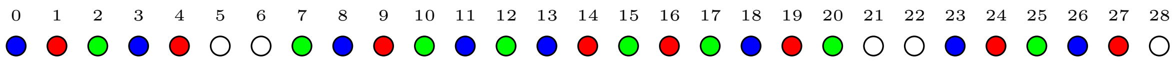
skąd znów wynika, że liczba 28 nie może mieć żadnego z trzech kolorów.



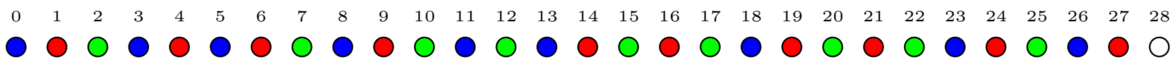
Okazało się, że przypadek drugi także jest niemożliwy.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że 3-kolorowanie zbioru liczb naturalnych od 0 do 28 nie jest możliwe. To kończy dowód twierdzenia 6.6.

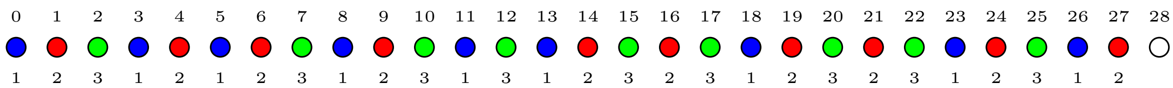
W podobny sposób można udowodnić twierdzenie 6.7. Kolorowanie znalezione w przypadku pierwszym możemy jeszcze rozszerzyć. Można łatwo przekonać się (co pozostawię jako ćwiczenie), że kolory liczb 8, 24, 20, 4, 7, 13, 14, 15 i 23 (w tej kolejności) są wyznaczone jednoznacznie. Otrzymamy kolorowanie:



Pozostaje kolorowanie czterech liczb: 5, 6, 21 i 22. Oczywiście liczba 5 nie może mieć koloru czerwonego. Przyjmijmy zatem, że ma kolor niebieski. Wówczas liczby 6 i 21 muszą mieć kolor czerwony, a liczba 22 musi mieć kolor zielony. Otrzymamy kolorowanie



Ponumerujmy teraz kolory liczbami 1, 2 i 3. Kolor niebieski oznaczymy liczbą 1, kolor czerwony liczbą 2 i kolor zielony liczbą 3.



Otrzymaliśmy pierwsze kolorowanie z dowodu twierdzenia 6.7. W ten sposób bezpośrednie dowody twierdzeń 6.6 i 6.7 zostały zakończone.

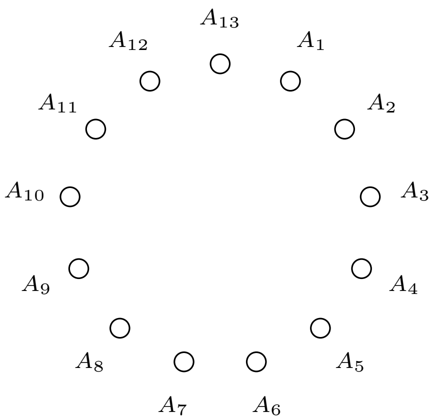
7. Jednokolorowe ciągi arytmetyczne

Przypomnijmy zadanie 4.

4. (LI OM, zadanie 4/I)
Każdy punkt okręgu jest pokolorowany jednym z trzech kolorów. Udowodnij, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Pokażę najpierw rozwiązanie bezpośrednie. Wybierzmy na okręgu 13 punktów będących wierzchołkami trzynastokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{12}A_{13}$. Te wierzchołki są pokolorowane trzema kolorami. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej jednym kolorem (na przykład czerwonym) pokolorowano co najmniej 5 wierzchołków. Zajmijmy się teraz wierzchołkami czerwonymi.

Mamy zatem następującą sytuację: spośród wierzchołków trzynastokąta foremnego wybrano 5 wierzchołków czerwonych. Pokażemy, że niezależnie od tego, w jaki sposób wybrano te 5 wierzchołków, to wśród wybranych wierzchołków znajdą się wierzchołki pewnego trójkąta równoramiennego. Popatrzmy zatem na wierzchołki trzynastokąta foremnego:



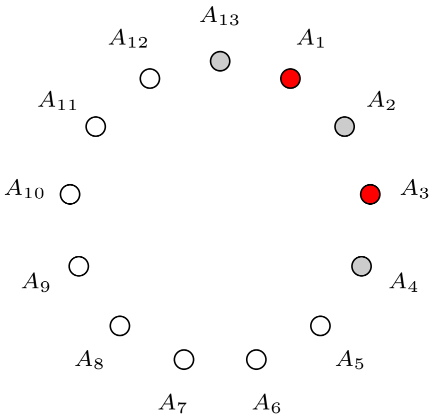
Prowadzimy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Zakładamy więc, że wybrano pięć wierzchołków w taki sposób, że wśród nich nie ma wierzchołków trójkąta równoramiennego. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. Wśród wybranych pięciu wierzchołków nie ma dwóch wierzchołków sąsiednich.

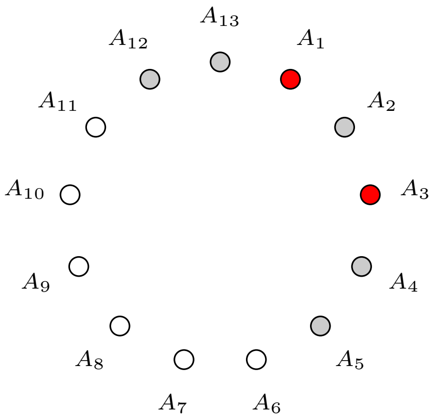
Weźmy dowolny wierzchołek, który nie został wybrany. Teraz pozostałe wierzchołki dzielimy na cztery zbiory po trzy kolejne wierzchołki. Na przykład, jeśli tym wierzchołkiem, który nie został wybrany, jest wierzchołek A_{13}, to pozostałe wierzchołki $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielimy na następujące cztery zbiory:

$$\{A_1, A_2, A_3\}, \quad \{A_4, A_5, A_6\}, \quad \{A_7, A_8, A_9\} \quad \text{oraz} \quad \{A_{10}, A_{11}, A_{12}\}.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w jednym z tych czterech zbiorów znajdują się co najmniej dwa wybrane wierzchołki. Ponieważ założyliśmy w tym przypadku, że nie ma dwóch wybranych wierzchołków sąsiednich, więc w żadnym z tych zbiorów nie ma trzech wybranych wierzchołków. Ponadto w tym zbiorze, w którym znajdują się dwa wybrane wierzchołki, nie jest wybrany wierzchołek środkowy; są wybrane oba wierzchołki skrajne. Stąd wynika, że wśród wybranych wierzchołków znajdują się dwa wierzchołki, między którymi jest dokładnie jeden wierzchołek niewybrany. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że zostały wybrane wierzchołki A_1 i A_3. Wówczas wierzchołki A_{13}, A_2 i A_4 nie zostały wybrane (przypominam, że założyliśmy, iż nie ma dwóch wybranych wierzchołków sąsiednich). Na poniższym rysunku wierzchołki wybrane są oznaczone kolorem czerwonym, a wierzchołki, które nie zostały wybrane, są oznaczone kolorem szarym. Kolorem białym są oznaczone wierzchołki, o których jeszcze nic nie wiemy.



Popatrzmy teraz na wierzchołek A_5. Gdyby został on wybrany, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_3A_5$. To znaczy, że wierzchołek A_5 nie został wybrany. Dokładnie tak samo pokazujemy, że wierzchołek A_{12} nie został wybrany.



Zostało do rozpatrzenia sześć wierzchołków: $A_6, \ldots, A_{11}$. Spośród nich wybrano trzy wierzchołki; nie wybrano jednak dwóch sąsiednich. Są więc tylko dwie możliwości.

- Wybrano wierzchołki A_6, A_8 i A_{10}. Te trzy wierzchołki są jednak wierzchołkami trójkąta równoramiennego, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem.
- Wybrano wierzchołki A_7, A_9 i A_{11}. Te trzy wierzchołki są także wierzchołkami trójkąta równoramiennego, co znów jest sprzeczne z przyjętym założeniem.

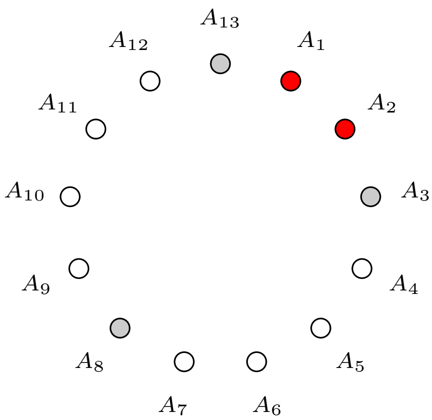
Przypadek 1 okazał się niemożliwy. Przejdźmy do przypadku 2.

Przypadek 2. Wśród wybranych wierzchołków są dwa wierzchołki sąsiednie.

Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że wybrano wierzchołki A_1 i A_2. Wówczas nie zostały wybrane wierzchołki A_3, A_8 i A_{13}:

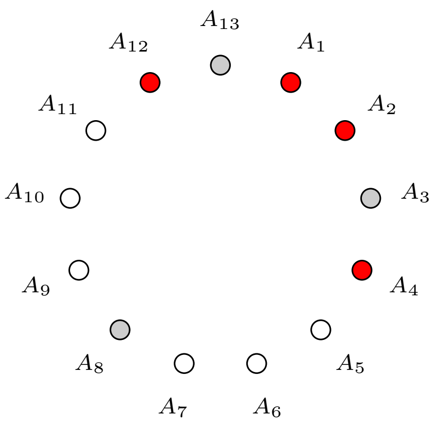
- Gdyby wybrano wierzchołek A_3, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_2A_3$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_8, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_2A_8$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{13}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{13}A_1A_2$.

Przyjrzyjmy się teraz wierzchołkom A_4 i A_{12}.



Mamy trzy możliwości.

Przypadek 2a. Wybrane zostały oba te wierzchołki.

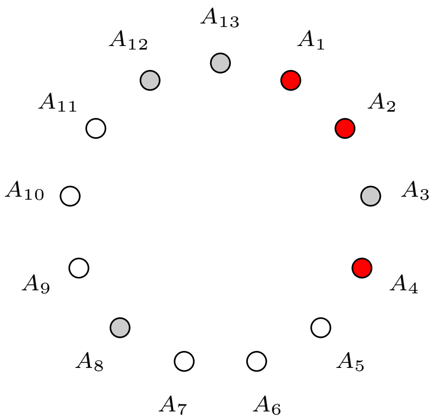


Okazuje się, że wtedy żaden inny wierzchołek nie mógł być wybrany.

- Gdyby wybrano wierzchołek A_5, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{12}A_2A_5$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_6, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_2A_4A_6$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_7, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_4A_7$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_9, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_4A_9$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{10}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{10}A_{12}A_1$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{11}A_1A_4$.

Przypadek 2a okazał się więc niemożliwy.

Przypadek 2b. Wybrany został dokładnie jeden wierzchołek spośród A_4 i A_{12}. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że został wybrany wierzchołek A_4.

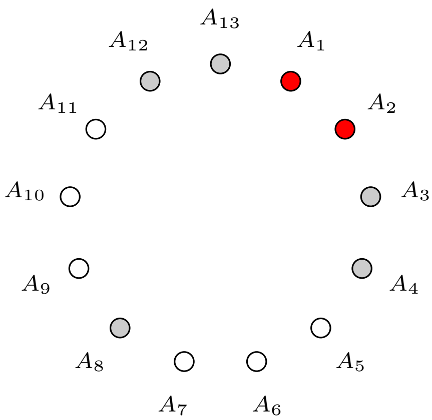


To wyklucza cztery inne wierzchołki:

- Gdyby wybrano wierzchołek A_6, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_2A_4A_6$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_7, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_4A_7$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_9, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_4A_9$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{11}A_1A_4$.

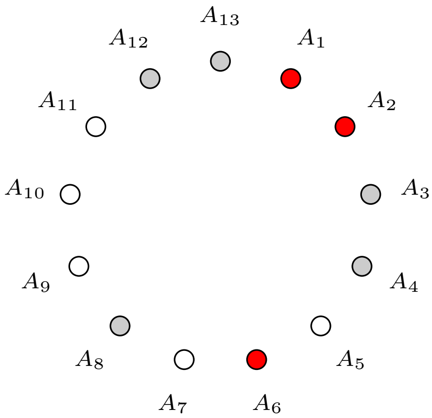
Pozostają tylko dwa wierzchołki: A_5 i A_{10}. Ponieważ do tej pory wybraliśmy tylko trzy wierzchołki, więc oba wierzchołki A_5 i A_{10} muszą być wybrane. Wtedy jednak mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{10}A_2A_5$. Przypadek 2b także okazał się niemożliwy. Pozostał ostatni przypadek.

Przypadek 2c. Nie wybrano żadnego z wierzchołków A_4 i A_{12}.



Zauważmy teraz, że wierzchołki, których dotychczas nie rozpatrzyliśmy, rozpadają się na dwie grupy kolejnych wierzchołków: A_5, A_6, A_7 oraz A_9, A_{10}, A_{11}. W każdej z tych grup mogliśmy wybrać co najwyżej dwa wierzchołki. Wybranie wszystkich trzech wierzchołków z jednej grupy utworzyłoby bowiem trójkąt równoramienny $A_5A_6A_7$ lub $A_9A_{10}A_{11}$. To oznacza także, że z każdej grupy musieliśmy wybrać co najmniej jeden wierzchołek.

Teraz pokażę, że nie wybrano wierzchołków A_6 i A_{10}. Przypuśćmy bowiem, że co najmniej jeden z tych wierzchołków został wybrany. Zauważmy teraz, że otrzymany dotychczas rysunek jest symetryczny: jego osią symetrii jest prosta przechodząca przez wierzchołek A_8 i środek boku A_1A_2. Zauważmy następnie, że wierzchołki A_6 i A_{10} są symetryczne względem tej osi symetrii. Bez zmniejszenia ogólności możemy zatem przyjąć, że został wybrany wierzchołek A_6:

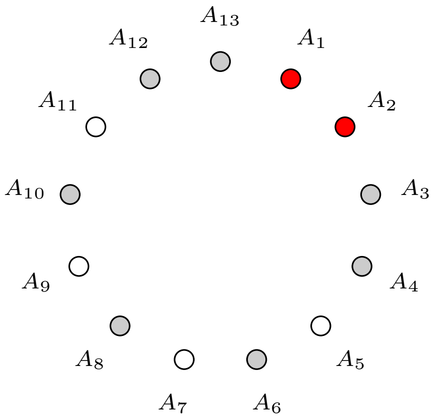


Wówczas nie wybrano żadnego z wierzchołków A_9, A_{10} i A_{11}.

- Gdyby wybrano wierzchołek A_9, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_6A_9$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{10}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{10}A_2A_6$.
- Gdyby wybrano wierzchołek A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_{11}A_2A_6$.

To jednak jest sprzeczne z tym, że z grupy wierzchołków A_9, A_{10} i A_{11} co najmniej jeden wierzchołem musiał być wybrany.

Nasze przypuszczenie, że wybrano wierzchołek A_6 doprowadziło do sprzeczności. Wierzchołek A_6 nie został zatem wybrany. Ze wspomnianej symetrii wynika, że wierzchołek A_{10} także nie został wybrany. Mamy zatem następującą sytuację:



Spośród wierzchołków A_5, A_7, A_9 i A_{11} wybrano więc jeszcze trzy wierzchołki. Mamy cztery możliwości.

- Gdyby wybrano wierzchołki A_5, A_7 i A_9, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_5A_7A_9$.
- Gdyby wybrano wierzchołki A_5, A_7 i A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_2A_7A_{11}$.

- Gdyby wybrano wierzchołki A_5, A_9 i A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_1A_5A_9$.
- Gdyby wybrano wierzchołki A_7, A_9 i A_{11}, to mielibyśmy trójkąt równoramienny $A_7A_9A_{11}$.

Wszystkie cztery możliwości prowadzą do sprzeczności. Ta sprzeczność ostatecznie dowodzi, że przyjęte założenie, że wśród wybranych wierzchołków nie ma wierzchołków trójkąta równoramiennego, okazało się nieprawdziwe. To kończy rozwiązanie zadania.

Przedstawione wyżej rozwiązanie zadania jest dość żmudne i nie widać żadnej naturalnej metody uogólnienia twierdzenia. Popatrzmy chwilę na główną myśl rozwiązania. Znaleźliśmy liczbę n (w naszym zadaniu równą 5) o następującej własności:

- jeśli spośród wierzchołków wielokąta foremnego mającego $3n-2$ wierzchołków wybierzemy dowolne n wierzchołków, to wśród wybranych wierzchołków znajdą się wierzchołki trójkąta równoramiennego.

Ponieważ wierzchołki wielokąta foremnego były pokolorowane trzema kolorami, więc z zasady szufladkowej wynika, że wśród $3n-2$ wierzchołków znajduje się n wierzchołków tego samego koloru. Powyższa własność gwarantowała, że wśród tych n wierzchołków (to znaczy: wśród dowolnych 5 wierzchołków trzynastokąta foremnego) znajdują się trzy wierzchołki będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Można łatwo przekonać się, że liczba $n = 5$ jest najmniejszą liczbą o tej własności (wystarczy spośród wierzchołków dziesięciokąta foremnego $A_1A_2 \ldots A_{10}$ wybrać wierzchołki A_1, A_2, A_4 i A_5).

Przypuśćmy teraz, że zmienimy nieco treść zadania na następującą:

4. Każdy punkt okręgu jest pokolorowany jednym z czterech kolorów. Udowodnij, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Analogiczne rozwiązanie polegałoby na znalezieniu takiej liczby n, dla której prawdziwe byłoby następujące stwierdzenie:

- jeśli spośród wierzchołków wielokąta foremnego mającego $4n-3$ wierzchołków wybierzemy dowolne n wierzchołków, to wśród wybranych wierzchołków znajdą się wierzchołki trójkąta równoramiennego.

Obliczenia komputerowe pokazują, że liczba $n = 9$ ma powyższą własność. To znaczy, że:

- jeśli spośród wierzchołków wielokąta foremnego mającego 33 wierzchołki wybierzemy dowolne 9 wierzchołków, to wśród wybranych wierzchołków znajdą się wierzchołki trójkąta równoramiennego.

Wydaje się jednak, że bezpośredni dowód powyższej własności byłby znacznie bardziej złożony od dowodu dla $n = 5$ i mogłoby okazać się, że przeprowadzenie tego dowodu przekraczałoby granice cierpliwości wielu uczestników Olimpiady. Dla większej liczby kolorów bezpośrednie rozwiązanie analogicznego zadania wydaje się być jeszcze bardziej beznadziejne. Dla pięciu kolorów możemy bowiem udowodnić następujące stwierdzenie:

- jeśli spośród wierzchołków wielokąta foremnego mającego 71 wierzchołków wybierzemy dowolne 15 wierzchołków, to wśród wybranych wierzchołków znajdą się wierzchołki trójkąta równoramiennego.

Przypuśćmy teraz, że te 71 wierzchołków pokolorujemy pięcioma kolorami. Wówczas wśród tych wierzchołków istnieje co najmniej 15 wierzchołków jednego koloru. Wśród tych wierzchołków znajdują się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Dowody obu stwierdzeń (dotyczących wielokątów foremnych mających 33 i 71 wierzchołków) przeprowadziłem za pomocą komputera. Obliczenia w drugim przypadku były bardzo długie (komputer pracował bez przerwy przez 2 doby). Przeprowadzenie odpowiednich dowodów metodami tradycyjnymi wydaje się być niewykonalne w rozsądnym czasie. Z drugiej strony dowód przeprowadzony za pomocą długich obliczeń komputerowych zmusza nas do zadania sobie pytania, czy program był napisany bezbłędnie. W tym przypadku mam nadzieję, że program nie zawierał błędu, choć chyba nigdy nie będę miał pewności.

Rozwiązanie uogólnionego zadania 4 dla dowolnej liczby kolorów wynika łatwo z następującego twierdzenia van der Waerdena.

Twierdzenie 7.1. Dane są liczby naturalne $k \geq 2$ oraz $m \geq 3$. Wówczas istnieje liczba naturalna n o następującej własności:

- jeśli liczby ze zbioru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ pokolorujemy za pomocą k kolorów, to w zbiorze X będzie istniał jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości m.

Najmniejszą liczbę n o powyższej własności oznaczamy symbolem $W(k, m)$ i nazywamy liczbą van der Waerdena (dla parametrów k i m).

Pokażę teraz, w jaki sposób z twierdzenia van der Waerdena można otrzymać rozwiązanie zadania 4 dla dowolnej liczby kolorów. Przypomnijmy zatem to zadanie w wersji ogólnej.

4. (uogólnienie zadania 4/I z LI OM)
Każdy punkt okręgu jest pokolorowany jednym z $k \geq 3$ kolorów. Udowodnij, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Weźmy teraz w twierdzeniu van der Waerdena $m = 3$ i niech $n = W(k, 3)$. Tak jak w rozwiązaniu zadania 4 wybieramy na okręgu n punktów $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ będących wierzchołkami wielokąta foremnego (o n bokach). Wierzchołki tego wielokąta kolorujemy za pomocą k kolorów. Z twierdzenia van der Waerdena wynika, że istnieją liczby całkowite p, q i r tego samego koloru takie, że

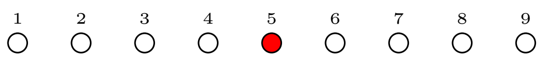
$$1 \leq p < q < r \leq n \quad \text{oraz} \quad \text{trójka } (p, q, r) \text{ tworzy ciąg arytmetyczny.}$$

Wówczas oczywiście trójkąt $A_pA_qA_r$ jest równoramienny (o podstawie A_pA_r i ramionach A_pA_q oraz A_rA_q). To kończy rozwiązanie zadania.

Dowodu twierdzenia van der Waerdena w całej ogólności tutaj nie pokażę. Pokażę najpierw dowód tego twierdzenia dla $k = 2$ i $m = 3$, tzn. dla kolorowania dwoma kolorami i ciągów arytmetycznych długości 3.

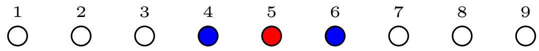
Twierdzenie 7.2. Jeśli liczby ze zbioru $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$ pokolorujemy dwoma kolorami (np. czerwonym i niebieskim), to w zbiorze X będzie istniał jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3.

Dowód. Przypuśćmy, że liczby ze zbioru X zostały pokolorowane dwoma kolorami. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że liczba 5 jest czerwona.

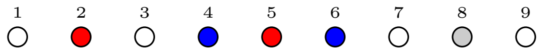


Zauważmy, że jeśli obie liczby 4 i 6 są czerwone, to mamy trzywyrazowy czerwony ciąg arytmetyczny $(4, 5, 6)$. Zatem możemy przyjąć, że co najmniej jedna z tych liczb jest niebieska. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. Obie liczby 4 i 6 są niebieskie.

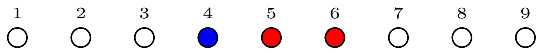


Wówczas jeśli liczba 2 jest niebieska, to mamy trzywyrazowy niebieski ciąg arytmetyczny $(2, 4, 6)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 2 jest czerwona.

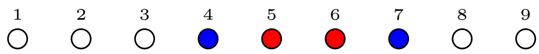


Wówczas, niezależnie od koloru liczby 8 mamy trzywyrazowy jednokolorowy ciąg arytmetyczny: czerwony $(2, 5, 8)$ lub niebieski $(4, 6, 8)$.

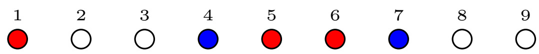
Przypadek 2. Jedna z liczb 4 i 6 jest niebieska, druga jest czerwona. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że liczba 4 jest niebieska, a liczba 6 jest czerwona.



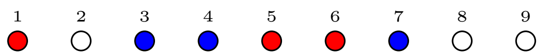
Jeśli liczba 7 jest czerwona, to mamy trzywyrazowy czerwony ciąg arytmetyczny $(5, 6, 7)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 7 jest niebieska.



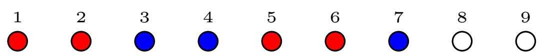
Jeśli liczba 1 jest niebieska, to mamy trzywyrazowy niebieski ciąg arytmetyczny $(1, 4, 7)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 1 jest czerwona.



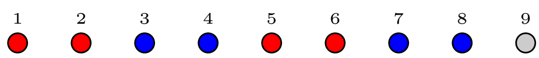
Jeśli liczba 3 jest czerwona, to mamy trzywyrazowy czerwony ciąg arytmetyczny $(1, 3, 5)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 3 jest niebieska.



Jeśli liczba 2 jest niebieska, to mamy trzywyrazowy niebieski ciąg arytmetyczny $(2, 3, 4)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 2 jest czerwona.



Jeśli liczba 8 jest czerwona, to mamy trzywyrazowy czerwony ciąg arytmetyczny $(2, 5, 8)$. Przypuśćmy zatem, że liczba 8 jest niebieska.



Teraz niezależnie od koloru liczby 9 mamy jednokolorowy ciąg arytmetyczny: czerwony $(1, 5, 9)$ lub niebieski $(7, 8, 9)$.

W obu przypadkach okazało się, że istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3. To kończy dowód twierdzenia.

Zauważmy ponadto, że w powyższym dowodzie liczby od 1 do 8 zostały pokolorowane tak, że wśród nich nie występuje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3. To dowodzi równości

$$W(2, 3) = 9.$$

Znamy tylko kilka liczb van der Waerdena. Oto one:

$$\begin{aligned}
&W(2, 3) = 9,\\
&W(2, 4) = 35,\\
&W(2, 5) = 178,\\
&W(2, 6) = 1132,\\
&W(3, 3) = 27,\\
&W(3, 4) = 293,\\
&W(4, 3) = 76.
\end{aligned}$$

Dowody tych równości (z wyjątkiem pierwszej) zostały przeprowadzone za pomocą obliczeń komputerowych.

Pokażę teraz dowód twierdzenia van der Waerdena dla $m = 3$ i dowolnej liczby kolorów.

Twierdzenie 7.3. Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 2$ istnieje liczba naturalna n o następującej własności:

- jeśli liczby ze zbioru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ pokolorujemy za pomocą k kolorów, to w zbiorze X będzie istniał jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3.

W dowodzie tego twierdzenia potrzebna będzie jedna definicja. Przypuśćmy, że mamy dane kolorowanie dowolnego zbioru

$$A = \{1, 2, \ldots, m\}$$

za pomocą k kolorów. Powiemy, że trójki liczb

$$(a_1, b_1, c), \quad (a_2, b_2, c), \quad \ldots, \quad (a_r, b_r, c)$$

tworzą r-wachlarz, jeśli spełnione są następujące warunki:

- dla każdego $i = 1, 2, \ldots, r$ ma miejsce równość $a_i + c = 2b_i$ (czyli trójka liczb (a_i, b_i, c) tworzy ciąg arytmetyczny długości 3,
- dla każdego $i = 1, 2, \ldots, r$ obie liczby a_i oraz b_i mają ten sam kolor,
- jeśli $1 \leq i < j \leq r$, to liczby a_i oraz a_j mają inne kolory.

Przykład. Przypuśćmy, że $m = 100$. Przypuśćmy następnie, że liczby od 1 do m zostały pokolorowane co najmniej czterema kolorami, przy czym:

- liczby 11 i 52 są czerwone,
- liczby 43 i 68 są niebieskie,
- liczby 59 i 76 są zielone,
- liczby 83 i 88 są żółte.

Wówczas trójki

$$(11, 52, 93), \quad (43, 68, 93), \quad (59, 76, 93) \quad \text{oraz} \quad (83, 88, 93)$$

tworzą 4-wachlarz.

Dowód. Niech $k \geq 2$ będzie dowolną liczbą całkowitą. Przez indukcję względem r dowodzimy następującego stwierdzenia:

- istnieje liczba n taka, że dla dowolnego kolorowania zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ za pomocą k kolorów, w tym zbiorze istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3 lub istnieje r-wachlarz.

Warunek początkowy. Niech $r = 1$. Przyjmijmy $n = 2k + 1$. Przypuśćmy następnie, że zbiór

$$A = \{1, 2, \ldots, 2k + 1\}$$

jest pokolorowany za pomocą k kolorów. Wówczas z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w zbiorze

$$\{1, 2, \ldots, k, k + 1\}$$

istnieją co najmniej dwie liczby tego samego koloru. Niech liczby a i b będą tego samego koloru, przy czym

$$1 \leq a < b \leq k + 1.$$

Wówczas łatwo dowodzimy, że $b < 2b - a \leq 2k+1$. Niech $c = 2b - a$. Ponieważ $a + c = 2b$, liczby a i b są tego samego koloru oraz

$$1 \leq a < b < c \leq 2k + 1,$$

więc trójka liczb (a, b, c) tworzy 1-wachlarz w zbiorze A.

Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby całkowitej $r \geq 1$. Istnieje zatem liczba całkowita n taka, że dla dowolnego kolorowania zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ za pomocą k kolorów, w zbiorze A istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3 lub istnieje r-wachlarz. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej p i dowolnego kolorowania zbioru

$$A_p = \{p + 1, p + 2, \ldots, p + n\}$$

za pomocą k kolorów, w zbiorze A_p istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3 lub istnieje r-wachlarz. Powiemy także, że zbiory A_p i A_q są pokolorowane tak samo, jeśli dla dowolnej liczby i takiej, że $1 \leq i \leq n$ liczby $p + i$ oraz $q + i$ mają ten sam kolor.

Chcemy znaleźć liczbę N taką, że dla dowolnego kolorowania zbioru $\{1, 2, \ldots, N\}$ za pomocą k kolorów, w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3 lub istnieje $(r + 1)$-wachlarz. Przyjmijmy $l = 2 \cdot k^n + 1$ oraz

$$N = nl = n \cdot (2 \cdot k^n + 1)$$

i weźmy dowolne kolorowanie c zbioru $B = \{1, 2, \ldots, N\}$ za pomocą k kolorów.

Przypuśćmy, że w zbiorze B nie ma jednokolorowej trójki arytmetycznej. Zbiór B dzielimy wówczas na $l = 2k^n + 1$ zbiorów zawierających po n kolejnych liczb:

$$\begin{aligned}
&B_1 = \{1, 2, \ldots, n\} = A,\\
&B_2 = \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\} = A_n,\\
&B_3 = \{2n + 1, 2n + 2, \ldots, 3n\} = A_{2n},\\
&\ldots \quad \ldots\\
&B_i = \{(i - 1)n + 1, (i - 1)n + 2, \ldots, in\} = A_{(i-1)n},\\
&\ldots \quad \ldots\\
&B_l = \{(l - 1)n + 1, (l - 1)n + 2, \ldots, N\} = A_{(l-1)n}.
\end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że istnieje dokładnie k^n kolorowań zbioru n-elementowego. Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwa zbiory B_i spośród zbiorów

$$B_1, \quad B_2, \quad , \ldots, \quad B_{k^n}, \quad B_{k^n+1}$$

są pokolorowane tak samo za pomocą kolorowania c. Niech będą to zbiory B_p i B_q, gdzie

$$1 \le p < q \le k^n + 1.$$

Niech $s = 2q - p$. Wówczas trójka (p, q, s) tworzy ciąg arytmetyczny długości 3. Ponadto można łatwo udowodnić, że $s \le l$, czyli zbiór B_s jest jednym ze zdefiniowanych wyżej zbiorów B_i. Zatem zbiory B_p, B_q i B_s są podzbiorami zbioru B.

Ponieważ w zbiorze B nie ma jednokolorowej trójki arytmetycznej, więc nie ma też takiej trójki w n-elementowym zbiorze B_p. Z założenia indukcyjnego wynika wówczas, że istnieją liczby

$$a_1, \quad b_1, \quad a_2, \quad b_2, \quad \ldots, \quad a_r, \quad b_r, \quad c$$

takie, że trójki

$$(p + a_1, p + b_1, p + c), \quad (p + a_2, p + b_2, p + c), \quad \ldots, \quad (p + a_r, p + b_r, p + c)$$

tworzą r-wachlarz w zbiorze B_p. Oczywiście liczba $p + c$ ma inny kolor niż wszystkie pary $(p + a_i, p + b_i)$. Ponieważ zbiory B_p i B_q są pokolorowane tak samo, więc trójki

$$(q + a_1, q + b_1, q + c), \quad (q + a_2, q + b_2, q + c), \quad \ldots, \quad (q + a_r, q + b_r, q + c)$$

tworzą r-wachlarz w zbiorze B_q; jest on pokolorowany tak samo jak r-wachlarz

$$(p + a_1, p + b_1, p + c), \quad (p + a_2, p + b_2, p + c), \quad \ldots, \quad (p + a_r, p + b_r, p + c).$$

Teraz nietrudno zauważyć, że trójki

$$(p+a_1, q+b_1, s+c), \quad (p+a_2, q+b_2, s+c), \quad \ldots, \quad (p+a_r, q+b_r, s+c), \quad (p+c, q+c, s+c)$$

tworzą $(r+1)$-wachlarz w zbiorze B.

W ten sposób dowód indukcyjny został zakończony. Wynika stąd, że istnieje liczba naturalna n taka, że dla dowolnego kolorowania zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ za pomocą k kolorów, w tym zbiorze istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3 lub istnieje k-wachlarz. Przypuśćmy, że trójki

$$(a_1, b_1, c), \quad (a_2, b_2, c), \quad \ldots, \quad (a_k, b_k, c)$$

tworzą k-wachlarz w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Liczba c ma wtedy taki sam kolor jak jedna z par (a_i, b_i). Wówczas trójka (a_i, b_i, c) tworzy jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 3.

To kończy dowód twierdzenia.

Dowód twierdzenia van der Waerdena w całej ogólności przebiega przez indukcję ze względu na długość ciągu arytmetycznego. Dla danej długości ciągu wprowadzamy odpowiednie pojęcie r-wachlarza i przez indukcję ze względu na r dowodzimy następującego stwierdzenia:

- istnieje liczba n taka, że dla dowolnego kolorowania zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ za pomocą k kolorów, w tym zbiorze istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny danej długości lub istnieje r-wachlarz.

Szczegóły tego dowodu opuszczę w tym wykładzie.

Twierdzenie van der Waerdena ma także postać nieskończoną.

Twierdzenie 7.4. Dla dowolnego kolorowania zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ za pomocą k kolorów istnieją dowolnie długie jednokolorowe ciągi arytmetyczne tego samego koloru.

Można natomiast pokazać kolorowanie zbioru liczb naturalnych dwoma kolorami, w którym nie istnieje nieskończony jednokolorowy ciąg arytmetyczny.

W związku z nieskończoną wersją twierdzenia van der Waerdena nasuwa się następujący problem. Kolorowanie zbioru liczb naturalnych jest to podział tego zbioru na skończenie wiele podzbiorów parami rozłącznych. W którym z nich znajdują się dowolnie długie ciągi arytmetyczne? Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie udowodnione przez węgierskiego matematyka Szemerédiego.

Twierdzenie 7.5. (Szemerédi, 1974) Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ ma dodatnią gęstość górną, tzn. jeśli

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} > 0,$$

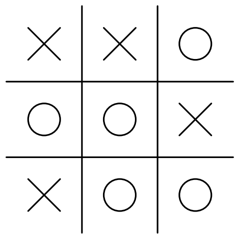
to zbiór A zawiera dowolnie długie skończone ciągi arytmetyczne.

W tym miejscu warto wspomnieć o twierdzeniu udowodnionym przez Greena i Tao w 2004 roku. Mianowicie pokazali oni, że w zbiorze liczb pierwszych istnieją dowolnie długie skończone ciągi arytmetyczne. Z twierdzenia o liczbach pierwszych wynika natomiast, że gęstość zbioru liczb pierwszych jest równa 0. To znaczy, że jeśli oznaczymy zbiór liczb pierwszych literą $\mathbb{P}$, to

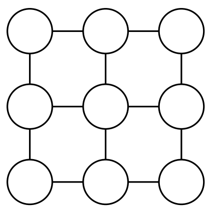
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathbb{P} \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

8. Gra w kółko i krzyżyk

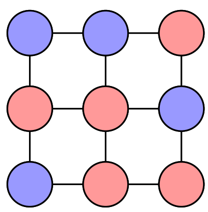
Wszyscy znamy grę w kółko i krzyżyk. Zapewne także wielu z nas wie, że gdy obaj gracze grają bezbłędnie, gra zakończy się remisem. W szczególności to znaczy, że istnieją pozycje w grze, w których żaden z graczy nie wygrał, tzn. żaden z graczy nie ustawił swoich znaków (kółek lub krzyżyków) w jednej linii: poziomej, pionowej lub ukośnej. Oto przykład takiej pozycji końcowej, która może zdarzyć się na końcu gry prowadzonej bezbłędnie przez obu graczy (grę rozpoczynał gracz rysujący kółka):



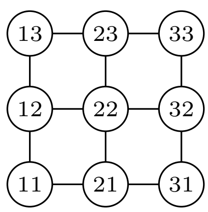
Popatrzmy teraz na planszę do gry nieco inaczej. Mamy 9 pól tworzących kwadrat o wymiarach 3×3. Każde pole jest białym kołem. Gracze na przemian kolorują pola, każdy swoim kolorem. Jeden gracz używa koloru czerwonego, drugi niebieskiego. Oto rysunek planszy do gry:



Powyższa pozycja remisowa wygląda wówczas następująco (kolor czerwony odpowiada kółkom, kolor niebieski odpowiada krzyżykom):



Pola planszy możemy ponumerować. Każde pole będzie miało numer złożony z dwóch cyfr: pierwsza jest numerem kolumny, druga jest numerem wiersza. Kolumny numerujemy od lewej strony, wiersze od dołu — analogicznie do współrzędnych x i y w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Oto rysunek planszy z zaznaczoną numeracją pól:



Na tej planszy wyróżniamy 8 linii. Jeśli gracz zapełni wszystkie pola jednej linii swoim kolorem, to wygrał grę. Mamy trzy linie poziome:

$$11-21-31, \quad 12-22-32 \quad \text{oraz} \quad 13-23-33,$$

trzy linie pionowe:

$$11-12-13, \quad 21-22-23 \quad \text{oraz} \quad 31-32-33$$

i dwie linie ukośne:

$$11-22-33 \quad \text{oraz} \quad 13-22-31.$$

Wszystkie te linie, z wyjątkiem ostatniej, mają prosty opis kombinatoryczny. Rozważamy zbiór A złożony z trzech liczb

$$A=\{1,2,3\}.$$

Zbiór A nazywamy **alfabetem**. Rozważamy następnie wszystkie słowa długości 2 utworzone z liczb należących do zbioru A, czyli z symboli naszego alfabetu A. Te słowa są to po prostu numery pól planszy do gry w kółko i krzyżyk. Teraz zdefiniujmy pojęcie **prostej kombinatorycznej**. Do naszego alfabetu dołączamy nowy symbol x. Otrzymujemy alfabet rozszerzony:

$$A_x=\{1,2,3,x\}.$$

Rozważamy następnie słowa długości 2 utworzone z symboli alfabetu rozszerzonego. Wśród tych słów wyróżniamy słowa zawierające symbol x. Niech $w(x)$ będzie takim słowem. Wówczas symbolem $w(a)$, gdzie $a\in A$ oznaczamy słowo powstające ze słowa $w(x)$ przez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu x symbolem a. Jeśli na przykład $w(x)=1x$, to $w(2)=12$. Jeśli natomiast $w(x)=xx$, to $w(3)=33$. Prostą kombinatoryczną jest dowolny zbiór postaci

$$\{w(a):\ a\in A\},$$

gdzie $w(x)$ jest słowem zawierającym symbol x. Nasza plansza do gry ma wówczas tylko 7 prostych kombinatorycznych. Oto one, wymienione wraz ze słowami je tworzącymi:

$$\begin{array}{ll}
\{11,21,31\} & x1\\
\{12,22,32\} & x2\\
\{13,23,33\} & x3\\
\{11,12,13\} & 1x\\
\{21,22,23\} & 2x\\
\{31,32,33\} & 3x\\
\{11,22,33\} & xx
\end{array}$$

Zauważmy, że jedna linia dająca wygraną w grze w kółko i krzyżyk nie jest prostą kombinatoryczną. Jest to linia

$$\{13,22,31\}.$$

Zauważmy, że w tej linii numery kolumn rosną, a numery wierszy maleją. Zdefiniowanie takiej linii wymaga wprowadzenia w naszym alfabecie porządku, na przykład porządku naturalnego liczb 1, 2 i 3. Proste kombinatoryczne możemy natomiast zdefiniować dla dowolnego alfabetu A, niekoniecznie uporządkowanego. Popatrzmy na przykład. Weźmy alfabet $A = \{1, 2, 3\}$ i uporządkujmy go w następujący sposób: $1 < 3 < 2$. Wówczas linią geometryczną stanie się zbiór

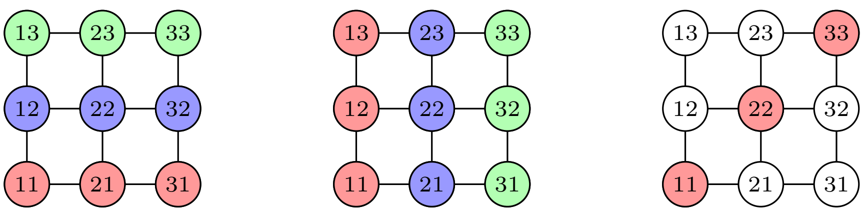
$$\{12, 33, 21\},$$

który nie jest linią geometryczną przy tradycyjnym uporządkowaniu. Natomiast jedyną prostą kombinatoryczną pozostanie zbiór

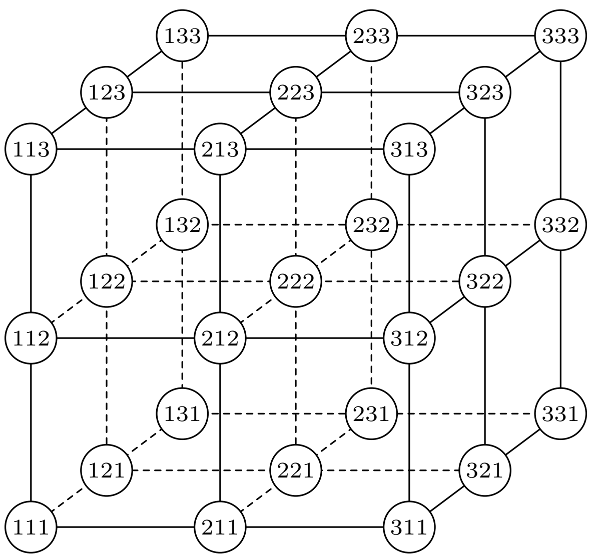
$$\{11, 33, 22\} = \{11, 22, 33\}.$$

Można zatem powiedzieć, że powiedzieć, że pojęcie prostej kombinatorycznej jest niezależne od uporządkowania alfabetu lub unaczej, że jest niezmiennicze ze względu na permutacje alfabetu. Natomiast pojęcie linii geometrycznej zależy od uporządkowania alfabetu.

Popatrzmy jeszcze na rysunki przedstawiające proste kombinatoryczne na naszej planszy do gry. Najpierw trzy proste kombinatoryczne poziome, mastępnie trzy proste kombinatoryczne pionowe i wreszcie jedyna prosta kombinatoryczna ukośna:



Grę w kółko i krzyżyk możemy zdefiniować w przestrzeniach mających więcej wymiarów. Popatrzmy na planszę do takiej gry w trzech wymiarach, z zaznaczonymi numerami pól.



W zwykłej grze w kółko i krzyżyk będziemy mieli na tej planszy 49 linii wygrywających. Mamy bowiem 9 linii poziomych skierowanych zgodnie z osią Ox. Na przykład są to linie

$$111 - 211 - 311, \quad 132 - 232 - 332 \quad \text{oraz} \quad 123 - 223 - 323.$$

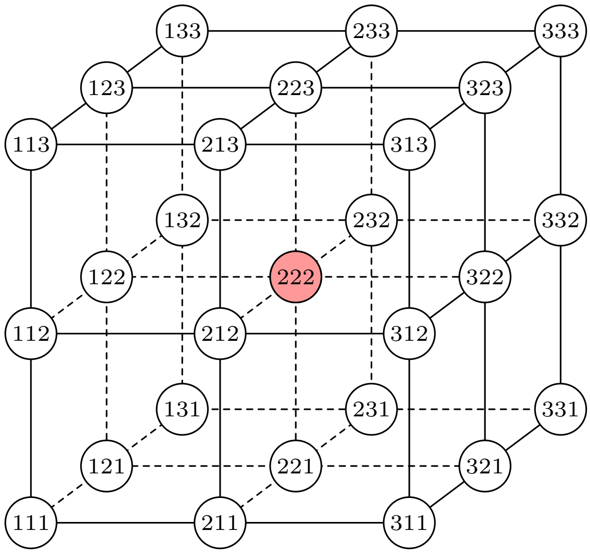
Podobnie mamy 9 linii poziomych skierowanych zgodnie z osią Oy i 9 linii pionowych skierowanych zgodnie z osią Oz. Następnie mamy 2 linie ukośne położone w płaszczyźnie $z = 1$, dwie linie ukośne położone w płaszczyźnie $z = 2$ i dwie linie ukośna położone w płaszczyźnie $z = 3$. Mamy zatem 6 linii ukośnych położonych w trzech płaszczyznach poziomych (czyli prostopadłych do osi Oz). Podobnie mamy 6 linii ukośnych położonych w trzech płaszczyznach prostopadłych do osi Oy i 8 linii ukośnych położonych w płaszczyznach prostopadłych do osi OX. Wreszcie mamy cztery główne przekątne:

$$111 - 222 - 333, \quad 311 - 222 - 133, \quad 331 - 222 - 133 \quad \text{oraz} \quad 131 - 222 - 313.$$

O takiej trójwymiarowej grze w kółko i krzyżyk możemy udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.1. Dla dowolnego kolorowania pól trójwymiarowej planszy dwoma kolorami istnieje jednokolorowa linia wygrywająca.

Dowód. Przypuśćmy, że każde pole trójwymiarowej planszy zostało pokolorowane jednym z dwóch kolorów: czerwonym lub niebieskim. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że pole z numerem 222 jest czerwone:



Rozważamy teraz 8 pól narożnych. Są to pola o numerach:

$$111, \quad 311, \quad 331, \quad 131, \quad 113, \quad 313, \quad 333 \quad \text{oraz} \quad 133.$$

Rozważamy następnie 6 przypadków.

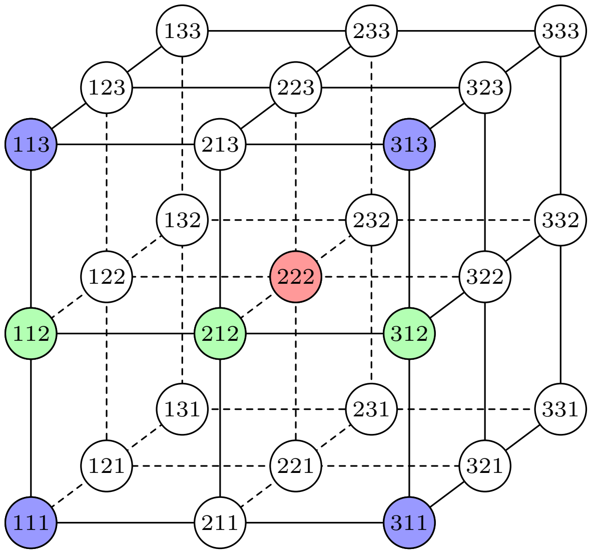
Przypadek 1. Wszystkie pola narożne jednej ściany sześcianu są niebieskie. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że pola o numerach

$$111, \quad 311, \quad 313 \quad \text{oraz} \quad 113$$

są niebieskie. Popatrzmy na pola o numerach

$$112, \quad 212 \quad \text{oraz} \quad 312,$$

zaznaczonych na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli którekolwiek z tych trzech pól jest niebieskie, to mamy niebieską linię wygrywającą. Jeśli zaś wszystkie są czerwone, to tworzą one czerwoną linię wygrywającą.

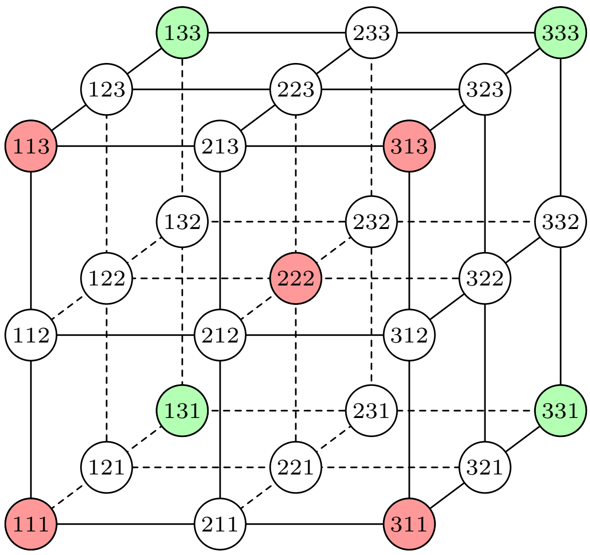
Przypadek 2. Wszystkie pola narożne jednej ściany sześcianu są niebieskie. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że pola o numerach

$$111, \quad 311, \quad 313 \quad \text{oraz} \quad 113$$

są czerwone. Popatrzmy na pola o numerach

$$131, \quad 331, \quad 333 \quad \text{oraz} \quad 133,$$

zaznaczonych na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli którekolwiek z tych czterech pól jest czerwone, to mamy czerwoną linię wygrywającą (jedną z czterech głównych przekątnych sześcianu). Jeśli zaś wszystkie są niebieskie, to mamy sytuację taką jak w przypadku 1: wszystkie pola narożne tylnej ściany sześcianu są niebieskie.

Przypadek 3. Dwa pola narożne jednej ściany są czerwone i dwa są niebieskie, przy czym pola jednego koloru leżą na tej samej krawędzi sześcianu. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że pola o numerach

$$111 \quad \text{oraz} \quad 311$$

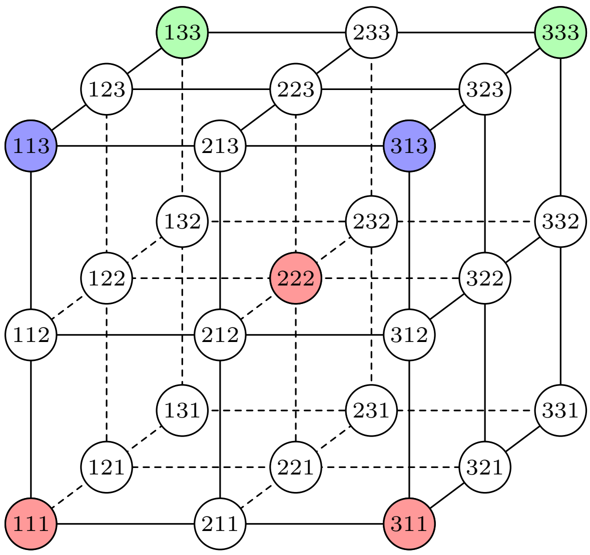
są czerwone, a pola o numerach

$$113 \quad \text{oraz} \quad 313$$

są niebieskie. Popatrzmy na pola o numerach

$$133 \quad \text{oraz} \quad 333$$

zaznaczonych na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeżeli którekolwiek z tych dwóch pól jest czerwone, to mamy czerwoną linię wygrywającą (jedną z głównych przekątnych sześcianu). Jeśli zaś obie są niebieskie, to mamy sytuację taką jak w przypadku 1: wszystkie pola narożne górnej ściany sześcianu są niebieskie.

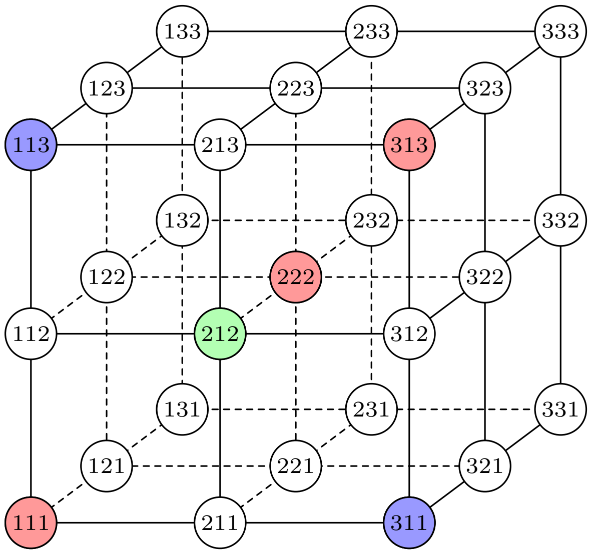
Przypadek 4. Dwa pola narożne jednej ściany są czerwone i dwa są niebieskie, przy czym pola jednego koloru nie leżą na tej samej krawędzi sześcianu. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że pola o numerach

$$111 \quad \text{oraz} \quad 313$$

są czerwone, a pola o numerach

$$113 \quad \text{oraz} \quad 311$$

są niebieskie. Popatrzmy na pole o numerze 212, zaznaczone na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli to pole jest czerwone, to mamy czerwoną linię wygrywającą, jeśli zaś jest niebieskie, to mamy niebieską linię wygrywającą.

Przypadek 5. Trzy pola narożne jednej ściany są niebieskie i jedno jest czerwone. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że pola o numerach

$$111, \quad 113 \quad \text{oraz} \quad 311$$

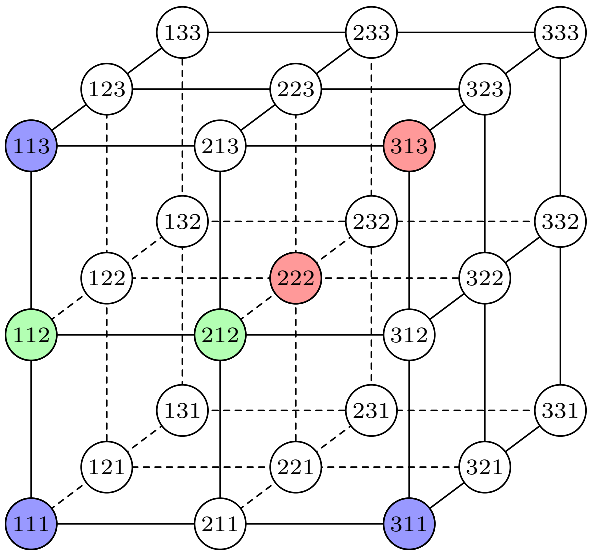
są niebieskie, a pole o numerze

$$313$$

jest czerwone. Popatrzmy najpierw na pola o numerach

$$112 \quad \text{oraz} \quad 212,$$

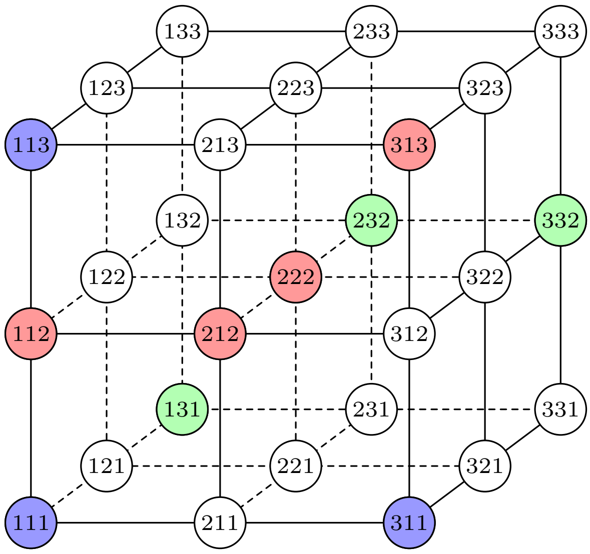
zaznaczone na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli którekolwiek z tych pól jest niebieskie, to mamy niebieską linię wygrywającą. Przypuśćmy zatem, że te pola są czerwone. Popatrzmy wtedy na pola

131, 232 oraz 332,

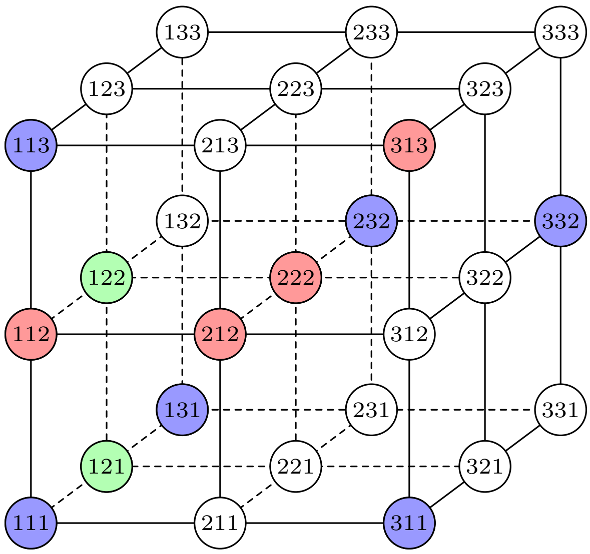
zaznaczone na poniższym rysunku kolorem zielonym:



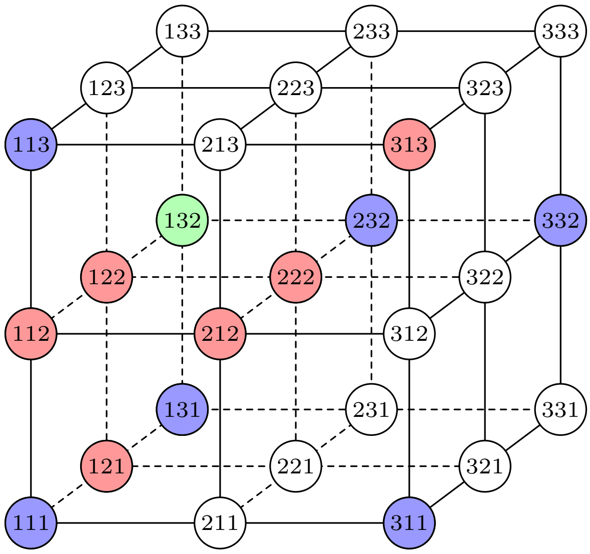
Jeśli którekolwiek z tych pól jest czerwone, to mamy czerwoną linię wygrywającą. Przypuśćmy zatem, że te pola są niebieskie. Popatrzmy wtedy na pola

121 oraz 122,

zaznaczone na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli którekolwiek z tych pól jest niebieskie, to mamy niebieską linię wygrywającą. Przypuśćmy zatem, że te pola są czerwone. Popatrzmy wtedy na pole 132, zaznaczone na następnym rysunku kolorem zielonym:



Niezależnie od koloru tego pola mamy jednokolorową linię wygrywającą.

Pozostaje ostatni przypadek.

Przypadek 6. Trzy pola narożne jednej ściany są czerwone i jedno jest niebieskie. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że pola o numerach

$$111, \quad 113 \quad \text{oraz} \quad 311$$

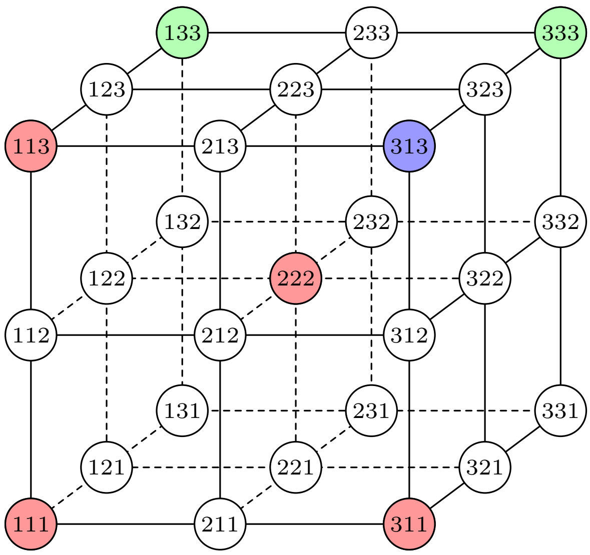
są czerwone, a pole o numerze

$$313$$

jest niebieskie. Popatrzmy teraz na pola o numerach

$$133 \quad \text{oraz} \quad 333,$$

zaznaczone na poniższym rysunku kolorem zielonym:



Jeśli którekolwiek z tych pól jest czerwone, to mamy czerwoną linię wygrywającą. Jeżeli zaś oba są niebieskie, to mamy sytuację taką jak w przypadku 5: trzy pola narożne górnej ściany sześcianu są niebieskie i jedno jest czerwone.

To kończy dowód twierdzenia.

Inaczej wygląda sytuacja, gdy rozważamy wyłącznie wygrywające proste kombinatoryczne. Popatrzmy zatem, jak wyglądają proste kombinatoryczne na trójwymiarowej planszy do gry w kółko i krzyżyk. Tym razem rozpatrujemy słowa długości 3 utworzone z liczb należących do zbioru A, czyli z symboli naszego alfabetu A. Rozpatrujemy także alfabet rozszerzony

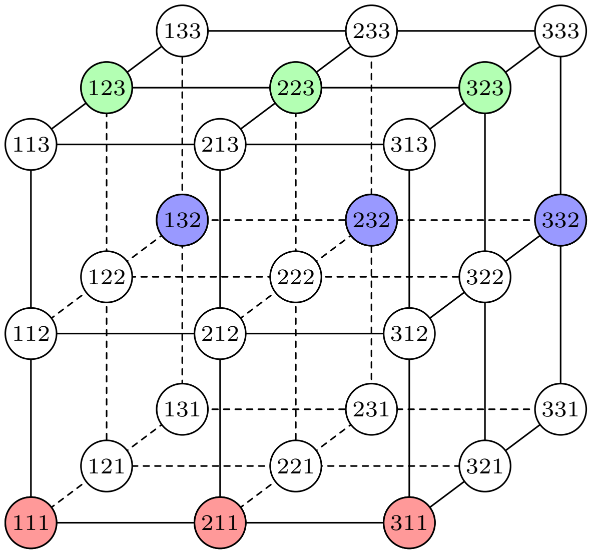
$$A_x = \{1, 2, 3, x\}$$

i słowa długości 3 utworzone z symboli alfabetu rozszerzonego. Podobnie definiujemy proste kombinatoryczne. Dla każdego słowa $w(x)$ zawierającego symbol x mamy prostą kombinatoryczną

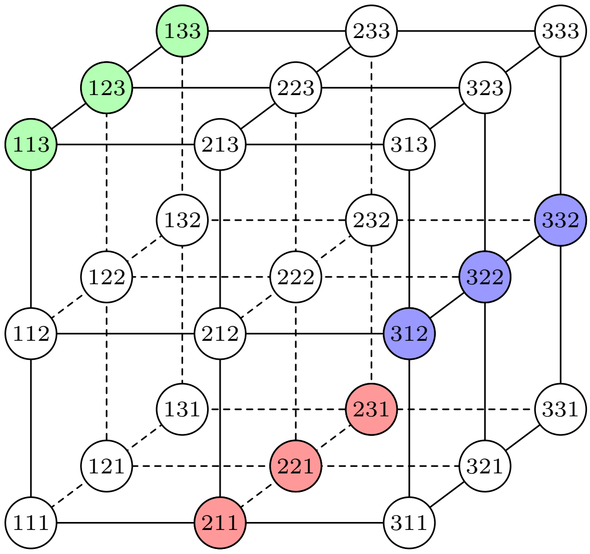
$$\{w(a) : \ a \in A\}.$$

W naszej trójwymiarowej planszy mamy 37 prostych kombinatorycznych. Najpierw mamy 27 prostych kombinatorycznych wyznaczonych przez słowa zawierające dokładnie jeden symbol x. Następnie mamy 9 prostych kombinatorycznych wyznaczonych przez słowa zawierające dokładnie dwa symbole x. Wreszcie mamy jedną prostą wyznaczoną przez słowo xxx. Popatrzmy teraz na przykłady takich prostych. Najpierw proste wyznaczone przez słowa z jednym symbolem x.

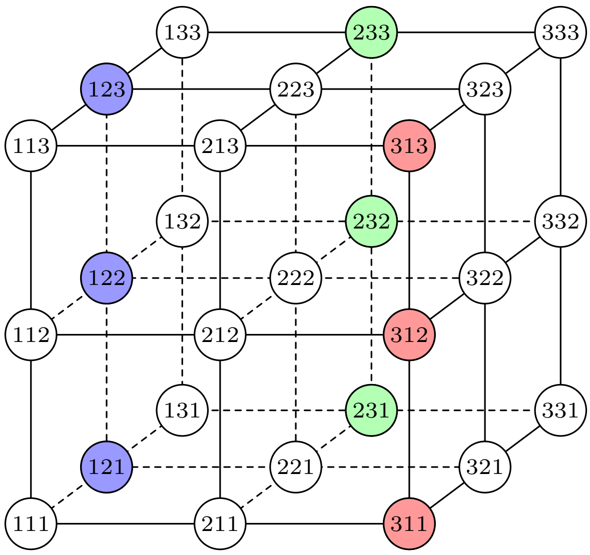
Dla dowolnych $a, b \in A$ mamy prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo xab. Istnieje 9 takich prostych. Na poniższym rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $x11$, prosta niebieska jest wyznaczona przez słowo $x32$ i prosta zielona przez słowo $x23$:



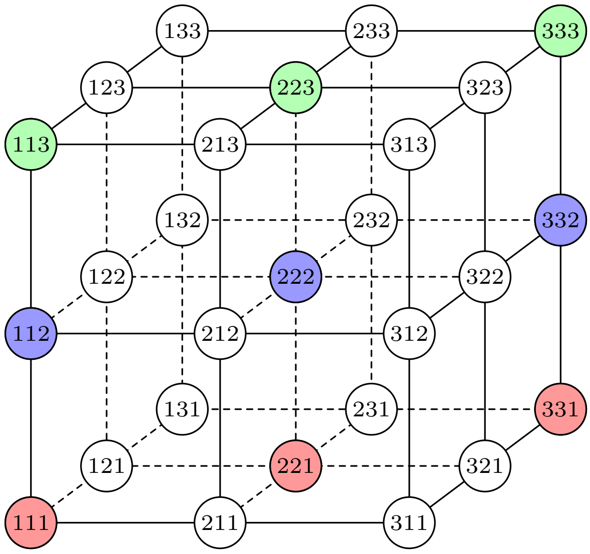
Podobnie dla dowolnych $a, b \in A$ mamy prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo axb. Istnieje 9 takich prostych. Na poniższym rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $2x1$, prosta niebieska jest wyznaczona przez słowo $3x2$ i prosta zielona przez słowo $1x3$:

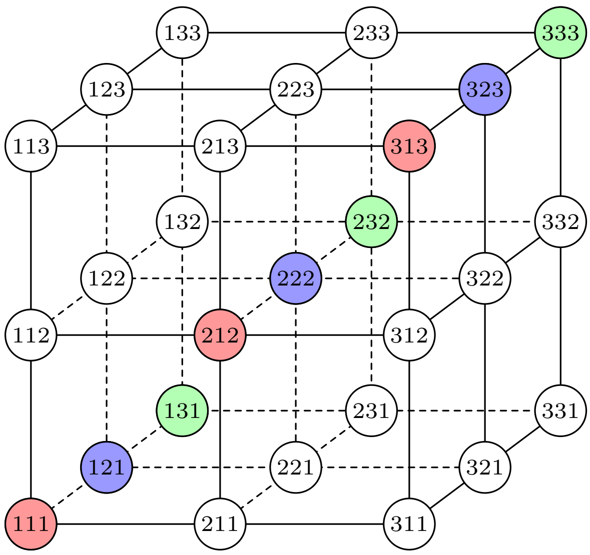


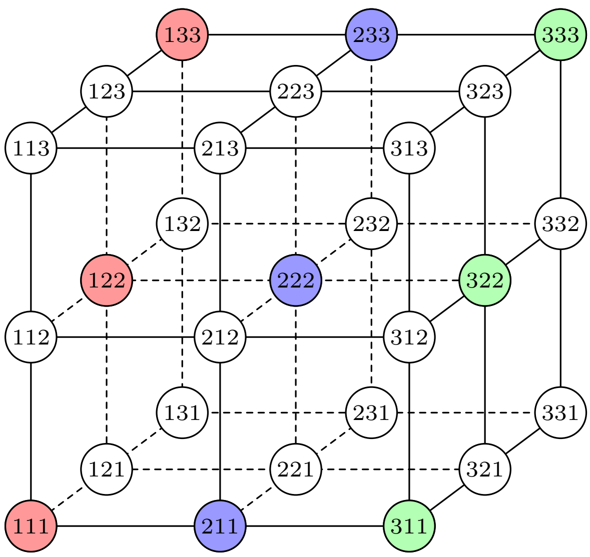
Wreszcie dla dowolnych $a, b \in A$ mamy prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo abx. Istnieje 9 takich prostych. Na poniższym rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $31x$, prosta niebieska jest wyznaczona przez słowo $12x$ i prosta zielona przez słowo $23x$:



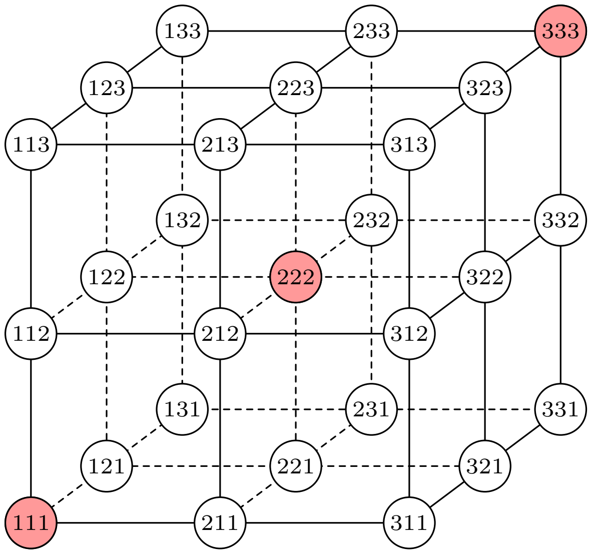
Teraz popatrzmy na proste wyznaczone przez słowa z dwoma symbolami x. Istnieje 9 takich prostych i na kolejnych rysunkach zobaczymy wszystkie. Na pierwszym rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $xx1$, prosta niebieska jest wyznaczona przez słowo $xx2$ i prosta zielona jest wyznaczona przez słowo $xx3$. Na drugim rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $x1x$, prosta niebieska przez słowo $x2x$ i prosta zielona przez słowo $x3x$. Wreszcie na trzecim rysunku prosta czerwona jest wyznaczona przez słowo $1xx$, prosta niebieska przez słowo $2xx$ i prosta zielona przez słowo $3xx$:


133 233 333
123 223 323
113 213 313
132 232 332
122 222 322
112 212 312
131 231 331
121 221 321
111 211 311


133 233 333
123 223 323
113 213 313
132 232 332
122 222 322
112 212 312
131 231 331
121 221 321
111 211 311


133 233 333
123 223 323
113 213 313
132 232 332
122 222 322
112 212 312
131 231 331
121 221 321
111 211 311

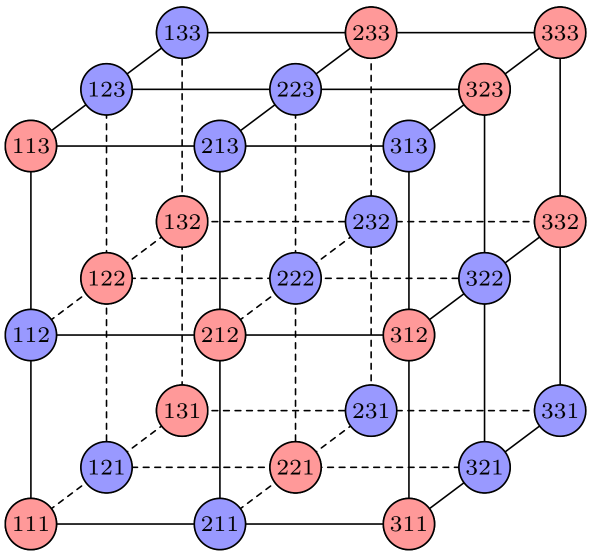
Wreszcie mamy prostą wyznaczoną przez słowo xxx. Na poniższym rysunku jest ona zaznaczona kolorem czerwonym:



Mamy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.2. Istnieje kolorowanie wszystkich pól trójwymiarowej planszy dwoma kolorami takie, że nie istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna.

Dowód. Można łatwo sprawdzić (co pozostawię Czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie), że przy kolorowaniu przedstawionym na następnym rysunku żadna prosta kombinatoryczna nie jest jednokolorowa:



To kończy dowód twierdzenia.

A jak jest w wyższych wymiarach? Przyjrzyjmy się prostym kombinatorycznym w przypadku ogólnym. Przypuśćmy, że mamy skończony zbiór A, który nazwiemy alfabetem. Będziemy także rozważać alfabet rozszerzony

$$A_x = A \cup \{x\}.$$

Następnie planszą do gry w kółko i krzyżyk nazwiemy zbiór A^n słów długości n utworzonych z symboli alfabetu A. Proste kombinatoryczne na tej planszy definiujemy tak jak poprzednio. Każde słowo $w(x)$ długości n, utworzone z symboli alfabetu rozszerzonego i zawierające co najmniej jeden symbol x, określa prostą kombinatoryczną

$$\{w(a): \ a \in A\}.$$

Wówczas mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.3. (Hales, Jewett, 1963) Dane są dwie liczby naturalne m i k. Następnie dany jest alfabet skończony A mający m symboli (tzn. $|A| = m$). Wówczas istnieje liczba naturalna n taka, że dla każdego kolorowania k kolorami

$$c : A^n \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

planszy A^n istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna.

W szczególności z twierdzenia Halesa – Jewetta wynika, że dla odpowiednio dużego wymiaru przestrzeni gra w kółko i krzyżyk (prowadzona przez k osób) na wielowymiarowej planszy, w której linie wygrywające mają długość m, nie może zakończyć się remisem.

Dla danych liczb m i k najmniejszą liczbę n taką jak w twierdzeniu 8.3 oznaczamy symbolem $HJ(m, k)$ i nazywamy liczbą Halesa – Jewetta. Wyznaczenie tych liczb nie jest łatwe. Znamy tylko kilka wartości funkcji HJ i niektóre szacowania dolne i górne. Pokażę teraz niektóre z nich. Wyznaczenie liczb Halesa – Jewetta dla alfabetu dwuelementowego jest łatwe.

Twierdzenie 8.4. $HJ(2, k) \geq k$.

Dowód. Niech będzie dany alfabet

$$A = \{1, 2\}.$$

Rozważamy następnie planszę A^{k-1}. Definiujemy teraz kolorowanie

$$c : A^{k-1} \to \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$$

tej planszy k kolorami w następujący sposób:

$$c(w) = \text{liczba jedynek w słowie } w$$

dla $w \in A^{k-1}$. Pokażę, że żadna prosta kombinatoryczna nie jest jednokolorowa. Niech $w(x)$ będzie słowem długości $k-1$ zawierającym p jedynek i q symboli x (gdzie $p \geq 0$, $q > 0$ oraz $p + q \leq k - 1$). Wówczas słowo $w(1)$ zawiera $p + q$ jedynek, a słowo $w(2)$ zawiera p jedynek. Zatem

$$c\big(w(1)\big) = p + q \quad \text{oraz} \quad c\big(w(2)\big) = p.$$

Ponieważ $q > 0$, więc $p + q \neq p$, czyli

$$c\big(w(1)\big) \neq c\big(w(2)\big).$$

To znaczy, że prosta kombinatoryczna wyznaczona przez słowo $w(x)$ nie jest jednokolorowa. To kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 8.5. $HJ(2,k) \leq k$.

Dowód. Niech będzie dany alfabet

$$A = \{1,2\}$$

oraz niech będzie dane kololrowanie

$$c\colon A^k \to \{1,2,\ldots,k\}.$$

Mamy wykazać, że w zbiorze A^k istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna. Definiujemy słowa

$$w_1, w_2, \ldots, w_k, w_{k+1} \in A^k$$

w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \underbrace{22\ldots2}_{k},\\
w_2 &= 1\underbrace{22\ldots2}_{k-1},\\
\ldots &\quad \ldots\\
w_i &= \underbrace{11\ldots1}_{i-1}\underbrace{22\ldots2}_{k-i-1},\\
\ldots &\quad \ldots\\
w_k &= \underbrace{11\ldots1}_{k-1}2,\\
w_{k+1} &= \underbrace{11\ldots1}_{k}.
\end{aligned}$$

Wówczas jeśli $1 \leq i < j \leq k+1$, to zbiór $\{w_i, w_j\}$ jest prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo

$$w(x) = \underbrace{11\ldots1}_{i-1}\underbrace{xx\ldots x}_{j-i}\underbrace{22\ldots2}_{k-j+1}.$$

Na przykład, jeśli $k = 12$, to mamy

$$\begin{aligned}
w_4 &= 111222222222,\\
w_8 &= 111111122222.
\end{aligned}$$

Niech teraz

$$w(x) = 111xxxx22222.$$

Wówczas

$$w_4 = w(2) \quad \text{oraz} \quad w_8 = w(1).$$

Zatem zbiór $\{w_4, w_8\}$ jest prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo $w(x)$.

Powróćmy do dowodu twierdzenia. Mamy $k+1$ słów w_i (dla $i=1,2,\ldots,k,k+1$) oraz k kolorów. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwa słowa w_i oraz w_j (gdzie $0 \leq i < j \leq k+1$) mają ten sam kolor. Zatem prosta kombinatoryczna $\{w_i, w_j\}$ jest jednokolorowa. To kończy dowód twierdzenia.

Wniosek 8.6. $HJ(2,k) = k$.

Następnie zajmiemy się alfabetem trzyliterowym. Mamy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.7. $HJ(3,2) > 3$.

Dowód tego twierdzenia wynika natychmiast z twierdzenia 8.2.

Dość łatwo można pokazać szacowanie górne liczby $HJ(3,2)$. Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.8. $HJ(3,2) \leq 8$.

Dowód. Niech dany będzie alfabet skończony

$$A = \{1,2,3\}$$

oraz dowolne kolorowanie dwoma kolorami elementów zbioru A^8 (tzn. zbioru słów długości 8 utworzonych z symboli alfabetu A). Pokażemy, że w zbiorze A^8 istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna.

Przyjmijmy, że dwoma użytymi kolorami są: czerwony i niebieski. Załóżmy następnie, że w zbiorze A^8 nie istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna. Weźmy następnie dowolne sześć symboli alfabetu A:

$$a, b, c, d, e, f \in A.$$

Popatrzmy na następujące trzy słowa długości 8:

$$abcdef11, \quad abcdef12 \quad \text{oraz} \quad abcdef22.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwa z tych słów są tego samego koloru. To znaczy, że zbiór A^6 słów długości 6 można podzielić na sześć zbiorów (niekoniecznie rozłącznych):

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef11 \quad \text{oraz} \quad abcdef12 \quad \text{są czerwone}\},\\
X_2 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef11 \quad \text{oraz} \quad abcdef22 \quad \text{są czerwone}\},\\
X_3 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef12 \quad \text{oraz} \quad abcdef22 \quad \text{są czerwone}\},\\
X_4 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef11 \quad \text{oraz} \quad abcdef12 \quad \text{są niebieskie}\},\\
X_5 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef11 \quad \text{oraz} \quad abcdef22 \quad \text{są niebieskie}\},\\
X_6 &= \{abcdef \in A^6 : \ abcdef12 \quad \text{oraz} \quad abcdef22 \quad \text{są niebieskie}\}.
\end{aligned}$$

Weźmy następnie siedem następujących słów długości 6:

$$111111, \quad 111112, \quad 111122, \quad 111222, \quad 112222, \quad 122222 \quad \text{oraz} \quad 222222.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej dwa z tych siedmiu słów należą do tego samego zbioru X_i. Niech będą to na przykład slowa

$$111112 \quad \text{oraz} \quad 112222.$$

Rozważamy teraz trzy przypadki.

Przypadek 1. Słowa

$$111112 \quad \text{oraz} \quad 112222$$

należą do zbioru $X_1 \cup X_4$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że te słowa należą do zbioru X_1. To znaczy, że słowa

$$11111211, \quad 11111212, \quad 11222211 \quad \text{oraz} \quad 11222212$$

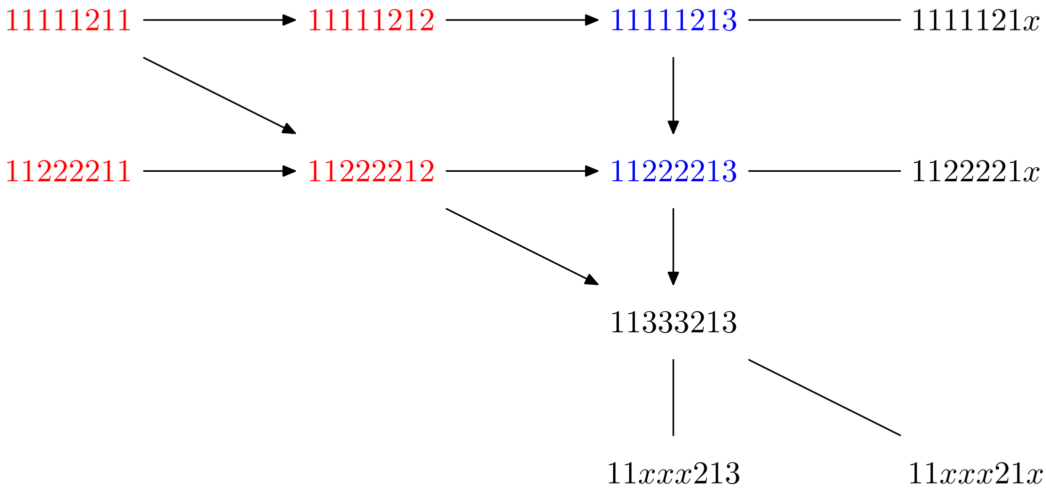
są czerwone. Ponieważ słowa

$$11111211, \quad 11111212 \quad \text{oraz} \quad 11111213$$

tworzą prostą kombinatoryczną (wyznaczoną przez słowo $1111121x$), więc z przyjętego założenia wynika, że słowo 11111213 jest niebieskie. Podobnie słowa

$$11222211, \quad 11222212 \quad \text{oraz} \quad 11222213$$

tworzą prostą kombinatoryczną (wyznaczoną przez słowo 112222213). Stąd wynika, że słowo 11222213 jest niebieskie. Popatrzmy teraz na słowo 11333213 i zastanówmy się, jaki ma ono kolor. Tę sytuację możemy zilustrować następującym rysunkiem:



Jeśli słowo 11333213 jest czerwone, to mamy czerwoną prostą kombinatoryczną

$$11111211, \quad 11222212 \quad \text{oraz} \quad 11333213$$

wyznaczoną przez słowo $11xxx21x$. Jeśli zaś słowo 11333213 jest niebieskie, to mamy prosą kombinatoryczną

$$11111213, \quad 11222213 \quad \text{oraz} \quad 11333213$$

wyznaczoną przez słowo $11xxx213$. Obie sytuacje są niemożliwe, a więc przypadek 1 doprowadził do sprzeczności.

Przypadek 2. Słowa

$$111112 \quad \text{oraz} \quad 112222$$

należą do zbioru $X_2 \cup X_5$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że te słowa należą do zbioru X_2. To znaczy, że słowa

$$11111211, \quad 11111222, \quad 11222211 \quad \text{oraz} \quad 11222222$$

są czerwone. Tę sytuację możemy, podobnie jak to miało miejsce w przypadku 1, zilustrować następującym rysunkiem:

$$\begin{tikzcd}
11111211 \arrow[r] \arrow[dr] & 11111222 \arrow[r] & 11111233 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 111112xx \\
11222211 \arrow[r] & 11222222 \arrow[r] \arrow[dr] & 11222233 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 112222xx \\
 & & 11333233 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 11xxx233 & 11xxx2xx
\end{tikzcd}$$

Tym razem patrzymy, jaki kolor ma słowo 11333232. Jeśli jest ono czerwone, to mamy prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo $11xxx2xx$. Jeśli zaś jest niebieskie, to mamy prostą kombinatoryczną wyznaczoną przez słowo $11xxx233$. Ten przypadek także doprowadził do sprzeczności.

Przypadek 3. Słowa

$$111112 \quad \text{oraz} \quad 112222$$

należą do zbioru $X_3 \cup X_6$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że te słowa należą do zbioru X_3. Tę sytuację, tak jak poprzednie dwie, możemy zilustrować rysunkiem:

$$\begin{tikzcd}
11111212 \arrow[r] \arrow[dr] & 11111222 \arrow[r] & 11111232 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 111112x2 \\
11222212 \arrow[r] & 11222222 \arrow[r] \arrow[dr] & 11222232 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 112222x2 \\
 & & 11333232 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 11xxx232 & 11xxx2x2
\end{tikzcd}$$

W tym przypadku patrzymy, jaki kolor ma słowo 11333232 i znów dochodzimy do sprzeczności.

Otrzymane sprzeczności dowodzą, że przyjęte założenie o braku jednokolorowej prostej kombinatorycznej jest nieprawdziwe. To znaczy, że w zbiorze A^8 istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna. W ten sposób dowód twierdzenia został zakończony.

Znana jest dokładna wartość liczby $HJ(3,2)$. Mamy bowiem następujące twierdzenie, które podam tutaj bez dowodu.

Twierdzenie 8.9. (Hindman, Tressler, 2014) $HJ(3,2) = 4$.

Na zakończenie pokażę szkic dowodu twierdzenia van der Waerdena z twierdzenia Halesa – Jewetta.

Twierdzenie 8.10. Niech $n = HJ(10,k)$. Niech następnie

$$c : \{0, 1, \ldots, 10^n - 1\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

będzie kolorowaniem zbioru liczb $X = \{0, 1, \ldots, 10^n - 1\}$ za pomocą k kolorów. Wówczas w zbiorze X istnieje jednokolorowy ciąg arytmetyczny długości 10.

Dowód. Weźmy alfabet

$$A = \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Wówczas słowa długości n utworzone z symboli tego alfabetu możemy utożsamić z liczbami ze zbioru X. Każde takie słowo (po ewentualnym odrzuceniu co najwyżej $n-1$ zer stojących na początku) jest zapisem dziesiętnym liczby mającej co najwyżej n cyfr, a więc liczby ze zbioru X. Kolorowanie c jest więc — po tym utożsamieniu — kolorowaniem zbioru A^n. Z twierdzenia Halesa – Jewetta wynika, że w zbiorze A^n istnieje jednokolorowa prosta kombinatoryczna. Niech ta prosta będzie wyznaczona przez słowo $w(x)$ (zawierające co najmniej jeden symbol x). Wówczas prosta kombinatoryczna

$$\{w(a) : \ a \in A\} = \{w(0), w(1), \ldots, w(9)\}$$

jest — po rozważanym utożsamieniu — ciągiem arytmetycznym długości 10.

Popatrzmy na przykład. Jeśli mamy słowo

$$w(x) = 11x3x95xx203,$$

to prosta kombinatoryczna wyznaczona przez to słowo składa się ze słów

$$110309500203,\ 111319511203,\ 112329522203,\ \ldots,\ 118389588203,\ 119399599203.$$

Te słowa są zapisem dziesiętnym liczb tworzących ciąg arytmetyczny o różnicy

$$1010011000.$$

To kończy dowód twierdzenia.

Oczywiście w dowodzie twierdzenia van der Waerdena w całej ogólności (tzn. dla ciągów arytmetycznych dowolnej długości m) wystarczy rozważyć alfabet

$$A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

i traktować słowo utworzone z symboli tego alfabetu jako zapis liczby naturalnej w systemie pozycyjnym o podstawie m. Szczegóły tego dowodu pozostawię Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

9. Uwagi bibliograficzne

Wskażę tutaj źródła dowodów twierdzeń i rozwiązań zadań, które podałem w tym wykładzie.

1. Kilka zadań na początek

Rozwiązanie zadania 1 wziąłem z archiwum Olimpiady Matematycznej: `archom.ptm.org.pl`.

Zadanie 2 i jego rozwiązanie wziąłem z książki:

Mathemetical Contests, The Australian Scene 2016, Australian Mathematics Trust Publishing, Canberra 2016 (str. 97 i 130).

2. Galeria sztuki

Dowód twierdzenia 2.1 znajduje się w ksiąązce:

M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

3. Kolorowanie grafów

O kolorowaniu grafów i twierdzeniu Brooksa można poczytać w książce:

R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

Dowód twierdzenia Brooksa można także znaleźć w pracy:

L. Lovász, Three short proofs in graph theory, J. Combin. Theory Ser. B 19(3) (1975), 269 – 271 (praca znajduje się w Internecie).

4. Kolorowanie grafów płaskich i map

O kolorowaniu grafów płaskich i map można poczytać w książkach:

R. J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer 2008.

5. Kolorowanie płaszczyzny

O problemie kolorowania płaszczyzny można przeczytać w książce:

A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer 2008.

Dowód, że $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$ znajduje się w pracy

A. D. N. J. de Grey, The Chromatic Number of a Plane is at Least 5, `arxiv:1804.02385v3` (znajduje się w Internecie).

Najmniejszy aktualnie graf jest opisany w pracy

M. J. H. Heule, Computing Small Unit-Distance Graphs with Chromatic Number 5, `arxiv:1805.12181v1` (znajduje się w Internecie).

6. Kolorowanie liczb całkowitych

W pracy

G. G. Chapman, Coloring Distance Graphs on the Integers, `arxiv:math/9805084v1` znajduje się dowód twierdzenia 6.9. Autor pisze też, że otwarty jest problem znalezienia liczby chromatycznej $\chi(\mathbb{N}, D)$, gdzie D jest zbiorem kwadratów. Autor pisze też, że jest możliwe, iż ta liczba jest nieskończona.

Dobrym wstępem do problematyki tzw. Integral Distance Graphs jest praca

J.-J. Chen, G. J. Chang, K.-C. Huang, Integral Distance Graphs,

Którą znalazłem w Internecie. W tych dwóch pracach jest też obszerna bibliografia.

7. Jednokolorowe ciągi arytmetyczne

Rozwiązanie zadania 4 wziąłem z archiwum Olimpiady Matematycznej:
`archom.ptm.org.pl`.

Twierdzenie 7.2 jest dobrze znane. Istnieje wiele książek i prac, w których można znaleźć dowód twierdzenia van der Waerdena. Są to m. in.:

R. Graham, B. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, NY (1980),

B. L. Landman, A. Robertson, *Ramsey Theory on the Integers*, AMS, 2004.

Szkic dowodu znajduje się także w książce:

V. Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT Warszawa 1997.

Dowód korzystający z pojęcia r-wachlarza zaczerpnąłem z wykładów Imre Leadera: *Part III Ramsey theory, Michaelmas term 2013*, które znalazłem w Internecie. Znajdują się na stronie:

`https://maths.ucd.ie/~stiofainf/lecture-notes/ramsey.pdf`

(Chyba jednak łatwiej je znaleźć wpisując tytuł i autora do Google'a: Imre Leader Part III Ramsey Theory,)

Podobny dowód znajduje się w pracy:

T. Tao, The Ergodic and Combinatorial Appoaches to Szemerédi's Theorem,
`arxiv:math/0604456v1` (znajduje się w Internecie).

8. Gra w kółko i krzyżyk

Dowody twierdzeń 8.4 i 8.5 oraz informację o twierdzeniu 8.9 wziąłem z pracy:

N. Hindman, E. Tressler, The First Nontrivial Hales-Jewett Number is Four, *Ars Combinatoria* 113 (2014), 385 – 390. Ta praca znajduje się w Internecie.

Dowód twierdzenia 8.8 znajduje się w angielskiej Wikipedii pod hasłem *Hales-Jewett theorem*.

Oszacowanie liczby $HJ(4, 2)$, które podałem na wykładzie ($11 < HJ(4, 2) \leq 10^{11}$), zaczerpnąłem z pracy:

M. Lavrov, An Upper Bound for the Hales-Jewett Number $HJ(4, 2)$,
`arxiv:1504.02753v1` (znajduje się w Internecie).

Twierdzenie 8.10 jest znane i można je znaleźć na stronie 38 cytowanej wyżej książki:

R. Graham, B. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, NY (1980),

W tej książce można też znaleźć dowód twierdzenia Halesa-Jewetta. Dowód tego twierdzenia można także znaleźć w cutowanych wyżej wykładach Imre Leadera oraz w pracy Tao.