O dzieleniu

Adam Dzedzej
Uniwersytet Gdański

Żerków, konferencja SEM
październik 2021

Plan

W gąszczu ułamków

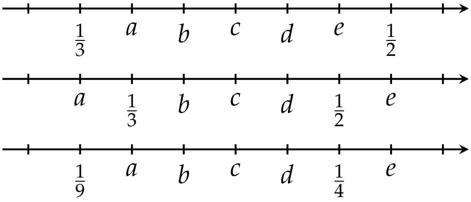
Na warsztatach dla „Zdolych z Pomorza” uczniów klas 7-8 mierzyliśmy się z następującą (lub podobną) serią zadanek. Nie będę omawiał wszystkich, bo nie ma na to czasu, ale podzielę się chętnie tym co zdawało się lepiej angażować uwagę uczniów.
Najpierw *standardy* by sprawdzić, czy operacje na dziesiętnych ułamkach są w ogóle jakoś przyswojone

1. Zamień na ułamek zwykły liczby $3{,}(4)$ i $0{,}4(12)$.
2. Podaj rozwinięcie dziesiętne liczby $0{,}(5) + 0{,}(6)$.
3. Ustaw od najmniejszej do największej liczby

$$0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}12 \quad 0{,}1(2) \quad 0{,}(12) \quad 0{,}212$$
$$0{,}(21) \quad 0{,}1(212) \quad 0{,}2(1) \quad 0{,}(1) \quad 0,(2)$$

W gąszczu ..

4. Podaj współrzędne a, b, c, d, e punktów na osi liczbowej



5. Spośród poniższych ułamków wybierz te, które mają rozwinięcie dziesiętne skończone:

$$\frac{3}{15}, \frac{1}{123}, \frac{3}{125}, \frac{1}{550}, \frac{1}{10^{13}}, \frac{77}{2^{77}}, \frac{1}{23}, \frac{7}{350}, \frac{44}{55}, \frac{1}{12345}, \frac{101}{2^8 \cdot 5^4}$$

6. Uzasadnij, że każda liczba wymierna ma skończone lub okresowe rozwinięcie dziesiętne.
7. Podaj przykład liczby, która nie jest wymierna.

Kalkulator

Mniej więcej tutaj rozwiązywaliśmy zadanie, które chyba najbardziej wciągało uczestników warsztatów.

Zadanie 5A.
Znaleźć rozwinięcie okresowe $\frac{1}{23}$ *za pomocą zwykłego kalkulatora.*

Kalkulator — Rozwiązanie

Zadanie 5A.
Znaleźć rozwinięcie okresowe $\frac{1}{23}$ *za pomocą zwykłego kalkulatora.*

Przyjmuję, że kalkulator daje 8 cyfr rozwinięcia, choć te z komórek czasem podawały 10 lub 12, ale to i tak za mało.

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434783 \quad \frac{2}{23} = 0{,}0869565$$
$$\frac{3}{23} = 0{,}1304348 \quad \frac{4}{23} = 0{,}1739130$$
$$\frac{5}{23} = 0{,}2173913 \quad \frac{11}{23} = 0.4782609\ldots$$

Kalkulator — Rozwiązanie c.d.

Ostatnią cyfrę jako niepewną odrzucamy i znajdujemy powtarzające się sekwencje cyfr

$$
\frac{1}{23} = 0{,}043478 \qquad \frac{11}{23} = 0{,}4782609
$$
$$
\frac{6}{23} = 0{,}\,260869 \qquad \frac{2}{23} = 0{,}086956
$$

W ten sposób jak po sznurku uzyskujemy pełen okres:

$$
\frac{1}{23} = 0{,}(0434782608695652173913)
$$

Zadanie 6.
Uzasadnij, że każda liczba wymierna ma skończone lub okresowe rozwinięcie dziesiętne.

Oczywiście wynika to z własności **algorytmu dzielenia pisemnego**. Jednak wydostać tę odpowiedź od grupy zazwyczaj nieoczekiwanie trudno.

Zadanie 6.
Uzasadnij, że każda liczba wymierna ma skończone lub okresowe rozwinięcie dziesiętne.

Oczywiście wynika to z własności **algorytmu dzielenia pisemnego**. Jednak wydostać tę odpowiedź od grupy zazwyczaj nieoczekiwanie trudno.

Zadanie 7.
Podaj przykład liczby, która nie jest wymierna.

Tutaj chodziło o liczbę w rodzaju

$$0{,}1010010001000010000010 0..$$

by podać regułę i wykorzystać wcześniej przypomniany fakt. Czasem padały przykłady takie jak π lub $\sqrt{2}$, a wtedy pojawiał się dowód niewymierności tej drugiej.

W gąszczu ...

8. Rozstrzygnij, czy jest wymierna liczba $0,11235831459\ldots$, której każda cyfra, począwszy od trzeciej po przecinku, jest cyfrą jedności sumy dwóch cyfr poprzednich.
9. Uzasadnij, że między dwiema liczbami wymiernymi zawsze istnieje inna liczba wymierna.
10. Uzasadnij, że między dwiema liczbami wymiernymi zawsze istnieje liczba niewymierna.

W gąszczu ....

11. Wiadomo, że suma dwóch liczb wymiernych p i q jest dodatnia. Czy wynika z tego, że
    - 11.(A) iloczyn p i q jest dodatni;
    - 11.(B) $(p+1)\cdot(q+1) > p\cdot q$;
    - 11.(C) p^3+q^3 jest dodatnie?
12. Liczby a, b, c, d są dodatnie, a ułamki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ są nieskracalne. Czy wynika z tego, że
    - 12.(A) ułamek $\frac{c}{b}$ jest nieskracalny;
    - 12.(B) ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ jest nieskracalny;
    - 12.(C) ułamek $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ jest nieskracalny?
13. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Czy wynika z tego, że
    - 13.(A) liczba $x+y$ jest niewymierna;
    - 13.(B) liczba $x\cdot y$ jest niewymierna;
    - 13.(C) liczba $x+y+x\cdot y$ jest niewymierna?

Plan

Podzielność

Coś miało być, bo przecież algorytm dzielenia wielomianów ma wiele wspólnego z dzieleniem pisemnym liczb. Zadań wykorzystujących sam algorytm nie znalazłem, więc...

Zadanie 8.
(XLVI OM - II - Zadanie 1) Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

Plan

Liczby

Wielomiany

Płaszczyzna

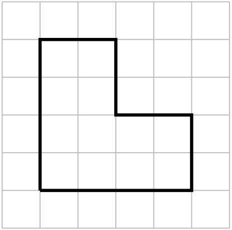
Rzeczy

Co dzielimy?

Kalejdoskop zawiera trochę rozważań o parkietażach, a więc o dzieleniu całej płaszczyzny. Nie wiem, czy umiałbym coś twórczo dodać do tego, co tam się znajduje, więc zadam kilka łamigłówek, które wydają mi się ciekawe. Twórcami łamigłówek są Mineyuki Uyematsu and Michael Reid.
`https://www.mathpuzzle.com/mine.html`

Meta zadanie

Zadanie 0.
Podzielić daną figurę na kilka **podobnych** *części.*

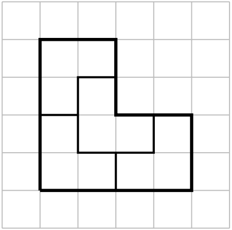


- dzielimy figurę na n podobnych części
- niektóre części mogą być przystające
- części powinny być spójne
- bez fraktalnych cięć

Oczywiście jeśli istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, to chcemy znaleźć ich jak najwięcej.

Meta zadanie

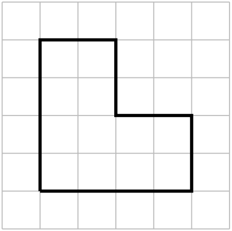
Zadanie 0.
Podzielić daną figurę na kilka **podobnych** *części.*

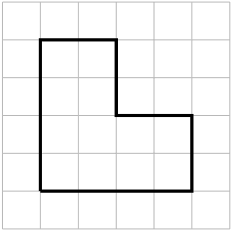


- dzielimy figurę na n podobnych części
- niektóre części mogą być przystające
- części powinny być spójne
- bez fraktalnych cięć

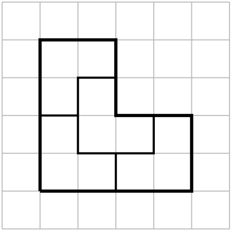
Oczywiście jeśli istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, to chcemy znaleźć ich jak najwięcej.

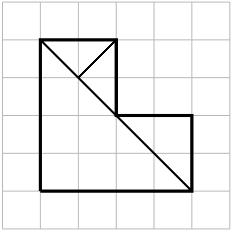
Zadanie 1.
Podzielić na cztery **podobne** *części.*



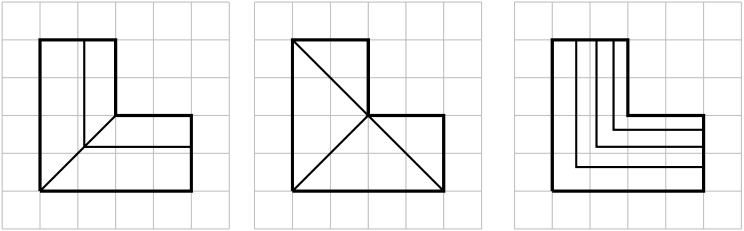


Zadanie 1.
Podzielić na cztery **podobne** *części.*



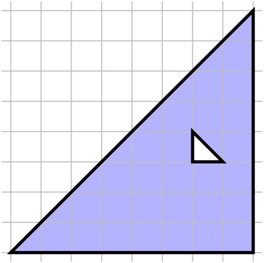


Zadanie 1.
Podzielić na cztery **podobne** *części.*

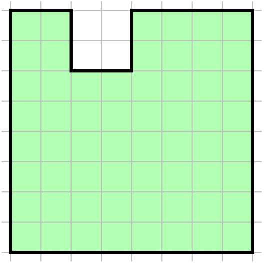


Zadanie 2.
Podzielić na dwie **podobne** *części.*

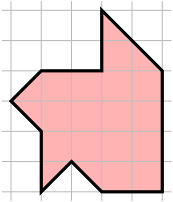
(A)



(B)

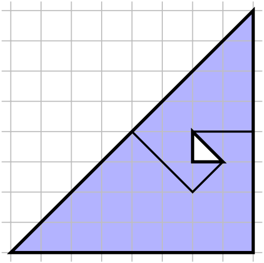


(C)

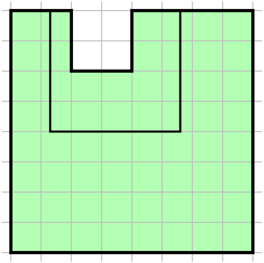


Zadanie 3.
Podzielić na dwie **podobne** *części.*

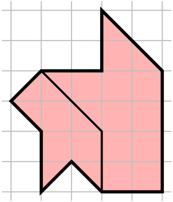
(A)



(B)

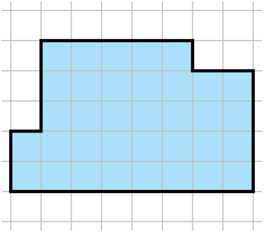


(C)

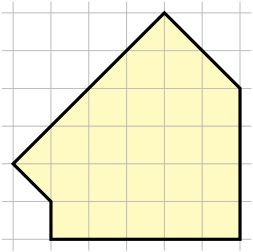


Zadanie 4.
Podzielić na trzy **podobne** *części.*

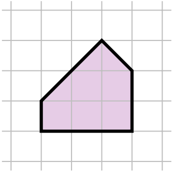
(A)



(B)



(C)



Plan

Liczby

Wielomiany

Płaszczyzna

Rzeczy

Metoda podziału przedmiotów niepodzielnych

Następującą metodę podziału przedmiotów niepodzielnych podaje "Kalejdoskop" na przykładzie:
Czterech braci wycenia potajemnie każdy z przedmiotów **radio**, **motocykl** *i* **zegarek** *i przekazuje wycenę arbitrowi. Ten układa tabelę i przedstawia sposób podziału.*

	A	B	C	D
radio	3000	5000	2500	3000
motocykl	5000	4000	4000	6000
zegarek	1500	1000	1000	500
Razem	9500	10000	7500	9500
1/4	2375	2500	1875	2375

W obecnych czasach arbiter może pewnie nazywać się Excel. Należy jednak zadbać jakoś o tajność przekazywanych wycen.

Metoda podziału przedmiotów niepodzielnych

	A	B	C	D
radio	3000	$\boxed{5000}$	2500	3000
motocykl	5000	4000	4000	$\boxed{6000}$
zegarek	$\boxed{1500}$	1000	1000	500
Razem	9500	10000	7500	9500
1/4	2375	2500	1875	2375
wyrównanie	875	−2500	1875	−3675
wypłata	1731,25	−1643,75	2731,25	−2818,75

Ostatecznie każdy otrzymuje o 856,25 więcej niż sam uważał, że mu się należy. Może część tej kwoty mógłby otrzymać arbiter.

Piraci

Metoda podziału przedmiotów niepodzielnych?

Sprytna metoda opisana przez Steinhausa używa jednak podzielnej gotówki do pomocy. Co jednak, gdy nawet dukaty traktujemy jako niepodzielne? Demokratyczny proces raczej nie pomaga:
polecam Artykuł w „Delcie”