

# Suma odwrotności kwadratów

Konferencja SEM „Kalejdoskop matematyczny”

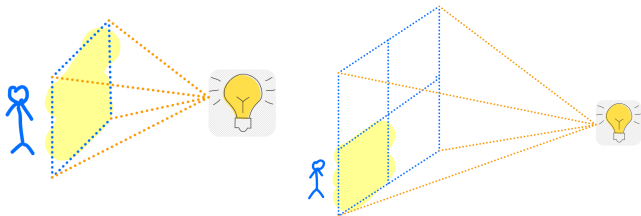
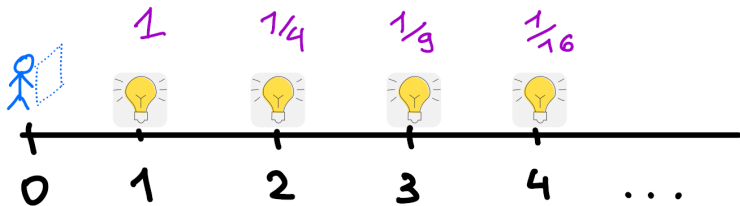
Mateusz Dębowski

Żerków, 22-24.10.2021 r.

Co chcemy wykazać?

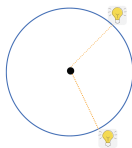
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

# Interpretacja fizyczna



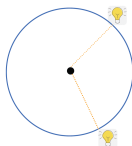
# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora

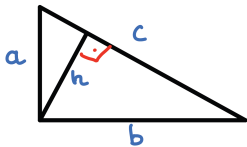


# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora



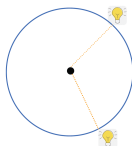
- Odwrócone twierdzenie Pitagorasa



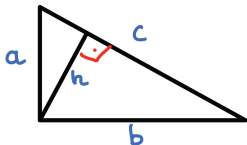
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora



- Odwrócone twierdzenie Pitagorasa

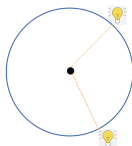


$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

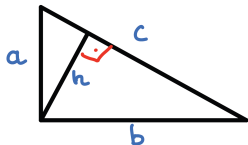
- Dowód powyższego:

# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora



- Odwrócone twierdzenie Pitagorasa



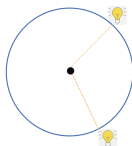
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

- Dowód powyższego:

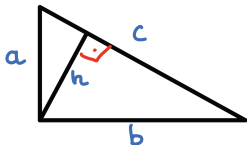
$$ab = ch$$

# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora



- Odwrócone twierdzenie Pitagorasa



$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

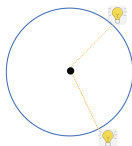
- Dowód powyższego:

$$ab = ch \Rightarrow a^2 b^2 = c^2 h^2$$

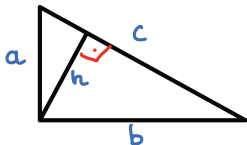


# Co wykorzystamy?

- Ilość światła, które dociera do obserwatora zależy tylko od odległości żarówki od obserwatora



- Odwrócone twierdzenie Pitagorasa

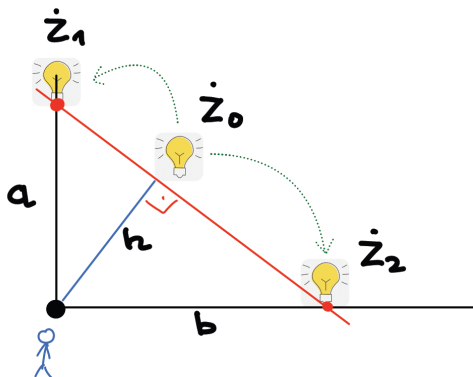


$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

- Dowód powyższego:

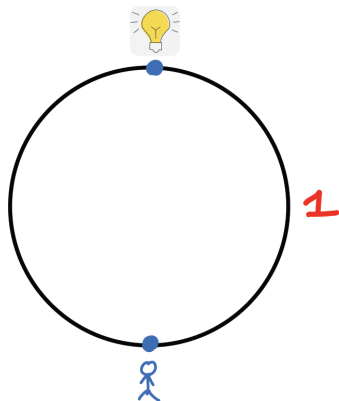
$$ab = ch \Rightarrow a^2 b^2 = c^2 h^2 \Rightarrow a^2 b^2 = (a^2 + b^2) h^2$$

# Co to oznacza u nas?



$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2} = \dot{z}_0$$

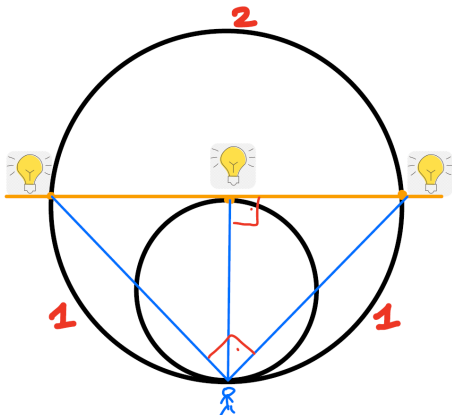
Weźmy jedną żarówkę...



Ilość światła z żarówki wynosi

$$\left(\frac{1}{2r}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

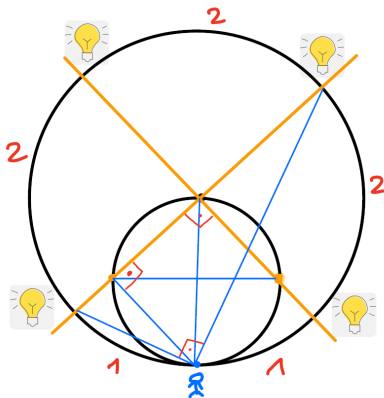
# Powiększmy okrąg i liczbę żarówek



Ilość światła z obu żarówek wynosi

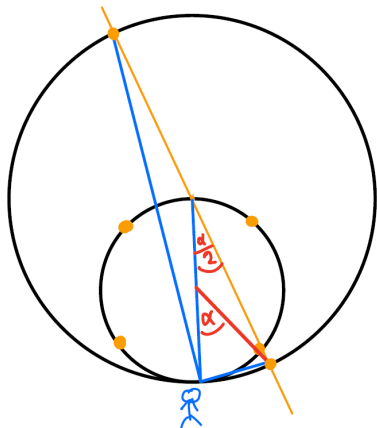
$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = \dot{Z}_0 = \frac{\pi^2}{4}$$

# Kolejne powiększanie



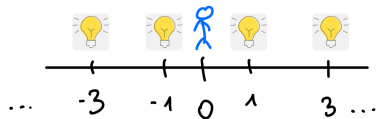
Ilość światła ze wszystkich żarówek wynosi

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = \frac{\pi^2}{4}$$

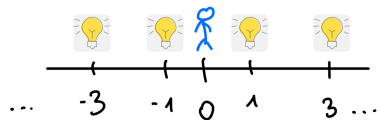


$$\sum_{i=1}^8 \dot{Z}_i = \frac{\pi^2}{4}$$

# I przechodzimy do granicy



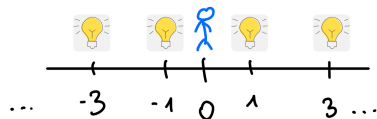
# I przechodzimy do granicy



$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$



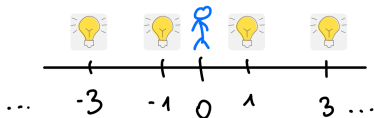
# I przechodzimy do granicy



$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

# I przechodzimy do granicy

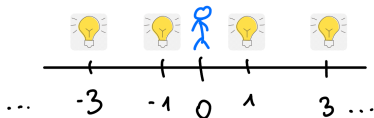


$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4} S$$

# I przechodzimy do granicy



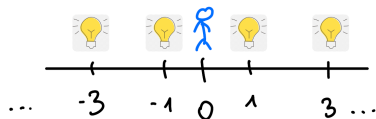
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4}S$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$$

# I przechodzimy do granicy



$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4}S$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Dziękuję za uwagę!