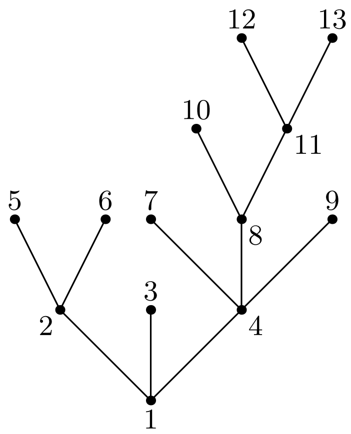
**103049**
**Wojciech Guzicki**

W tym wykładzie zajmę się zliczaniem tzw. drzew Schrödera, badanych przez niego w roku 1870 (zob. [Sch]). Co to jest drzewo Schrödera, najłatwiej wyjaśnić na przykładzie.

Najprostszym drzewem Schrödera jest sam korzeń. Takie drzewo z korzeniem $r$ zapisujemy za pomocą symbolu $[r]$. Jeśli dane są drzewa Schrödera $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (gdzie $k \geq 2$), to drzewem Schrödera jest uporządkowany ciąg postaci $[r; T_1, T_2, \ldots, T_k]$. To drzewo ma korzeń $r$, z którego wyrastają drzewa $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — w tej kolejności, licząc od lewej strony.

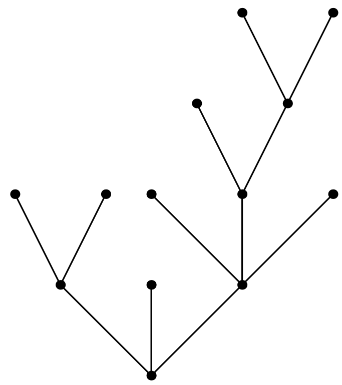
Oto rysunek przykładowego drzewa Schrödera:




oraz jego zapis zgodny z definicją: $\Big[1; \big[2; 5, 6\big], 3, \Big[4; 7, \big[8; 10, [11; 12, 13]\big], 9\Big]\Big]$.

Powyższe drzewo Schrödera ma 8 liści: są to wierzchołki o numerach: 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12 i 13. Pozostałe wierzchołki nazywamy węzłami. Są to: 1, 2, 4, 8 i 11. Jeśli drzewo Schrödera składa się wyłącznie z korzenia, to jest on liściem i nie jest węzłem.

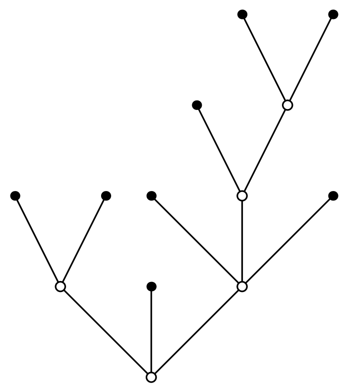
Chcę tu zwrócić uwagę na to, że numeracja wierzchołków drzewa została pokazana na rysunku tylko po to, by nazwać te wierzchołki, które są liśćmi, i te, które są węzłami. Naprawdę istotny jest tylko kształt drzewa:



To drzewo, zgodnie z powyższą definicją, można zapisać w postaci

$$\Big[\bullet; \big[\bullet; \bullet, \bullet\big], \bullet, \Big[\bullet; \bullet, \big[\bullet; \bullet, [\bullet; \bullet, \bullet]\big], \bullet\Big]\Big].$$

Jeśli chcemy wskazać, które wierzchołki są liśćmi i które są węzłami, to możemy drzewo narysować na przykład w następujący sposób:

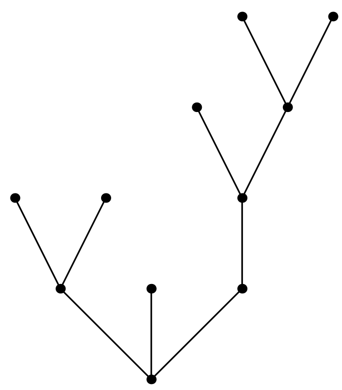


i zapisać jako

$$\Big[\circ;\, [\circ; \bullet, \bullet], \bullet, \Big[\circ; \bullet, [\circ; \bullet, [\circ; \bullet, \bullet]], \bullet\Big]\Big].$$

Duże czarne kropki oznaczają liście, kółeczka puste w środku oznaczają węzły.

Zwrócę jeszcze uwagę na to, że z każdego węzła wyrastają co najmniej dwa poddrzewa. W szczególności drzewo takie jak na poniższym rysunku nie jest drzewem Schrödera, bo z jednego węzła wyrasta tylko jedno poddrzewo:



Drzewa Schrödera mają związek z rozmieszczaniem nawiasów. Przypuśćmy, że mamy 8 elementów, na których możemy wykonywać pewne działania wieloargumentowe. Możemy łączyć ze sobą 2, 3, 4 lub więcej elementów. Drzewo Schrödera, które widzieliśmy wyżej, odpowiada następującemu rozmieszczeniu nawiasów pomiędzy ośmioma elementami:

$$(\bullet\bullet)\bullet\Big(\bullet\big(\bullet(\bullet\bullet)\big)\bullet\Big).$$

Nie ujmujemy w nawiasy pojedynczych elementów oraz nie obejmujemy nawiasami całego wyrażenia. Widzimy, że korzeń 1 odpowiada łączeniu działaniem trzech elementów:

$$(\bullet\bullet), \quad \bullet \quad \text{oraz} \quad \Big(\bullet\big(\bullet(\bullet\bullet)\big)\bullet\Big).$$

Pierwszy z nich powstaje przez połączenie działaniem dwóch elementów $\bullet$, drugi jest pojedynczym elementem $\bullet$, a trzeci powstaje znów przez połączenie działaniem trzech elementów:

$$\bullet, \quad \big(\bullet(\bullet\bullet)\big) \quad \text{oraz} \quad \bullet\,.$$

Środkowy z nich powstaje przez wykonanie działania na dwóch elementach:

$$\bullet \quad \text{oraz} \quad (\bullet\bullet).$$

Wreszcie prawy z dwóch powyższych powstaje znów przez wykonanie działania na dwóch elementach $\bullet$.

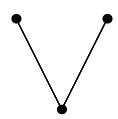
Liczbą Schrödera $s_n$ nazywamy liczbę drzew Schrödera mających dokładnie $n$ liści. Inaczej mówiąc, jest to liczba sposobów rozmieszczenia nawiasów pomiędzy $n$ elementami.

W tym wykładzie przedstawię dwie metody obliczania kolejnych liczb Schrödera. Pierwsza metoda jest całkowicie dostępna w szkole, chociaż obliczenia są dość żmudne. Druga metoda polega na znalezieniu odpowiedniego równania rekurencyjnego, które pozwoli obliczyć szybko początkowe liczby Schrödera.

W obu metodach zaczynamy od wypisania wszystkich możliwych drzew Schrödera dla małych wartości $n$.

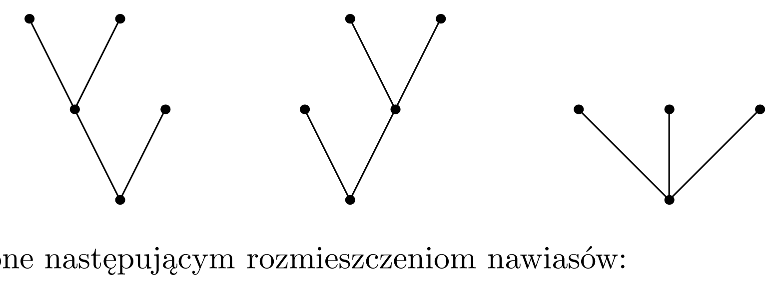
Istnieje tylko jedno drzewo Schrödera mające jeden liść; składa się ono tylko z korzenia. Stąd wynika, że $s_1 = 1$.

Istnieje także tylko jedno drzewo Schrödera mające dwa liście:



Odpowiada ono wykonaniu działania na dwóch elementach: $\bullet\bullet$ (pamiętajmy, że opuszczamy nawiasy obejmujące wszystkie elementy). Mamy zatem $s_2 = 1$. Te dwie wartości wystarczą do równania rekurencyjnego, które pokażę w dalszym ciągu. Metoda „szkolna" polega na obliczaniu kolejnych liczb $s_n$.

Następną liczbę Schrödera znajdujemy także rysując wszystkie możliwe drzewa mające trzy liście.



Odpowiadają one następującym rozmieszczeniom nawiasów:

$$(\bullet\bullet)\bullet, \quad \bullet(\bullet\bullet) \quad \text{oraz} \quad \bullet\bullet\bullet\,.$$

Mamy zatem $s_3 = 3$.

Obliczę jeszcze dwie liczby Schrödera dla $n = 4$ i $n = 5$. Pierwszą z nich (tzn. $s_4$) obliczę rysując także wszystkie możliwe drzewa Schrödera i wskazując odpowiadające im rozmieszczenia nawiasów. Wyjaśnię przy tym, w jakiej kolejności będę te drzewa rysował. Dla $n = 5$ odwołam się tylko do tej kolejności i w każdym przypadku obliczę liczbę drzew, które należałoby narysować. Po dodaniu obliczonych liczb we wszystkich przypadkach otrzymamy liczbę $s_5$.

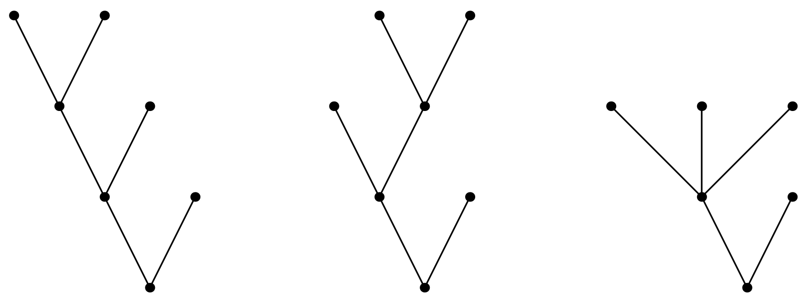
Niech zatem $n = 4$. Rozpatrujemy wszystkie możliwe sposoby przedstawienia liczby 4 jako sumy liczb mniejszych. W każdym przypadku narysuję wszystkie drzewa Schrödera odpowiadające danemu rozkładowi liczby 4. Mamy cztery rozkłady (nazywane nieuporządkowanymi) liczby 4 na sumę liczb mniejszych:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

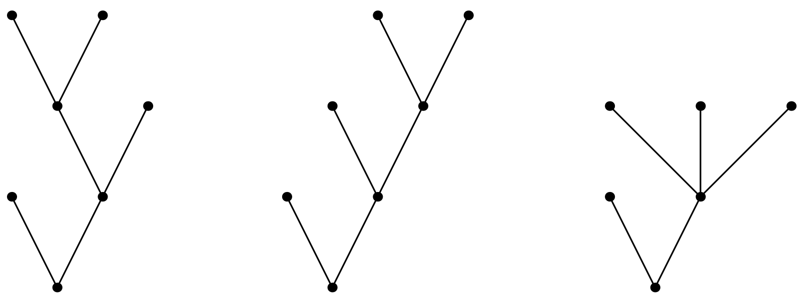
To, że rozkłady są nieuporządkowane, oznacza, że z wielu rozkładów różniących się kolejnością składników wybraliśmy jeden, w którym składniki występują w kolejności nierosnącej. W dalszym ciągu, przy obliczaniu kolejnych liczb Schrödera, poszczególne rozważane przypadki będą odpowiadały rozkładom nieuporządkowanym, ale w każdym przypadku będziemy musieli uwzględnić liczbę różnych kolejności składników w danym rozkładzie.

**Przypadek 4.1.** Rozważamy rozkład $4 = 3 + 1$. Występuje on w dwóch postaciach: $4 = 3 + 1 = 1 + 3$.

W korzeniu drzewo rozgałęzia się na dwa drzewa: jedno z trzema liśćmi, drugie z jednym. Istnieją 3 różne drzewa z trzema liśćmi, więc mamy w tym przypadku 6 drzew. Najpierw trzy drzewa, w którym trzy liście są w lewym poddrzewie:

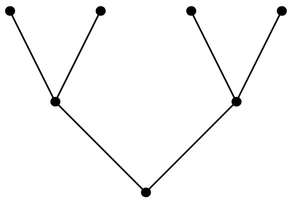


Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów: $\big((\bullet\bullet)\bullet\big)\bullet$, $\big(\bullet(\bullet\bullet)\big)\bullet$ oraz $(\bullet\bullet\bullet)\bullet$.
Następnie trzy drzewa, w których trzy liście są z prawej strony:



Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów: $\bullet\big((\bullet\bullet)\bullet\big)$, $\bullet\big(\bullet(\bullet\bullet)\big)$ oraz $\bullet(\bullet\bullet\bullet)$.

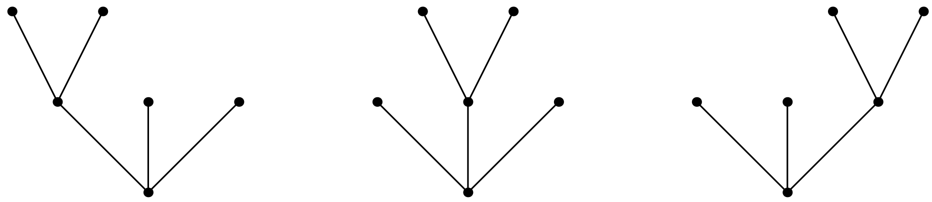
**Przypadek 4.2.** Rozważamy rozkład $4 = 2 + 2$. Występuje on tylko w jednej postaci, jest więc tylko jedno takie drzewo. W korzeniu rozgałęzia się ono na dwa identyczne drzewa mające po dwa liście:



Odpowiada mu rozmieszczenie nawiasów: (••)(••).

**Przypadek 4.3.** Rozważamy rozkład $4 = 2+1+1$. Występuje on w trzech postaciach: $4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2$.

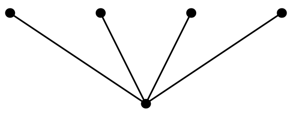
W korzeniu drzewo rozgałęzia się na trzy drzewa: jedno ma dwa liście i dwa po jednym liściu. Drzewo z dwoma liśćmi może znaleźć się na jednym z trzech miejsc: po lewej stronie, w środku lub po prawej stronie. Mamy zatem trzy drzewa:



Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów: (••) • •, •(••)• oraz • • (••).

**Przypadek 4.4.** $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Z korzenia wyrastają cztery liście. Jest tylko jedno takie drzewo:



Odpowiada mu brak nawiasów: • • • •.

Łącznie mamy w tych czterech przypadkach 11 drzew. Stąd otrzymujemy $s_4 = 11$.

Wreszcie obliczę $s_5$. Mamy 6 sposobów zapisania liczby 5 jako sumy liczb mniejszych:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Jest sześć przypadków. W każdym z nich w trzech kolumnach wypiszę: rozpatrywany rozkład na sumę, liczbę permutacji tego rozkładu oraz liczbę drzew danego typu.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $4+1$ | 2 | $2 \cdot s_4 \cdot s_1$ | $= 2 \cdot 11 \cdot 1$ | $= 22$ |
| $3+2$ | 2 | $2 \cdot s_3 \cdot s_2$ | $= 2 \cdot 3 \cdot 1$ | $= 6$ |
| $3+1+1$ | 3 | $3 \cdot s_3 \cdot s_1 \cdot s_1$ | $= 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$ | $= 9$ |
| $2+2+1$ | 3 | $3 \cdot s_2 \cdot s_2 \cdot s_1$ | $= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ | $= 3$ |
| $2+1+1+1$ | 4 | $4 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$ | $= 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ | $= 4$ |
| $1+1+1+1+1$ | 1 | $1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$ | $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ | $= 1$ |

Stąd otrzymujemy:

$$s_5 = 22 + 6 + 9 + 3 + 4 + 1 = 45.$$

W podobny sposób, ale coraz bardziej żmudny, możemy obliczyć:

$$s_6 = 197, \quad s_7 = 903, \quad s_8 = 4297 \quad \text{oraz} \quad s_9 = 20793.$$

Obliczenie $s_{10}$ wymaga zbadania 41 przypadków, bo tyle jest uporządkowanych rozkładów liczby 10 na sumę liczb mniejszych. W wyniku otrzymamy tytułową liczbę 103049:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $9+1$ | 2 | $2\cdot s_9\cdot s_1$ | $=41586$ | 41586 |
| $8+2$ | 2 | $2\cdot s_8\cdot s_2$ | $=8558$ | 50144 |
| $8+1+1$ | 3 | $3\cdot s_8\cdot s_1^2$ | $=12837$ | 62981 |
| $7+3$ | 2 | $2\cdot s_7\cdot s_3$ | $=5418$ | 68399 |
| $7+2+1$ | 6 | $6\cdot s_7\cdot s_2\cdot s_1$ | $=5418$ | 73817 |
| $7+1+1+1$ | 4 | $4\cdot s_7\cdot s_1^3$ | $=3612$ | 77429 |
| $6+4$ | 2 | $2\cdot s_6\cdot s_4$ | $=4334$ | 81763 |
| $6+3+1$ | 6 | $6\cdot s_6\cdot s_3\cdot s_1$ | $=3546$ | 85309 |
| $6+2+2$ | 3 | $3\cdot s_6\cdot s_2^2$ | $=591$ | 85900 |
| $6+2+1+1$ | 12 | $12\cdot s_6\cdot s_2\cdot s_1^2$ | $=2364$ | 88264 |
| $6+1+1+1+1$ | 5 | $5\cdot s_6\cdot s_1^4$ | $=985$ | 89249 |
| $5+5$ | 1 | $1\cdot s_5^2$ | $=2025$ | 91274 |
| $5+4+1$ | 6 | $6\cdot s_5\cdot s_4\cdot s_1$ | $=2970$ | 94244 |
| $5+3+2$ | 6 | $6\cdot s_5\cdot s_3\cdot s_2$ | $=810$ | 95054 |
| $5+3+1+1$ | 12 | $12\cdot s_5\cdot s_3\cdot s_1^2$ | $=1620$ | 96674 |
| $5+2+2+1$ | 12 | $12\cdot s_5\cdot s_2^2\cdot s_1$ | $=540$ | 97214 |
| $5+2+1+1+1$ | 20 | $20\cdot s_5\cdot s_2\cdot s_1^3$ | $=900$ | 98114 |
| $5+1+1+1+1+1$ | 6 | $6\cdot s_5\cdot s_1^5$ | $=270$ | 98384 |
| $4+4+2$ | 3 | $3\cdot s_4^2\cdot s_2$ | $=363$ | 98747 |
| $4+4+1+1$ | 6 | $6\cdot s_4^2\cdot s_1^2$ | $=726$ | 99473 |
| $4+3+3$ | 3 | $3\cdot s_4\cdot s_3^2$ | $=297$ | 99770 |
| $4+3+2+1$ | 24 | $24\cdot s_4\cdot s_3\cdot s_2\cdot s_1$ | $=792$ | 100562 |
| $4+3+1+1+1$ | 20 | $20\cdot s_4\cdot s_3\cdot s_1^3$ | $=660$ | 101222 |
| $4+2+2+2$ | 4 | $4\cdot s_4\cdot s_2^3$ | $=44$ | 101266 |
| $4+2+2+1+1$ | 30 | $30\cdot s_4\cdot s_2^2\cdot s_1^2$ | $=330$ | 101596 |
| $4+2+1+1+1+1$ | 30 | $30\cdot s_4\cdot s_2\cdot s_1^4$ | $=330$ | 101926 |
| $4+1+1+1+1+1+1$ | 7 | $7\cdot s_4\cdot s_1^6$ | $=77$ | 102003 |
| $3+3+3+1$ | 4 | $4\cdot s_3^3\cdot s_1$ | $=108$ | 102111 |
| $3+3+2+2$ | 6 | $6\cdot s_3^2\cdot s_2^2$ | $=54$ | 102165 |
| $3+3+2+1+1$ | 30 | $30\cdot s_3^2\cdot s_2\cdot s_1^2$ | $=270$ | 102435 |
| $3+3+1+1+1+1$ | 15 | $15\cdot s_3^2\cdot s_1^4$ | $=135$ | 102570 |
| $3+2+2+2+1$ | 20 | $20\cdot s_3\cdot s_2^3\cdot s_1$ | $=60$ | 102630 |
| $3+2+2+1+1+1$ | 60 | $60\cdot s_3\cdot s_2^2\cdot s_1^3$ | $=180$ | 102810 |
| $3+2+1+1+1+1+1$ | 42 | $42\cdot s_3\cdot s_2\cdot s_1^5$ | $=126$ | 102936 |
| $3+1+1+1+1+1+1+1$ | 8 | $8\cdot s_3\cdot s_1^7$ | $=24$ | 102960 |
| $2+2+2+2+2$ | 1 | $1\cdot s_2^5$ | $=1$ | 102961 |
| $2+2+2+2+1+1$ | 15 | $15\cdot s_2 * 4\cdot s_1^2$ | $=15$ | 102976 |
| $2+2+2+1+1+1+1$ | 35 | $35\cdot s_2^3\cdot s_1^4$ | $=35$ | 103011 |
| $2+2+1+1+1+1+1+1$ | 28 | $28\cdot s_2^2\cdot s_1^6$ | $=28$ | 103039 |
| $2+1+1+1+1+1+1+1+1$ | 9 | $9\cdot s_2\cdot s_1^8$ | $=9$ | 103048 |
| $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ | 1 | $1\cdot s_1^{10}$ | $=1$ | 103049 |

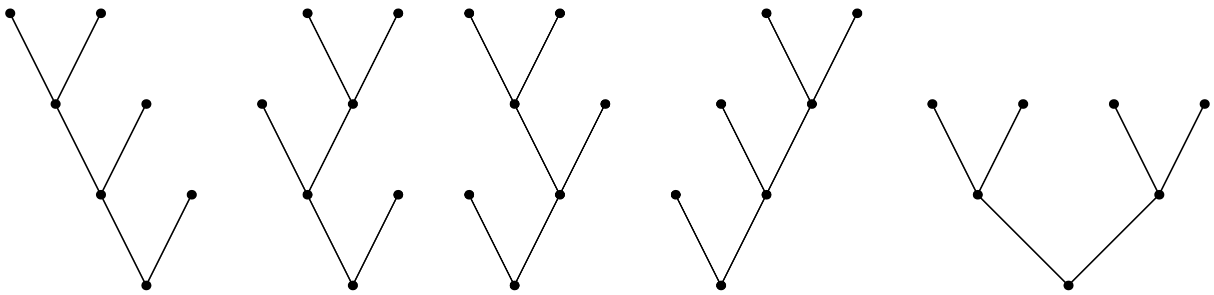
Uff! Cel został osiągnięty! Metodą szkolną obliczyliśmy $s_{10} = 103049$. Jest to bardzo żmudne, ale wykonalne.

Teraz przedstawię metodę nieszkolną, której celem jest wskazanie dość prostego równania rekurencyjnego dla liczb Schrödera. Zanim przejdę do omówienia tej metody, pokażę główny pomysł dowodu na prostszym przykładzie.

Będziemy zajmować się drzewami binarnymi. Są to drzewa Schrödera, w których z każdego węzła wyrastają dokładnie dwa poddrzewa. Oto ścisła definicja drzewa binarnego:

Najprostszym drzewem binarnym jest sam korzeń. Takie drzewo binarne z korzeniem $r$ zapisujemy także za pomocą symbolu $[r]$. Jeśli dane są dwa drzewa binarne $T_1$ i $T_2$, to drzewem binarnym jest uporządkowana trójka postaci $[r; T_1, T_2]$. To drzewo binarne ma korzeń $r$, z którego wyrastają poddrzewa $T_1$ i $T_2$. Znów ważna jest kolejność: poddrzewa $T_1$ i $T_2$ są rysowane w tej kolejności, licząc od lewej strony.

Dla przykładu popatrzmy na drzewa Schrödera dla $n = 4$. Wśród 11 takich drzew mamy tylko 5 drzew binarnych:



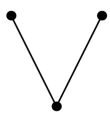
Niech $c_n$ oznacza liczbę drzew binarnych mających dokładnie $n$ liści. Liczby $C_n$ (dla $n \geq 0$) zdefiniowane wzorem

$$C_n = c_{n+1}$$

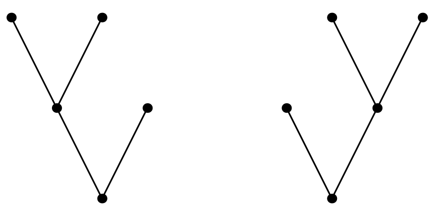
są nazywane liczbami Catalana (zob. [St1] oraz [R]). Liczba Catalana $C_n$ jest więc liczbą drzew binarnych mających $n+1$ liści. W dalszym ciągu będę zajmował się liczbami $c_n$, które dla wygody także będę nazywał liczbami Catalana. Mamy oczywiście:

$$c_1 = c_2 = 1.$$

Istnieje bowiem dokładnie jedno drzewo binarne mające jeden liść: jest ono złożone tylko z korzenia. Istnieje także dokładnie jedno drzewo binarne mające dokładnie dwa liście:



Istnieją dwa drzewa binarne mające trzy liście:



Ponadto z przykładu powyżej wiemy, że istnieje pięć drzew binarnych mających cztery liście. Mamy zatem dwie następne liczby Catalana:

$$c_3 = 3 \quad \text{oraz} \quad c_4 = 5.$$

Udowodnię teraz twierdzenie pozwalające wyprowadzić wzór na liczbę drzew binarnych.

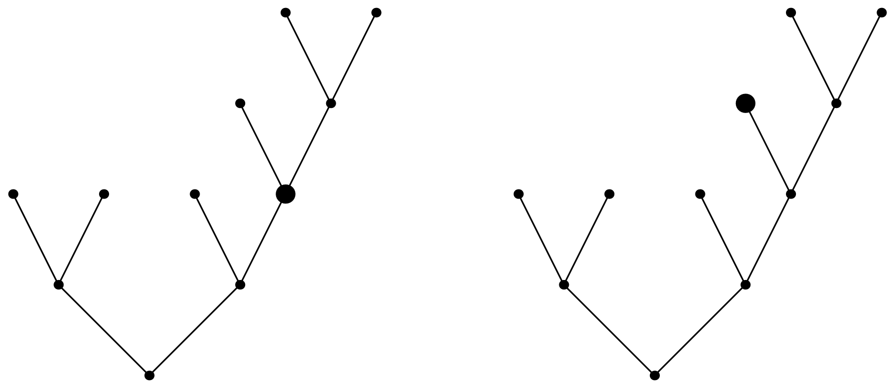
**Twierdzenie 1.** Liczby Catalana $c_n$ spełniają następujące równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ (n+1)c_{n+1} &= 2(2n-1)c_n, \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

W dowodzie tego twierdzenia, a także w dowodzie podobnego twierdzenia dotyczącego liczb Schrödera, będziemy korzystać z dwóch dobrze znanych własności drzew binarnych (które można łatwo udowodnić przez indukcję):

- jeśli drzewo binarne ma $n$ liści, to ma $n-1$ węzłów,
- jeśli drzewo binarne ma $n$ liści, to ma $2n-1$ wierzchołków.

Mówimy, że drzewo binarne jest zaznaczone, jeśli został wyróżniony jeden jego wierzchołek (liść lub węzeł). Zaznaczony wierzchołek będziemy na rysunku przedstawiać w postaci większej kropki. Na poniższym rysunku widzimy dwa drzewa zaznaczone; w pierwszym drzewie zaznaczony został węzeł, w drugim liść:



Definiujemy następnie zbiory:

- $BZ(n)$ jest zbiorem zaznaczonych drzew binarnych, w których jest dokładnie $n$ liści (przy czym zaznaczony jest dowolny wierzchołek drzewa).
- $LZ(n)$ jest zbiorem zaznaczonych drzew binarnych mających dokładnie $n$ liści, w których zaznaczony jest jeden liść.

Wówczas mamy oczywiście następujące równości:

$$|BZ(n)| = (2n-1)c_n \quad \text{oraz} \quad |LZ(n)| = nc_n.$$

Niech $L$ i $R$ będą dwoma różnymi elementami. Równanie rekurencyjne, które występuje w tezie twierdzenia 1., może być zapisane w postaci:

$$\big|LZ(n+1)\big| = \big|\{L, R\} \times BZ(n)\big| \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

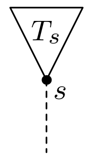
Dowód twierdzenia 1. polega zatem na znalezieniu bijekcji ze zbioru

$$\{L, R\} \times BZ(n)$$

na zbiór

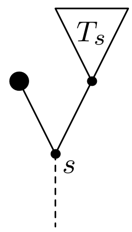
$$LZ(n+1).$$

Niech $T$ będzie dowolnym zaznaczonym drzewem binarnym mającym $n$ liści, czyli $T \in BZ(n)$. Niech $s$ będzie zaznaczonym wierzchołkiem i niech $T_s$ będzie poddrzewem drzewa $T$ o korzeniu w zaznaczonym wierzchołku $s$.

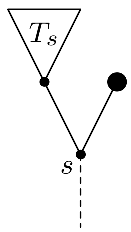



Mamy dwa przypadki.

**Przypadek 1.** Rozpatrujemy parę $(L, T)$. Wówczas w drzewie $T$ poddrzewo $T_s$ zastępujemy poddrzewem postaci:




**Przypadek 2.** Rozpatrujemy parę $(R, T)$. Wówczas w drzewie $T$ poddrzewo $T_s$ zastępujemy poddrzewem postaci:




Oczywiście w obu przypadkach otrzymujemy zaznaczone drzewo mające o jeden liść więcej, a więc należące do zbioru $LZ(n+1)$. Sprawdzenie, że tak określone przekształcenie jest oczekiwaną bijekcją, pozostawię jako ćwiczenie. To kończy dowód twierdzenia 1.

**Wniosek 2.** Liczby Catalana wyrażają się wzorem:

$$c_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

W tym wniosku oczywiście przyjmujemy $\binom{0}{0} = 1$.

Prosty dowód wniosku 2. przez indukcję względem $n$ pozostawię jako ćwiczenie.

Teraz możemy obliczyć kilka następnych liczb Catalana.

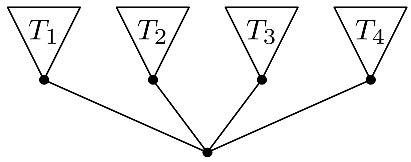
$$c_5 = 14, \quad c_6 = 42, \quad c_7 = 132, \quad c_8 = 429, \quad c_9 = 1430 \quad \text{oraz} \quad c_{10} = 4862.$$

Wróćmy do liczb Schrödera. Udowodnię następujące twierdzenie:

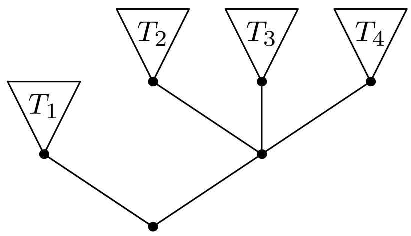
**Twierdzenie 3.** Liczby Schrödera $s_n$ spełniają następujące równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1, \\ (n+1)s_{n+1} &= 3(2n-1)s_n - (n-2)s_{n-1}, \quad \text{dla} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

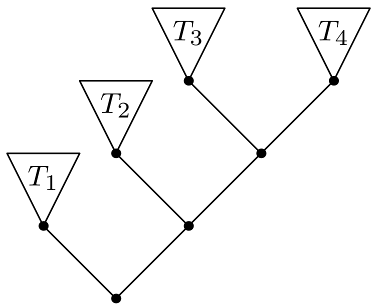
Równanie to zostało po raz pierwszy wyprowadzone przez Comteta (zob. [C1] oraz [C2], str. 57). Dowód polegał na analizie funkcji tworzącej dla liczb Schrödera. W tym wykładzie pokażę inny dowód, przeprowadzony metodami kombinatorycznymi (zob. [FZ]). Główny pomysł dowodu polega na zastosowaniu drzew zaznaczonych — tak jak to miało miejsce w dowodzie twierdzenia 1. Musimy jednak przekształcić drzewa Schrödera na drzewa binarne. Najprostszy sposób polega na zastępowaniu węzłów, z których wyrasta wiele poddrzew, węzłami binarnymi, tzn. takimi, z których wyrastają dokładnie dwa poddrzewa. Na przykład drzewo postaci



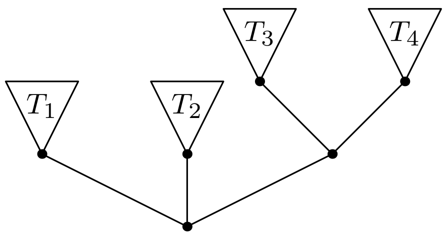

zastępujemy najpierw drzewem:




Węzeł, z którego wyrastały cztery mniejsze drzewa został „rozdwojony": z lewej strony wyrasta pierwsze poddrzewo, z prawej wyrasta wierzchołek, z którego następnie wyrastają trzy pozostałe poddrzewa. W następnym kroku „rozdwajamy" ten potrójny węzeł i rozpatrywane drzewo zastępujemy ostatecznie drzewem

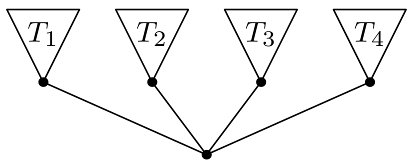


Problem polega na tym, że drzewo, które widzimy na ostatnim rysunku, powstaje w ten sposób z trzech różnych drzew Schrödera (łącznie z nim samym). Co więcej, powstaje również z czwartego drzewa:

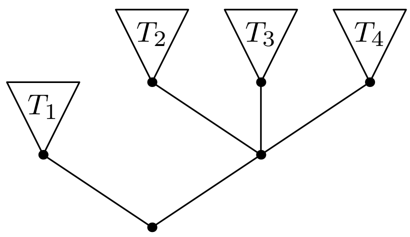



Opisane przyporządkowanie drzew binarnych drzewom Schrödera nie jest więc bijekcją. Z otrzymanego drzewa binarnego nie możemy jednoznacznie odtworzyć drzewa Schrödera, z którego ono powstało.

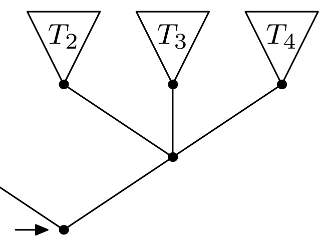
Można temu zaradzić, jeśli w otrzymywanych drzewach binarnych będziemy wskazywać „rozdwajane" węzły. Tak więc, jeśli z drzewa



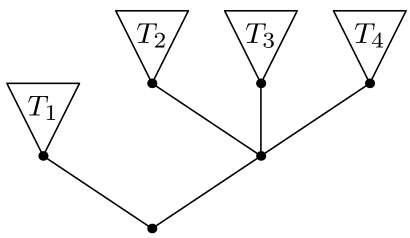

tworzymy drzewo



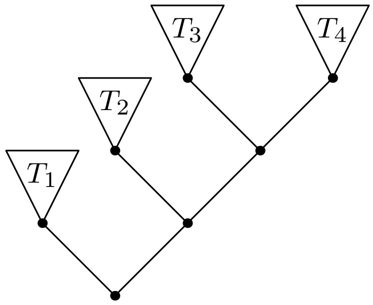

to od razu wskazujemy węzeł „rozdwajany":



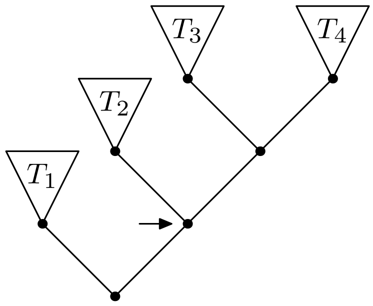

Z drzewa mającego wskazany węzeł możemy odtworzyć drzewo, z którego ono powstało. Popatrzmy na inne przykłady. Jeśli z drzewa



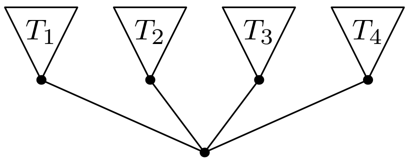
utworzymy drzewo



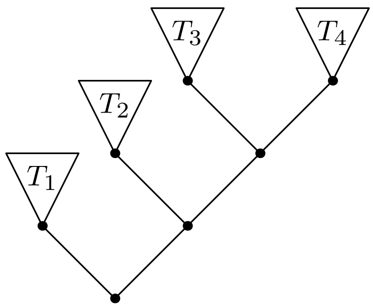

to wskazujemy węzeł na prawo od korzenia:



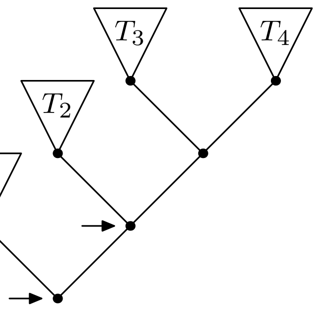

Jeśli z drzewa



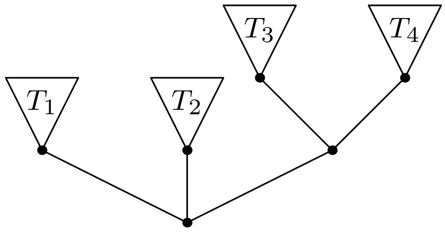

w dwóch krokach utworzymy drzewo



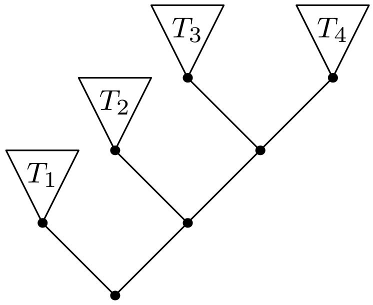

to w nim będą wskazane dwa węzły:



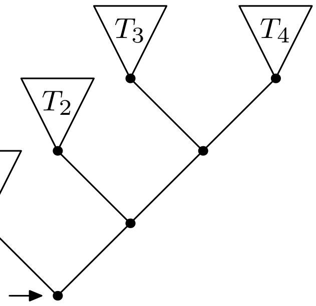
Wreszcie, jeśli z drzewa




utworzymy drzewo




to wskazujemy tylko korzeń:




To samo drzewo binarne mogliśmy otrzymać z czterech drzew Schrödera. Otrzymane drzewa będą się jednak różnić wskazanymi węzłami: jedno nie będzie miało żadnego wskazanego węzła, dwa będą miały wskazany jeden węzeł (korzeń lub węzeł na prawo od korzenia), wreszcie jedno będzie miało dwa wskazane węzły.

Po utworzeniu drzew binarnych (ze wskazanymi węzłami „rozdwajanymi") zastosujemy metodę zaznaczania wierzchołków. Powstaną przy tym pewne trudności, powodujące ostatecznie to, że po prawej stronie równania mamy dwa składniki, a nie jeden — jak to miało miejsce w twierdzeniu 1. Przejdźmy teraz do szczegółów dowodu.

Wskazywanie węzłów „rozdwajanych" odbywa się przez przypisywanie węzłom wag. Każdy węzeł otrzyma jedną z dwóch wag: 1 lub 2. Węzły wskazywane to te, które dostaną wagę 2. Mówimy, że węzeł jest dobrze wyważony, w dwóch przypadkach:

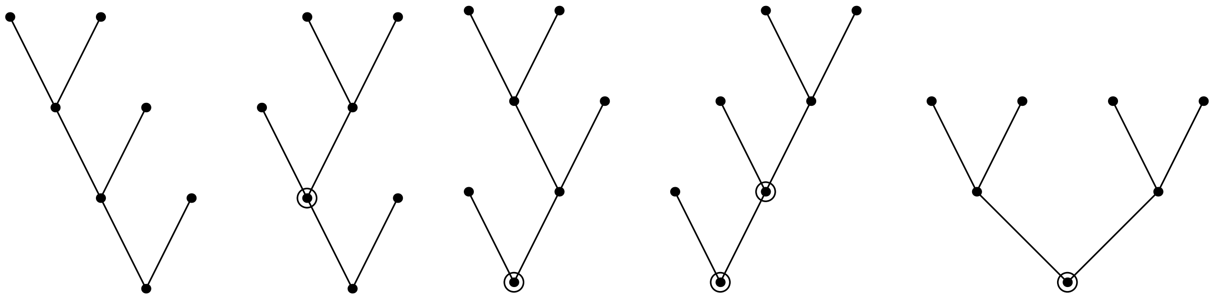
- jeśli ma wagę 1

lub

- jeśli ma wagę 2 oraz wyrastające z niego prawe poddrzewo składa się nie tylko z liścia.

Mówimy, że drzewo binarne jest dobrze wyważone, jeśli każdy jego węzeł jest dobrze wyważony.

Popatrzmy jeszcze raz na pięć drzew binarnych z czterema liśćmi, które widzieliśmy wcześniej. Węzły, które mogą dostać obie wagi (w szczególności wagę 2) zostaną oznaczone kropką otoczoną kółeczkiem. Pozostałe węzły muszą mieć wagę 1, by drzewo było dobrze wyważone.



Dowód twierdzenia 3. zostanie przeprowadzony w dwóch krokach. Pierwszy krok polega na wykazaniu, że dla danej liczby naturalnej $n$ liczba $s_n$ drzew Schrödera mających $n$ liści, jest równa liczbie dobrze wyważonych drzew binarnych mających $n$ liści.

Potrzebną do tego bijekcję definiujemy w następujący sposób:

- Jeśli drzewo $T$ składa się tylko z korzenia (tzn. $T = [r]$), to przyjmujemy

$$\Phi(T) = [r].$$

- Jeśli w drzewie $T$ z korzenia wyrastają dokładnie dwa poddrzewa $T_1$ i $T_2$ (tzn. $T = [r; T_1, T_2]$), to przyjmujemy

$$\Phi(T) = [1; \Phi(T_1), \Phi(T_2)].$$

- Jeśli w drzewie $T$ z korzenia wyrastają poddrzewa $T_1, T_2, \ldots, T_k$, gdzie $k > 2$, (tzn. $T = [r, T_1, T_2, \ldots, T_k]$), to przyjmujemy

$$\Phi(T) = \big[2, \Phi(T_1), \Phi([r, T_2, \ldots, T_k])\big].$$

Należy wykazać, że:

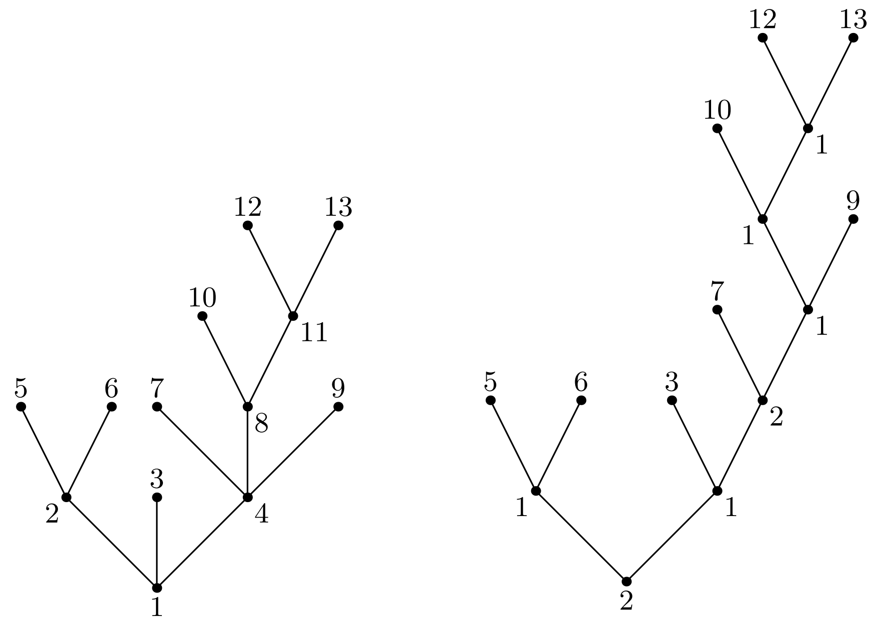
- tak określona funkcja $\Phi$ rzeczywiście jest bijekcją ze zbioru drzew Schrödera w zbiór dobrze wyważonych drzew binarnych

oraz

- funkcja $\Phi$ zachowuje liczbę liści drzewa.

Oba dowody pozostawię jako ćwiczenie.

Popatrzmy na jeszcze jeden przykład. Drzewo $T$ Schrödera z początku tego wykładu zostanie przekształcone na drzewo binarne $\Phi(T)$ (liście drzewa $\Phi(T)$ zachowały numery z drzewa $T$, węzły dostały numery równe swoim wagom):

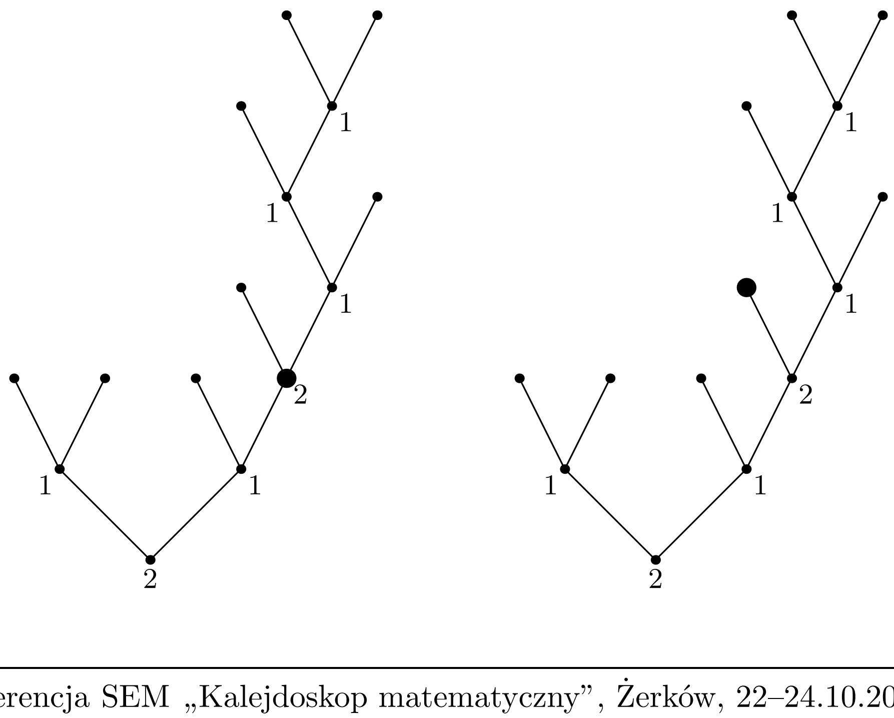



$T$ $\Phi(T)$

Stąd wynika, że $s_n$ jest liczbą dobrze wyważonych drzew binarnych mających $n$ liści.

Drugi krok w dowodzie twierdzenia 3. polega na zaznaczaniu wierzchołków (które widzieliśmy w dowodzie twierdzenia 1.).

Jeśli w dobrze wyważonym drzewie binarnym zaznaczymy jeden wierzchołek, to takie drzewo będziemy nazywać drzewem zaznaczonym. Zaznaczony wierzchołek będziemy na rysunku przedstawiać większą kropką. Na poniższym rysunku widzimy dwa drzewa zaznaczone: w pierwszym drzewie zaznaczony został węzeł, w drugim liść:



Rozpatrujemy trzy zbiory drzew zaznaczonych:

- $DZ(n)$ oznacza zbiór wszystkich drzew zaznaczonych mających $n$ liści,
- $LZ(n)$ oznacza zbiór drzew zaznaczonych mających $n$ liści, w których zaznaczony został jeden liść,
- $WZ(n)$ oznacza zbiór drzew zaznaczonych mających $n$ liści, w których zaznaczony został jeden węzeł.

Z dwóch własności drzew binarnych, które widzieliśmy po sformułowaniu twierdzenia 1., wynikają następujące równości:

$$|DZ(n)| = (2n-1) \cdot s_n, \quad |LZ(n)| = n \cdot s_n \quad \text{oraz} \quad |WZ(n)| = (n-1) \cdot s_n.$$

Stąd zaś wynika, że

$$|LZ(n+1)| = (n+1) \cdot s_{n+1} \quad \text{oraz} \quad |WZ(n-1)| = (n-2) \cdot s_{n-1}.$$

Te równości pozwalają zapisać równanie rekurencyjne z tezy twierdzenia w następującej postaci:

$$3(2n-1)s_n = (n+1)s_{n+1} + (n-2)s_{n-1},$$

czyli

$$3 \cdot |DZ(n)| = |LZ(n+1)| + |WZ(n-1)|$$

dla $n \geq 2$.

Wybierzmy trzy różne elementy $L_1$, $L_2$ i $R_1$. Do zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy wskazać bijekcję przeprowadzającą zbiór

$$\{L_1, L_2, R_1\} \times DZ(n)$$

na sumę rozłączną zbiorów

$$LZ(n+1) \cup WZ(n-1).$$

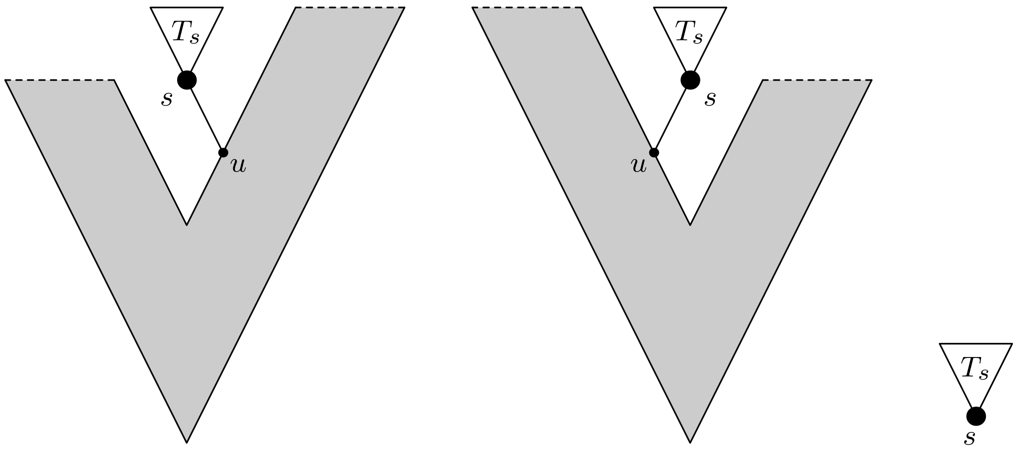
Załóżmy teraz, że $n \geq 2$. Weźmy dowolne drzewo zaznaczone $T \in DZ(n)$, a więc mające $n$ liści. Będziemy próbowali — tak jak to miało miejsce w dowodzie twierdzenia 1. — przerobić je na drzewo mające $n+1$ liści, w którym jeden liść będzie zaznaczony.

Niech $s$ będzie zaznaczonym wierzchołkiem drzewa $T$ i niech $T_s$ będzie poddrzewem drzewa $T$, którego korzeniem jest wierzchołek $s$. Dopuszczamy przy tym możliwość, że wierzchołek $s$ jest liściem (wtedy drzewo $T_s$ redukuje się do swojego korzenia $s$) lub też, że wierzchołek $s$ jest korzeniem drzewa $T$ (wtedy $T_s = T$). Nie mogą jednak wystąpić te dwie sytuacje jednocześnie. Wówczas drzewo $T$ miałoby tylko jeden liść, wbrew założeniu, że $n \geq 2$.

Drzewo $T$ ma jedną z trzech postaci:

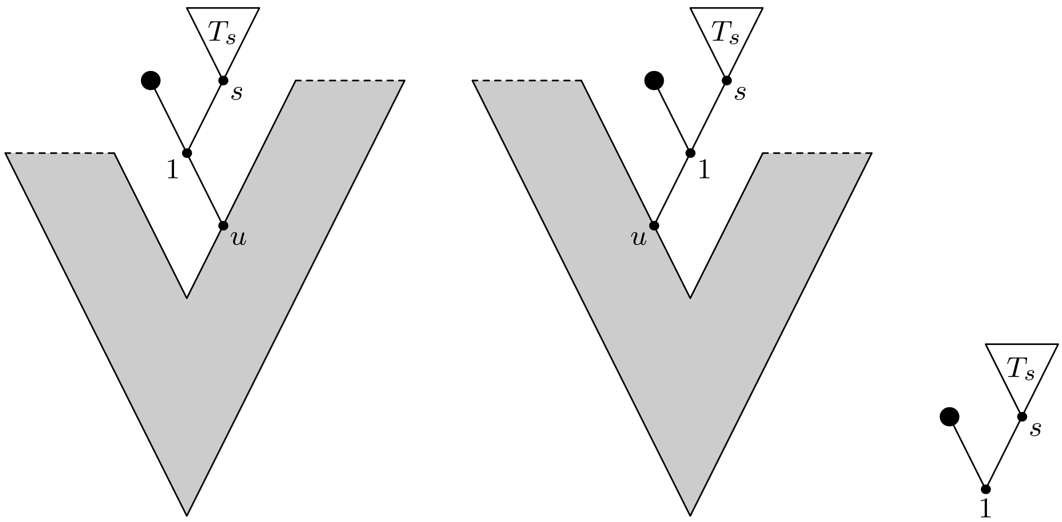
- pierwsze dwie występują, gdy zaznaczony wierzchołek $s$ nie jest korzeniem drzewa $T$; wtedy wierzchołek $s$ wyrasta (na lewo lub na prawo) z pewnego wierzchołka $u$ (nie ma przy tym znaczenia, jakim węzłem jest wierzchołek $u$, w szczególności czy jest korzeniem drzewa),
- trzecia, gdy zaznaczony wierzchołek $s$ jest korzeniem drzewa $T$; wtedy drzewo $T_s$ nie redukuje się do swojego korzenia $s$.

Oto schematyczne rysunki tych drzew:



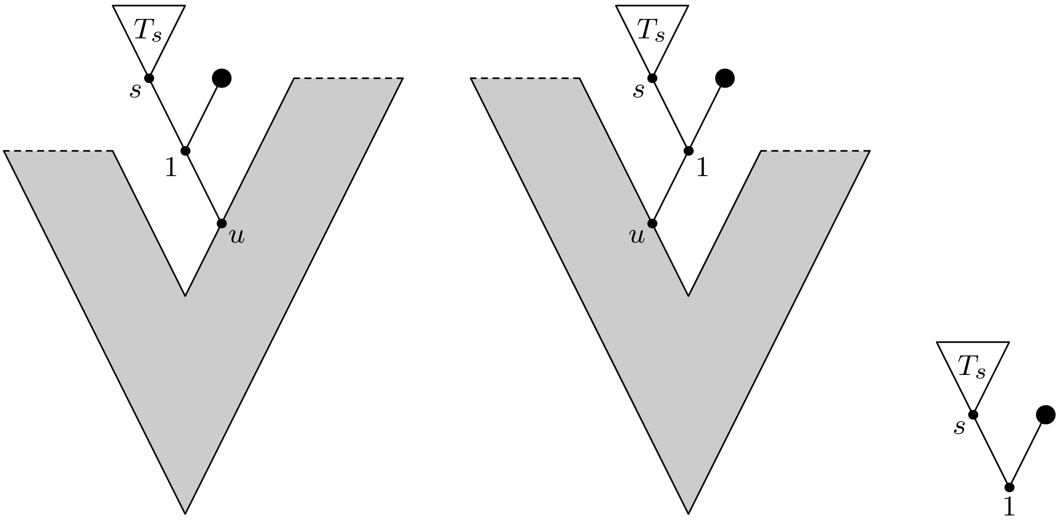

Mamy teraz trzy przypadki w zależności od tego, który element spośród $L_1$, $L_2$ i $R_1$ występuje w parze z drzewem $T$.

**Przypadek 1.** Rozpatrujemy parę $(L_1, T)$. Przyporządkowujemy jej drzewo zbudowane w następujący sposób (w każdej z trzech postaci drzewa $T$):



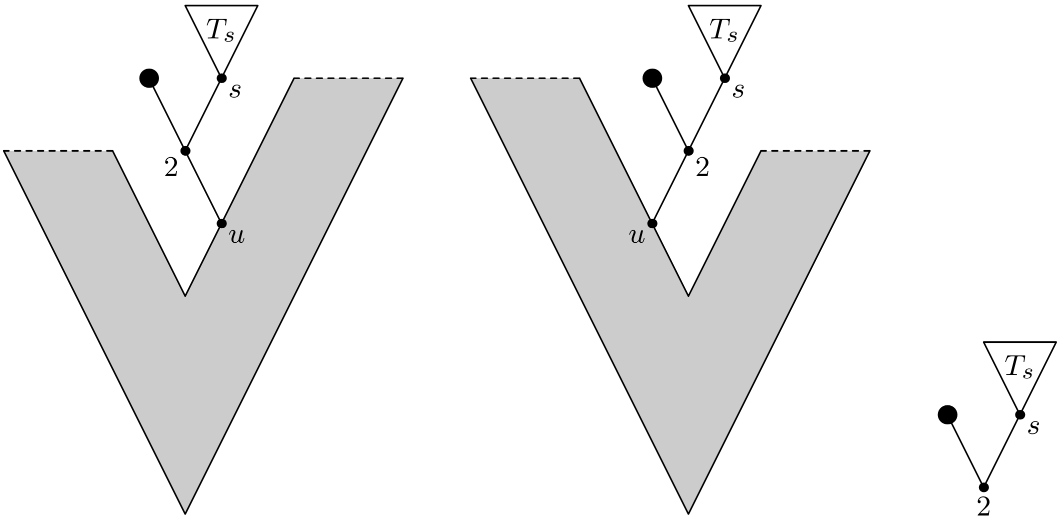

Tak skonstruowane drzewo oczywiście należy do zbioru $LZ(n+1)$.

**Przypadek 2.** Rozpatrujemy parę $(R_1, T)$. Przyporządkowanie drzewa parze $(R_1, T)$ jest teraz bardzo podobne do przyporządkowania w poprzednim przypadku.



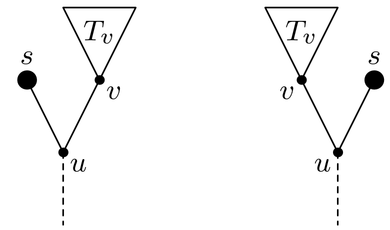

Tak skonstruowane drzewo także należy do zbioru $LZ(n+1)$.

**Przypadek 3.** Rozpatrujemy parę $(L_2, T)$. W tym przypadku natkniemy się na trudność. Spróbujmy najpierw utworzyć drzewo w sposób analogiczny do przypadku pierwszego, zamieniając tylko wagę 1 na 2. Otrzymamy drzewa:

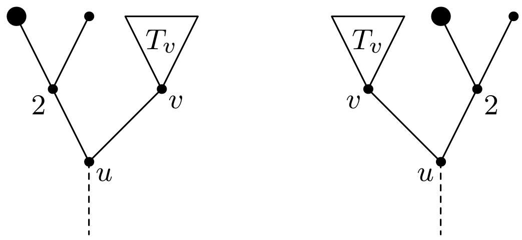



To przyporządkowanie jest poprawne i otrzymamy drzewo należące także do zbioru $LZ(n+1)$ tylko wtedy, gdy wierzchołek $s$ nie jest liściem (tzn. wtedy, gdy poddrzewo $T_s$ nie redukuje się do wierzchołka $s$).

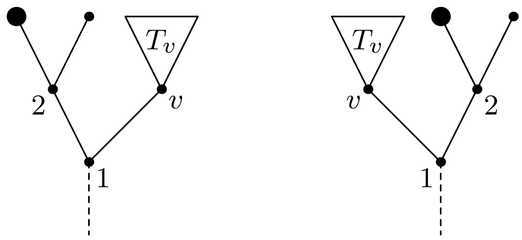
Przypuśćmy zatem, że ten warunek nie jest spełniony, a więc wierzchołek $s$ jest liściem. Jak już wspomniałem wcześniej, stąd wynika, że trzeci rodzaj drzewa jest niemożliwy: liść nie może jednocześnie być korzeniem drzewa, bo $n \geq 2$. Wierzchołek $s$ wyrasta z pewnego wierzchołka $u$. Nie ma przy tym znaczenia, jakim wierzchołkiem jest $u$. Może on być korzeniem drzewa, może z innego wierzchołka wyrastać po lewej stronie i może wyrastać po prawej stronie. W rozważanej teraz sytuacji istotne będzie tylko poddrzewo wyrastające z wierzchołka $u$. Niech $v$ będzie drugim (oprócz $s$) wierzchołkiem wyrastającym z wierzchołka $u$ i niech $T_v$ będzie poddrzewem wyrastającym z wierzchołka $v$. Możliwe są dwa położenia wierzchołków $s$ i $v$:



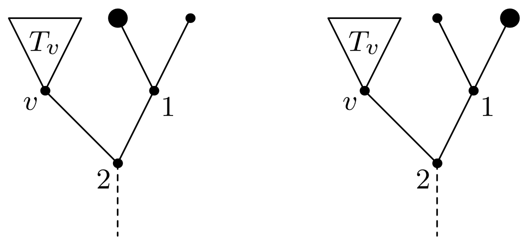

Spróbujmy zrobić to samo, co w przypadku, gdy wierzchołek $s$ nie jest liściem. Zobaczymy, co złego się wydarzyło i w jaki sposób możemy to naprawić. Otrzymamy drzewa:




Problem polega na tym, że z wierzchołka wagi 2 wyrastają dwa liście — w szczególności na prawo jest liść, co jest zabronione w dobrze wyważonych drzewach. Ten problem można łatwo naprawić, gdy wierzchołek $u$ ma wagę 1. Mamy wtedy drzewa:

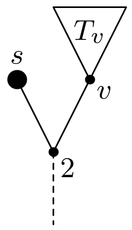



Zamiast nich bierzemy drzewa:

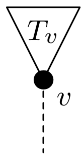



W ten sposób otrzymujemy kolejne drzewa ze zbioru $LZ(n+1)$. Sprawdzenie, że przekształcenie zdefiniowane do tej pory jest bijekcją na zbiór $LZ(n+1)$, pozostawię jako ćwiczenie.

Został ostatni przypadek, gdy wierzchołek $u$ ma wagę 2. Zaznaczony liść $s$ musi wyrastać po lewej stronie wierzchołka $v$ oraz wierzchołek $v$ wyrastający z wierzchołka $u$ na prawo nie jest liściem (inaczej: poddrzewo $T_v$ nie redukuje się do liścia). Mamy zatem sytuację:




Teraz usuwamy z drzewa wierzchołki $u$ i $s$ oraz zaznaczamy wierzchołek $v$.




Nie jest on liściem, więc otrzymujemy drzewo, w którym zaznaczony jest węzeł. Ponadto usunęliśmy z drzewa $T$ jeden liść, więc ostatecznie otrzymujemy drzewo ze zbioru $WZ(n-1)$. Znów sprawdzenie, że w tym przypadku otrzymaliśmy bijekcję na zbiór $WZ(n-1)$, pozostawię jako ćwiczenie.

Ostatecznie została zdefiniowana bijekcja ze zbioru $\{L_1, L_2, R_1\} \times DZ(n)$ na rozłączną sumę zbiorów $LZ(n+1) \cup WZ(n-1)$, co kończy dowód twierdzenia.

Korzystając z udowodnionego równania rekurencyjnego możemy obliczyć $s_{11}$. Mamy równanie:

$$3(2n-1)s_n = (n+1)s_{n+1} + (n-2)s_{n-1}.$$

Dla $n = 10$ mamy:

$$3 \cdot 19 \cdot s_{10} = 11 \cdot s_{11} + 8 \cdot s_9,$$

czyli

$$57 \cdot 103049 = 11s_{11} + 8 \cdot 20793.$$

Stąd otrzymujemy:

$$s_{11} = \frac{57 \cdot 103049 - 8 \cdot 20793}{11} = \frac{5873793 - 166344}{11} = \frac{5707449}{11} = 518859.$$

Po udowodnieniu twierdzenia wyjaśnienia wymaga dobór tematu na ten wykład. Co jest tak ciekawego w liczbach Schrödera, że warto było poświęcić im cały wykład? Można wspomnieć o kilku innych interpretacjach tych liczb. Wiemy już, że liczba $s_n$ jest liczbą sposobów rozmieszczenia nawiasów wśród $n$ symboli. Jest to także liczba podziałów wielokąta wypukłego mającego $n+1$ boków, nieprzecinającymi się przekątnymi, na wielokąty wypukłe. Istnieje też związek liczb Schrödera z wyrażeniami zapisanymi w notacji beznawiasowej Łukasiewicza. Czy to wystarczy?

Plutarch (ok. 50–125 r. n.e.) w swoim dziele *Moralia*, dwukrotnie porusza ten sam temat (*De Stoicorum repugnantiis* 1047C–E) oraz (*Zagadnienie biesiadne; Quaestiones convivales*, księga VIII, 8.9.3). Pisze on:

> ἀλλὰ μὴν αὐτὸς τὰς διὰ δέκα ἀξιωμάτων συμπλοκὰς πλήθει φησὶν ὑπερβάλλειν ἑκατὸν μυριάδας οὔτε δι' αὑτοῦ ζητήσας ἐπιμελῶς οὔτε διὰ τῶν ἐμπείρων τἀληθὲς ἱστορήσας. [...] Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμετικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχός ἐστιν ἀποδεικνύων τὸ διάπτωμα τοῦ λογισμοῦ παμμέγεθες αὐτῷ γεγονός, εἴγε τὸ μὲν καταφατικὸν ποιεῖ συμπεπλεγμένων ἀξιωμάτων μυριάδας δέκα καὶ πρὸς ταύταις τρισχίλια τεσσαράκοντα ἐννέα τὸ δ' ἀποφατικὸν ἐνακόσια πεντήκοντα δύο πρὸς τριάκοντα καὶ μιᾷ μυριάσι. (1047C–E)

**Uwaga.** Oba wspomniane wyżej teksty nie mają polskich tłumaczeń. *De Stoicorum repugnantiis* nie zostało w ogóle przetłumaczone, *Zagadnienia biesiadne* nie zostały przetłumaczone na polski w całości (została przetłumaczona tylko księga VI). Podaję tłumaczenia angielskie obu fragmentów oraz moje tłumaczenie na polski drugiego fragmentu.

> But now he [Chrysippus] says himself that the number of conjunctions produced by means of ten assertibles exceeds a million, though he had neither investigated the matter carefully by himself nor sought out the truth with the help of experts. [. . .] Chrysippus is refuted by all the arithmeticians, among them Hipparchus himself who proves that his error in calculation is enormous if in fact affirmation gives 103049 conjoined assertibles and negation 310952. (*De Stoicorum repugnantiis*)

> Chrysippus says that the number of compound propositions that can be made from only ten simple propositions exceeds a million. (Hipparchus, to be sure, refuted this by showing that on the affirmative side there are 103049 compound statements, and on the negative side 310952.) (*Quaestiones convivales*)

> Chryzyp twierdzi, że liczba zdań złożonych, które mogą być utworzone z tylko dziesięciu zdań prostych, przekracza milion. (Hipparch, dla pewności, zaprzeczył temu, pokazując, że istnieje 103049 zdań twierdzących oraz 310952 zdania przeczące.)

Znaczenie obu fragmentów było niejasne aż do stycznia 1994 roku, kiedy David Hough, doktorant George Washington University, zauważył, że liczba 103049 jest dziesiątą liczbą Schrödera (zob. [St2]). Oczywiście nie wiemy, co tak naprawdę obliczał Hipparch (ok. 190–120 r. p.n.e.). Jednak zbieżność liczby 10 zdań prostych, z których buduje się zdania złożone, z rozmieszczaniem nawiasów pomiędzy 10 symbolami, jest zaskakująca. Wierzę, że Hipparch rzeczywiście przeprowadził rozumowanie kombinatoryczne, prawdopodobnie podobne do przedstawionego wyżej rozwiązania „szkolnego”. Przypuszczam, że nie zliczał drzew, ale rozmieszczenia nawiasów. Różnica w rozumowaniu jest nieistotna. Sugestia, że Hipparch rzeczywiście zajmował się kombinatoryką, jest dość nieoczekiwana.

N. L. Biggs w swoim artykule [Bi] wprawdzie cytuje Plutarcha, ale stwierdza, że nie jest znane żadne rozumowanie kombinatoryczne, które prowadziłoby do podanych wyników. Uważa, że Chryzyp miał rację, gdyż logicy twierdzą, iż z $n$ zdań prostych można zbudować $2^{2^n}$ zdań złożonych, a $2^{2^{10}}$ jest znacznie większe od miliona. Twierdzi też, że prawdopodobnie matematycy greccy nie przywiązywali wagi do tego typu obliczeń.

F. Acerbi swój artykuł [A] o obliczeniach Hipparcha zaczął nawet zdaniem:

> To write about combinatorics in ancient Greek mathematics is to write about an empty subject.

Jednak, po dokładniejszej analizie obliczeń Hipparcha, konkluduje:

> I am inclined to regard as very likely that Hipparchus calculations have not been merely an episodical performance of a great mathematician. They suggest instead the existence in his times of a reasonably large supply of combinatorial techniques.

Wierzę, że Acerbi ma rację: to nie jest pusty temat i kombinatoryka europejska zaczęła się w starożytnej Grecji, a nie ponad 1000 lat później od królików Fibonacciego.

**Bibliografia.**


| | | |
|---|---|---|
| [A] | F. Acerbi | On the Shoulders of Hipparchus: A reappraisal of ancient Greek combinatorics,*Archive for History of Exact Sciences*, vol. 57 (2003), str. 465-502. |
| [Bi] | N. L. Biggs | The roots of combinatorics, *Historia Mathematica*, vol. 6 (1979), str. 109–136. |
| [Bo] | S. Bobzien | The Combinatorics of Stoic Conjunction: Hipparchus refuted, Chrysippus vindicated, *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, vol. XL (Summer 2011), str. 157-188. |
| [C1] | L. Comtet | Calcul practique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique, *Enseignement Math.*, vol. 10, 1964, str. 267–270. |
| [C2] | L. Comtet | *Advanced Combinatorics*, Dordrecht-Holland/Boston, 1974. |
| [FZ] | D. Foata, D. Zeilberger | A classic proof of a recurrence for a vary classical sequence, arXiv:math/9805015v1 [math.CO] 4 May 1998. |
| [HKL] | L. Habsieger M. Kazarian S. Lando | On the Second Number of Plutarch, *Amer. Math.Monthly* vol. 105 (1998), str. 446. |
| [P] | Plutarch | *Moralia, Zagadnienia biesiadne (Quaestiones convivales)*, ustęp 8.9.3. cytowane za: Plutarch's Moralia in fifteen volumes, Harvard University Press, 1961, vol. IX, str. 195–197. |
| [R] | S. Roman | *An Introduction to Catalan Numbers*, Birkhäuser, 2015. |
| [Sch] | E. Schröder | Vier combinatorische Probleme, *Z. für Math. Physic*, vol 15, 1870, str. 361–370. |
| [St1] | R. P. Stanley | *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015. |
| [St2] | R. P. Stanley | Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough, *Amer. Math. Monthly*, vol. 104, No. 4, Apr. 1997, str. 344-350. |