1 0 3 0 4 9

Wojciech Guzicki

Konferencja SEM „Kalejdoskop matematyczny”

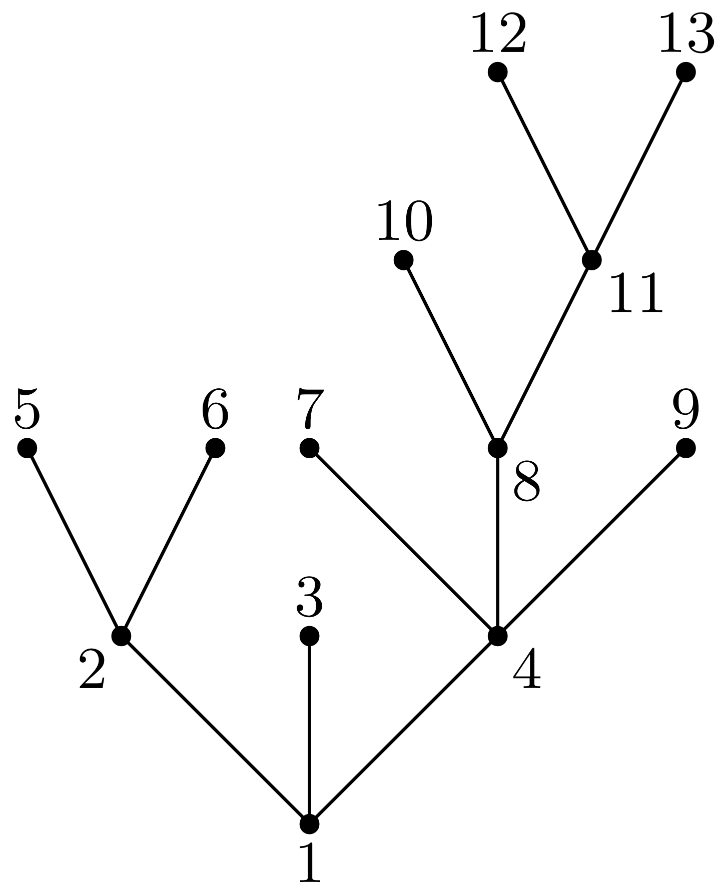
Żerków, 22–24.10.2021 r.

Naszym celem będzie zliczanie drzew Schrödera

Drzewo Schrödera:

Liście: 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13

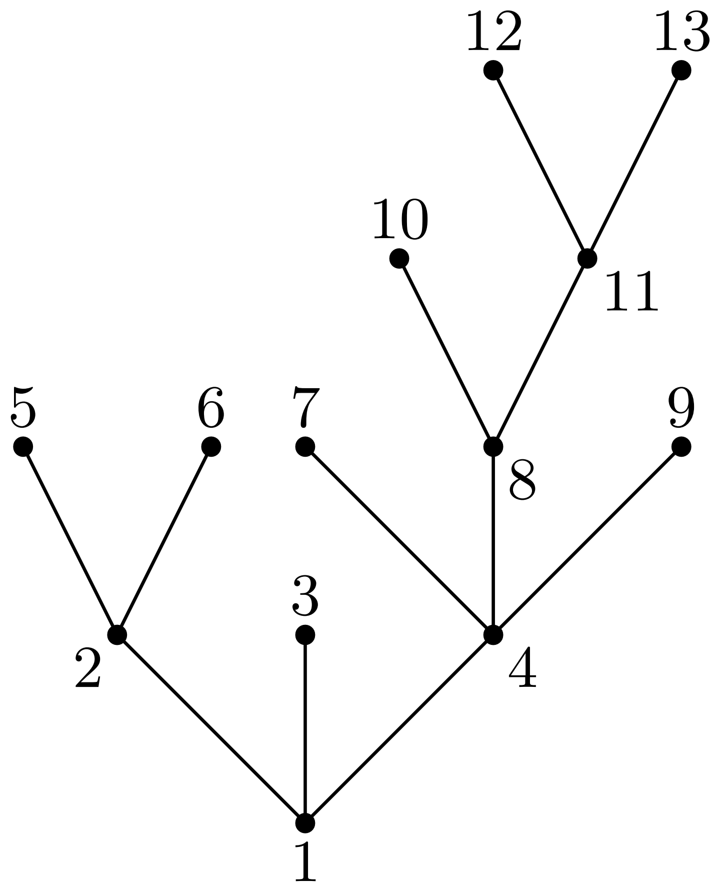
Węzły: 1, 2, 4, 8, 11



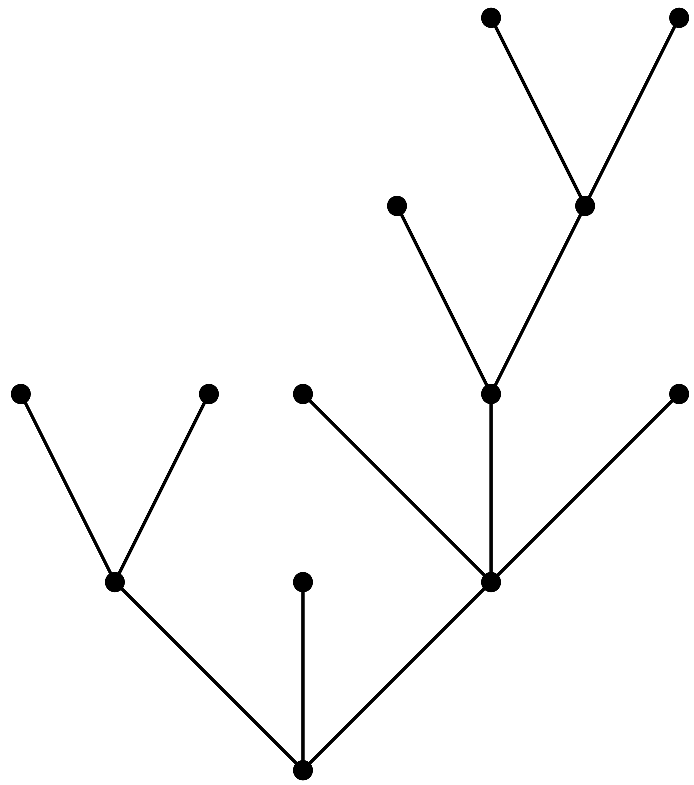
Najprostszym drzewem Schrödera jest sam korzeń. Takie drzewo z korzeniem r zapisujemy za pomocą symbolu $[r]$.

Jeśli dane są drzewa Schrödera $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (gdzie $k \geq 2$), to drzewem Schrödera jest uporządkowany ciąg postaci $[r; T_1, T_2, \ldots, T_k]$.

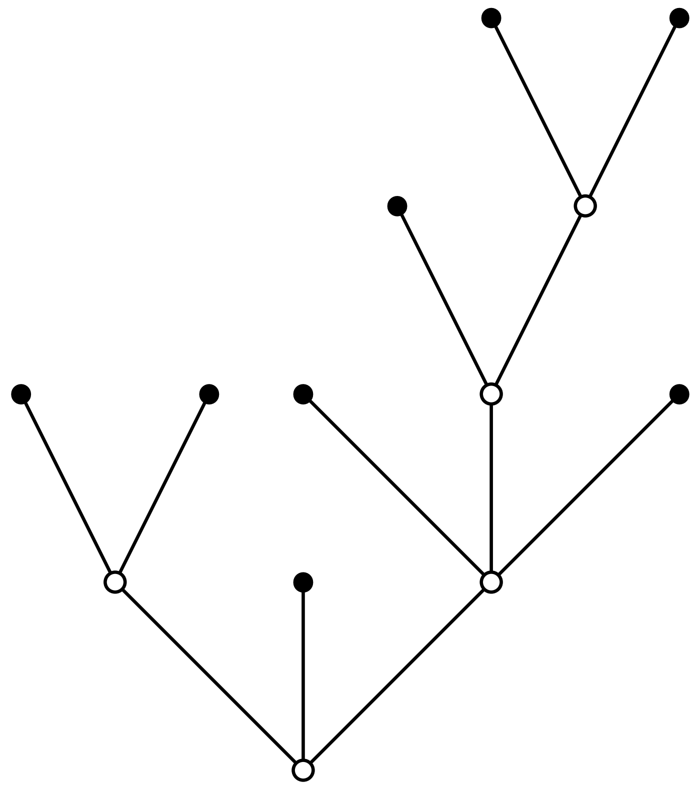
To drzewo ma korzeń r, z którego wyrastają drzewa $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — w tej kolejności, licząc od lewej strony.



$$\left[1; \left[2; 5, 6\right], 3, \left[4; 7, \left[8; 10, [11; 12, 13]\right], 9\right]\right]$$

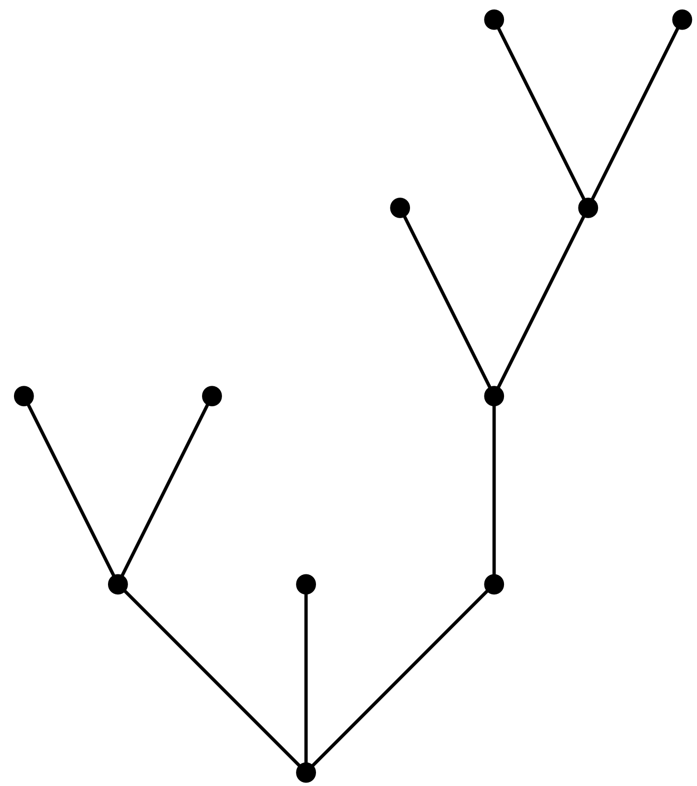


$$\left[\bullet; \left[\bullet; \bullet, \bullet\right], \bullet, \left[\bullet; \bullet, \left[\bullet; \bullet, \left[\bullet; \bullet, \bullet\right]\right], \bullet\right]\right]$$



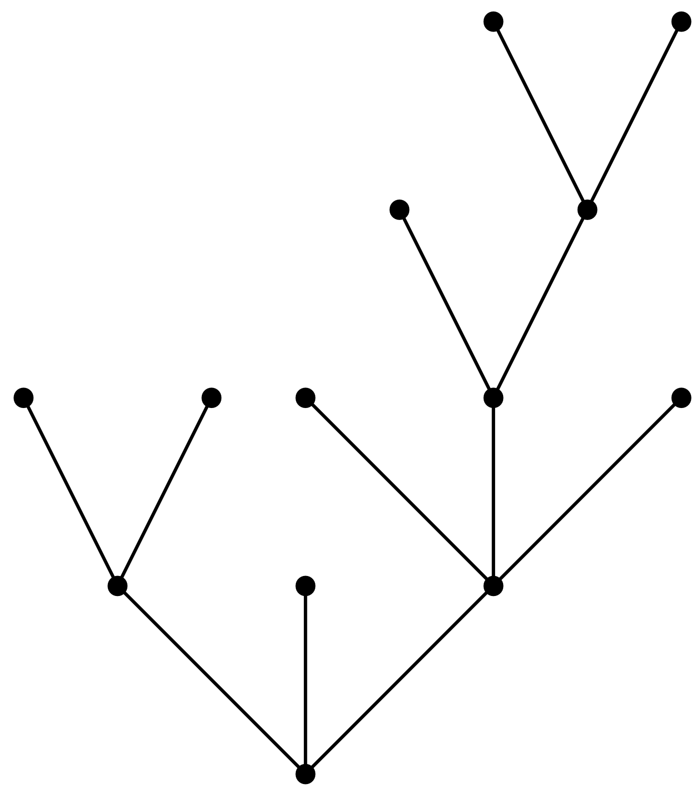
$$\Big[\circ;\,[\circ;\bullet,\bullet],\bullet,\big[\circ;\bullet,[\circ;\bullet,[\circ;\bullet,\bullet]],\bullet\big]\Big]$$

To nie jest drzewo Schrödera:



Rozmieszczanie nawiasów:

$$(\bullet\bullet)\bullet\Bigl(\bullet(\bullet(\bullet\bullet))\bullet\Bigr)$$



Liczbą Schrödera s_n nazywamy liczbę drzew Schrödera mających dokładnie n liści.

Inaczej mówiąc, jest to liczba sposobów rozmieszczenia nawiasów pomiędzy n elementami.

W tym wykładzie przedstawię dwie metody obliczania kolejnych liczb Schrödera.

Pierwsza metoda jest całkowicie dostępna w szkole, chociaż obliczenia są dość żmudne.

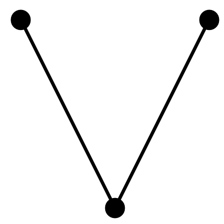
Druga metoda polega na znalezieniu dość prostego równania rekurencyjnego, które pozwoli obliczyć szybko początkowe liczby Schrödera.

W obu metodach zaczynamy od wypisania wszystkich możliwych drzew Schrödera dla małych wartości n.

Istnieje tylko jedno drzewo Schrödera mające jeden liść; składa się ono tylko z korzenia.

Stąd wynika, że: $s_1 = 1.$

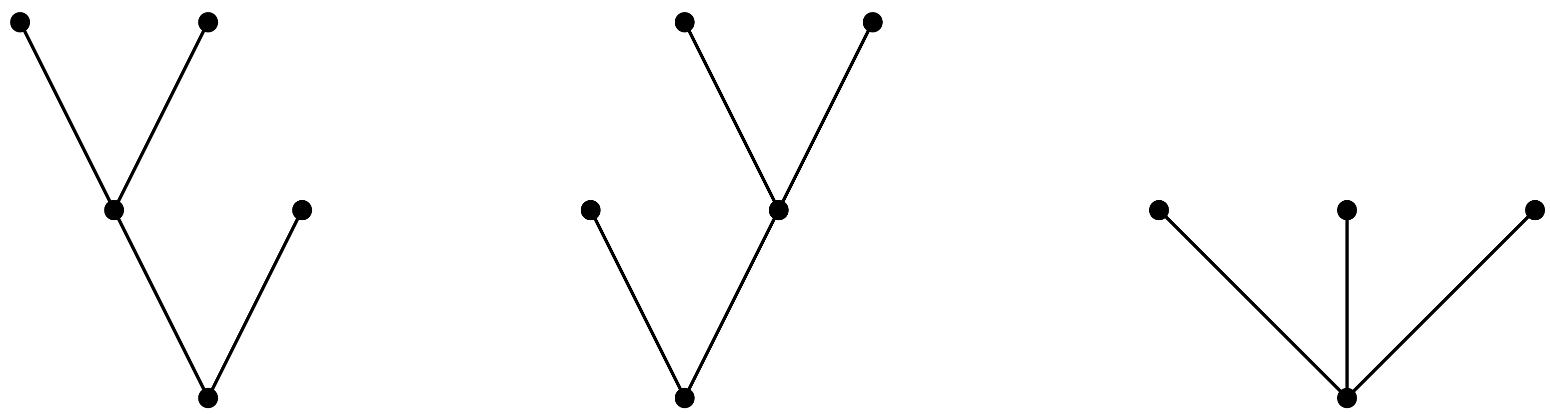
Istnieje także tylko jedno drzewo Schrödera mające dwa liście. Oto ono:



Odpowiada ono wykonaniu działania na dwóch elementach: ••.

Mamy zatem: $s_2 = 1$.

Istnieją trzy drzewa Schrödera mające trzy liście:



Odpowiadają one następującym rozmieszczeniom nawiasów:

$$(\bullet\bullet)\bullet, \quad \bullet(\bullet\bullet) \quad \text{oraz} \quad \bullet\bullet\bullet\,.$$

Mamy zatem: $\quad s_3 = 3.$

Niech $n = 4$.

Mamy cztery rozkłady (nazywane nieuporządkowanymi) liczby 4 na sumę liczb mniejszych:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

W dalszym ciągu poszczególne rozważane przypadki będą odpowiadały rozkładom nieuporządkowanym, ale w każdym przypadku będziemy musieli uwzględnić liczbę różnych kolejności składników w danym rozkładzie.

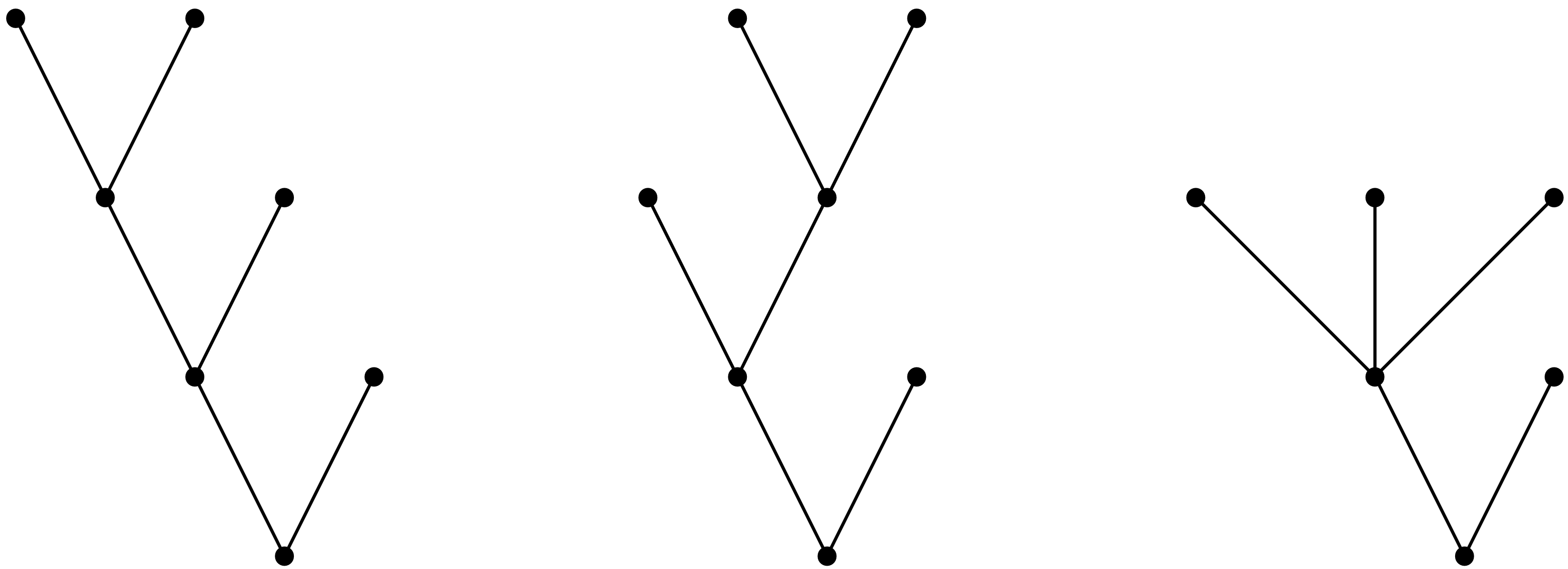
Przypadek 4.1. Rozważamy rozkład $4 = 3 + 1$.

Występuje on w dwóch postaciach: $4 = 3 + 1 = 1 + 3$.

W korzeniu drzewo rozgałęzia się na dwa drzewa: jedno z trzema liśćmi, drugie z jednym.

Istnieją 3 różne drzewa z trzema liśćmi, więc mamy w tym przypadku 6 drzew.

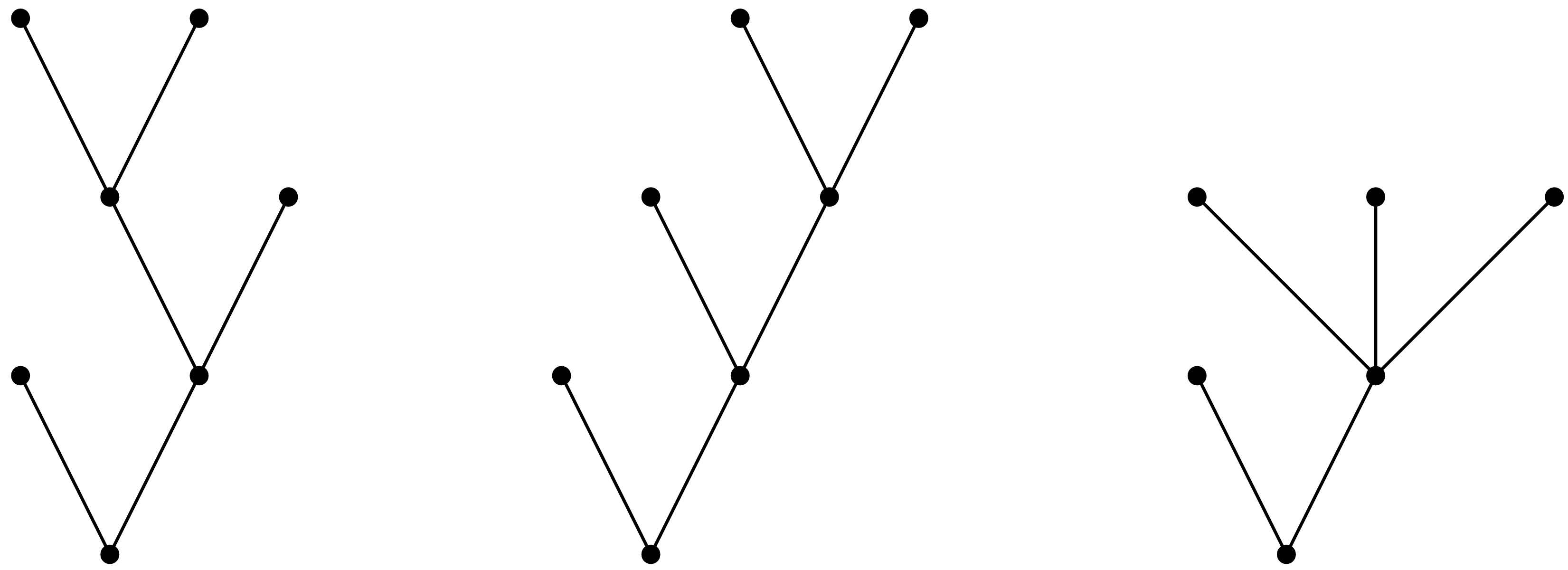
Najpierw trzy drzewa, w którym trzy liście są w lewym poddrzewie:



Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów:

$$\big((\bullet\bullet)\bullet\big)\bullet, \qquad \big(\bullet(\bullet\bullet)\big)\,\bullet \qquad \text{oraz} \qquad (\bullet\;\bullet\;\bullet)\;\bullet\,.$$

Następnie trzy drzewa, w których trzy liście są z prawej strony:

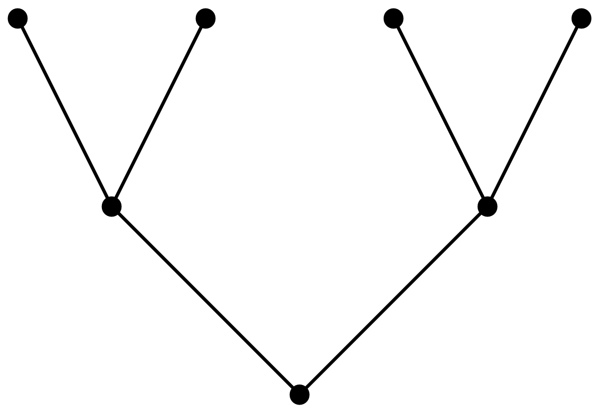


Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów:

$$\bullet\big((\bullet\bullet)\bullet\big), \qquad \bullet\big(\bullet(\bullet\bullet)\big) \qquad \text{oraz} \qquad \bullet\,(\bullet\;\bullet\;\bullet).$$

Przypadek 4.2. Rozważamy rozkład $4 = 2 + 2$. Występuje on tylko w jednej postaci.

Jest tylko jedno takie drzewo. W korzeniu rozgałęzia się na dwa identyczne drzewa mające po dwa liście:



Odpowiada mu rozmieszczenie nawiasów: $(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$.

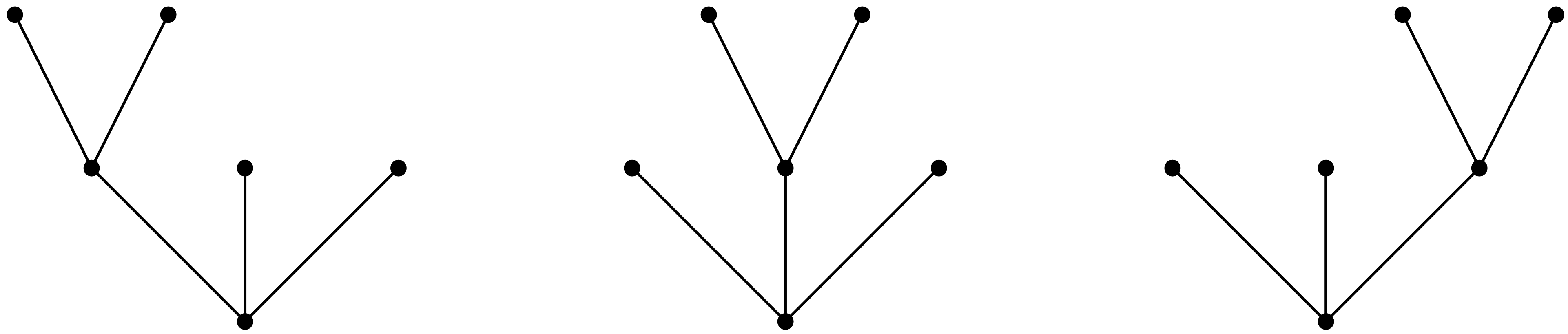
Przypadek 4.3. Rozważamy rozkład $4 = 2 + 1 + 1$.

Występuje on w trzech postaciach: $4 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2$.

W korzeniu drzewo rozgałęzia się na trzy drzewa: jedno ma dwa liście i dwa po jednym liściu.

Drzewo z dwoma liśćmi może znaleźć się na jednym z trzech miejsc: po lewej stronie, w środku lub po prawej stronie.

Mamy zatem trzy drzewa:

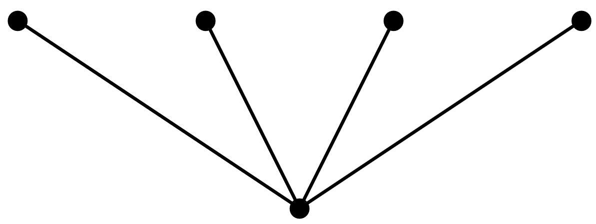


Odpowiadają im rozmieszczenia nawiasów:

$$(\bullet\bullet)\bullet\bullet, \qquad \bullet(\bullet\bullet)\bullet \qquad \text{oraz} \qquad \bullet\bullet(\bullet\bullet).$$

Przypadek 4.4. $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Z korzenia wyrastają cztery liście. Jest tylko jedno takie drzewo:



Odpowiada mu brak nawiasów: $\bullet\bullet\bullet\bullet$.

Łącznie mamy w tych czterech przypadkach 11 drzew.

Stąd otrzymujemy: $s_4 = 11.$

Wreszcie s_5.

Mamy 6 sposobów zapisania liczby 5 jako sumy liczb mniejszych:

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

$4+1$	2	$2 \cdot s_4 \cdot s_1$	$= 2 \cdot 11 \cdot 1$	$= 22$
$3+2$	2	$2 \cdot s_3 \cdot s_2$	$= 2 \cdot 3 \cdot 1$	$= 6$
$3+1+1$	3	$3 \cdot s_3 \cdot s_1 \cdot s_1$	$= 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$	$= 9$
$2+2+1$	3	$3 \cdot s_2 \cdot s_2 \cdot s_1$	$= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$= 3$
$2+1+1+1$	4	$4 \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$	$= 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$= 4$
$1+1+1+1+1$	1	$1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$	$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$= 1$

Stąd otrzymujemy:

$$s_5 = 22 + 6 + 9 + 3 + 4 + 1 = 45.$$

W podobny sposób, ale coraz bardziej żmudny, możemy obliczyć:

$$s_6 = 197,$$
$$s_7 = 903,$$
$$s_8 = 4297,$$
$$s_9 = 20793.$$

Wreszcie, po rozpatrzeniu 41 przypadków, otrzymujemy:

$$s_{10} = 103049.$$

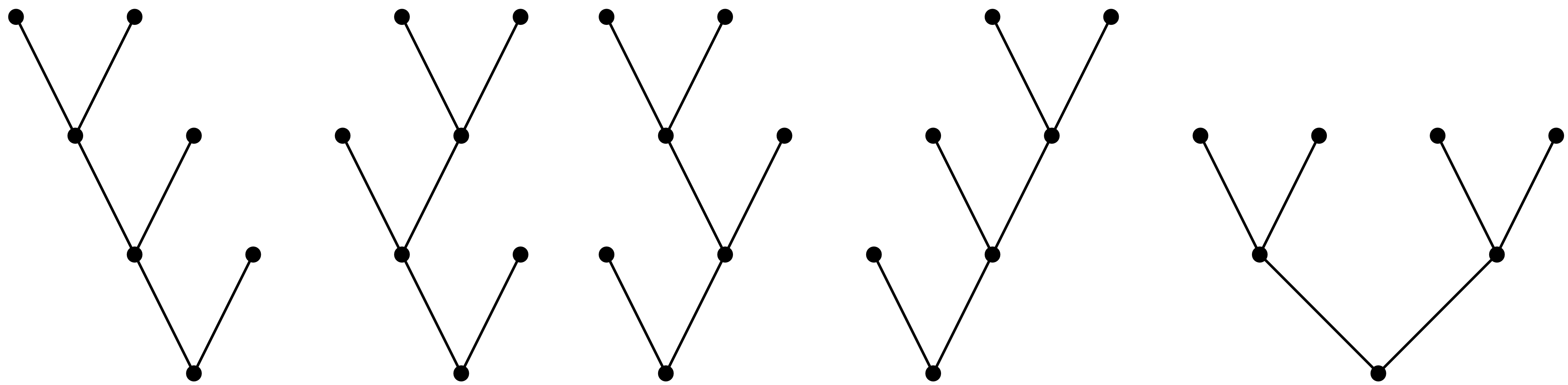
Drzewa binarne

Najprostszym drzewem binarnym jest sam korzeń. Takie drzewo binarne z korzeniem r zapisujemy także za pomocą symbolu $[r]$.

Jeśli dane są dwa drzewa binarne T_1 i T_2, to drzewem binarnym jest uporządkowana trójka postaci $[r; T_1, T_2]$.

To drzewo binarne ma korzeń r, z którego wyrastają dwa poddrzewa: T_1 i T_2. Znów ważna jest kolejność: poddrzewa T_1 i T_2 są rysowane w tej kolejności, licząc od lewej strony.

Wśród 11 drzew Schrödera z czterema liśćmi mamy tylko 5 drzew binarnych:



Liczby Catalana

Niech c_n oznacza liczbę drzew binarnych mających dokładnie n liści.

Liczby C_n (dla $n \geq 0$) zdefiniowane wzorem

$$C_n = c_{n+1}$$

są nazywane liczbami Catalana. Liczba Catalana C_n jest więc liczbą drzew binarnych mających $n + 1$ liści.

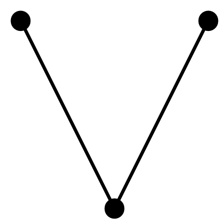
W dalszym ciągu będę zajmował się liczbami c_n, które dla wygody także będę nazywał liczbami Catalana.

Mamy oczywiście:

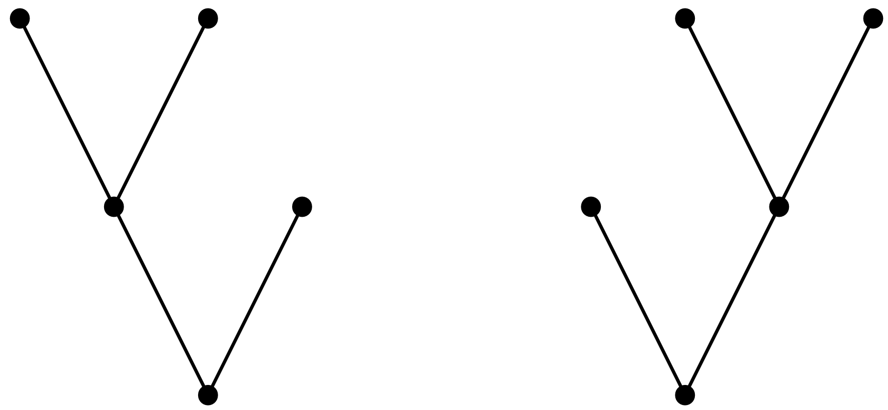
$$c_1 = c_2 = 1.$$

Istnieje bowiem dokładnie jedno drzewo binarne mające jeden liść: jest ono złożone tylko z korzenia.

Istnieje także dokładnie jedno drzewo binarne mające dokładnie dwa liście:



Istnieją dwa drzewa binarne mające trzy liście:



Ponadto z przykładu powyżej wiemy, że istnieje pięć drzew binarnych mających cztery liście.
Mamy zatem dwie następne liczby Catalana:

$$c_3 = 3 \quad \text{oraz} \quad c_4 = 5.$$

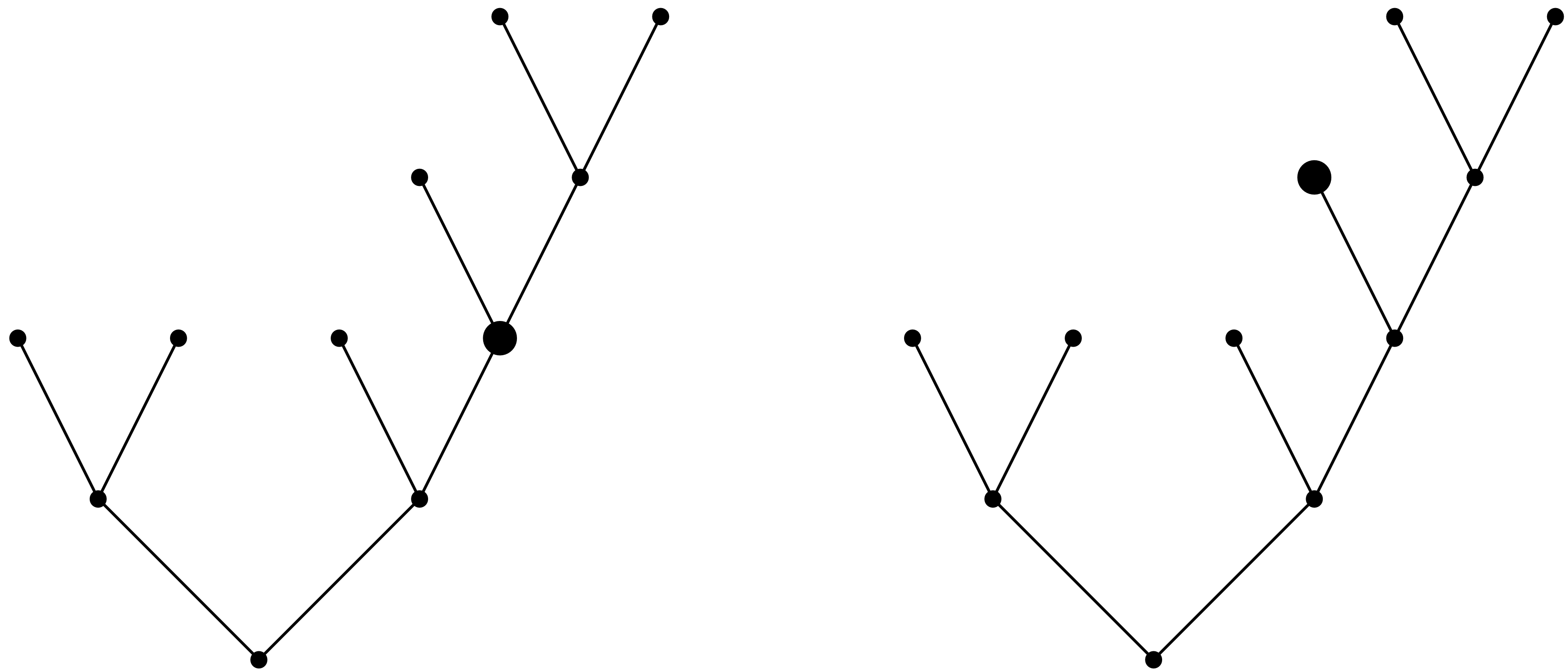
Twierdzenie 1. Liczby Catalana c_n spełniają następujące równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ (n+1)c_{n+1} &= 2(2n-1)c_n, \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Dwie własności drzew binarnych:

- jeśli drzewo binarne ma n liści, to ma $n-1$ węzłów,
- jeśli drzewo binarne ma n liści, to ma $2n-1$ wierzchołków.

Drzewa zaznaczone



- $BZ(n)$ jest zbiorem zaznaczonych drzew binarnych, w których jest dokładnie n liści (przy czym zaznaczony jest dowolny wierzchołek drzewa).

- $LZ(n)$ jest zbiorem zaznaczonych drzew binarnych mających dokładnie n liści, w których zaznaczony jest jeden liść.

Wówczas mamy oczywiście następujące równości:

$$|BZ(n)| = (2n-1)c_n \quad \text{oraz} \quad |LZ(n)| = nc_n.$$

Niech $L \neq R$. Równanie rekurencyjne, które występuje w tezie twierdzenia 1., może być zapisane w postaci:

$$\big|LZ(n+1)\big| = \big|\{L, R\} \times BZ(n)\big| \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Dowód twierdzenia 1. polega zatem na znalezieniu bijekcji ze zbioru

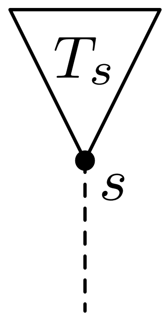
$$\{L, R\} \times BZ(n)$$

na zbiór

$$LZ(n+1).$$

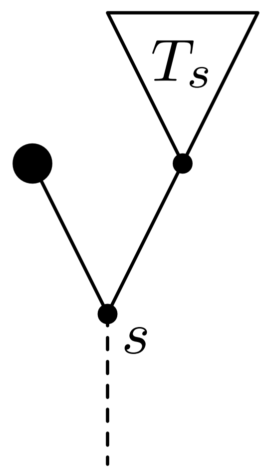
Niech T będzie dowolnym zaznaczonym drzewem binarnym mającym n liści, czyli $T \in BZ(n)$.

Niech s będzie zaznaczonym wierzchołkiem i niech T_s będzie poddrzewem drzewa T o korzeniu w zaznaczonym wierzchołku s.

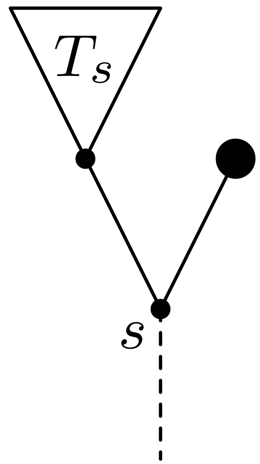


Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Rozpatrujemy parę (L, T). Wówczas w drzewie T poddrzewo T_s zastępujemy poddrzewem postaci:



Przypadek 2. Rozpatrujemy parę (R, T). Wówczas w drzewie T poddrzewo T_s zastępujemy poddrzewem postaci:



To kończy dowód twierdzenia 1.

Wniosek 2. Liczby Catalana wyrażają się wzorem:

$$c_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

W tym wniosku oczywiście przyjmujemy $\binom{0}{0} = 1$.

Kilka następnych liczb Catalana:

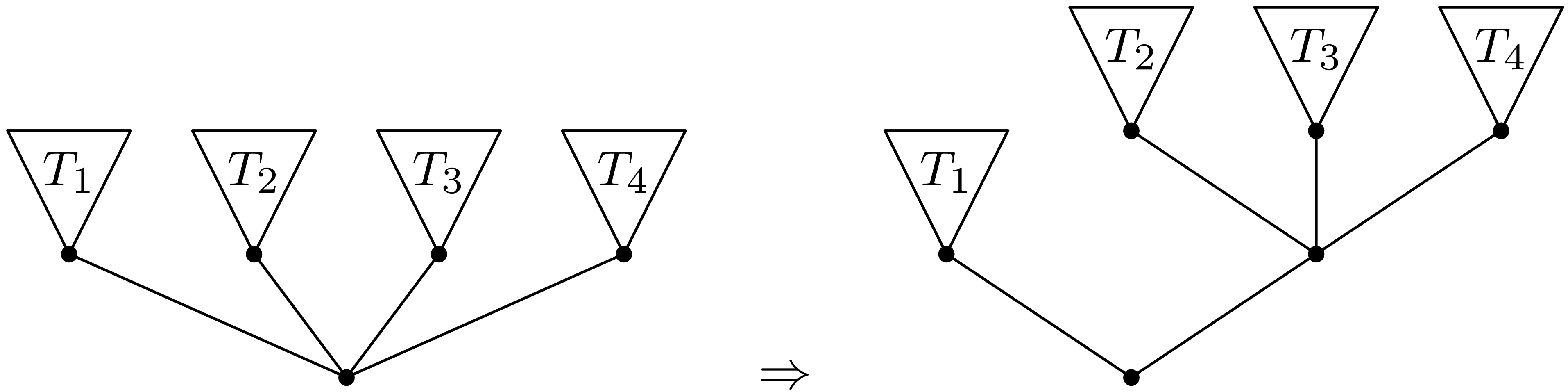
$$\begin{aligned} c_5 &= 14, & c_8 &= 429, \\ c_6 &= 42, & c_9 &= 1430, \\ c_7 &= 132, & c_{10} &= 4862. \end{aligned}$$

Twierdzenie 3. Liczby Schrödera s_n spełniają następujące równanie rekurencyjne:

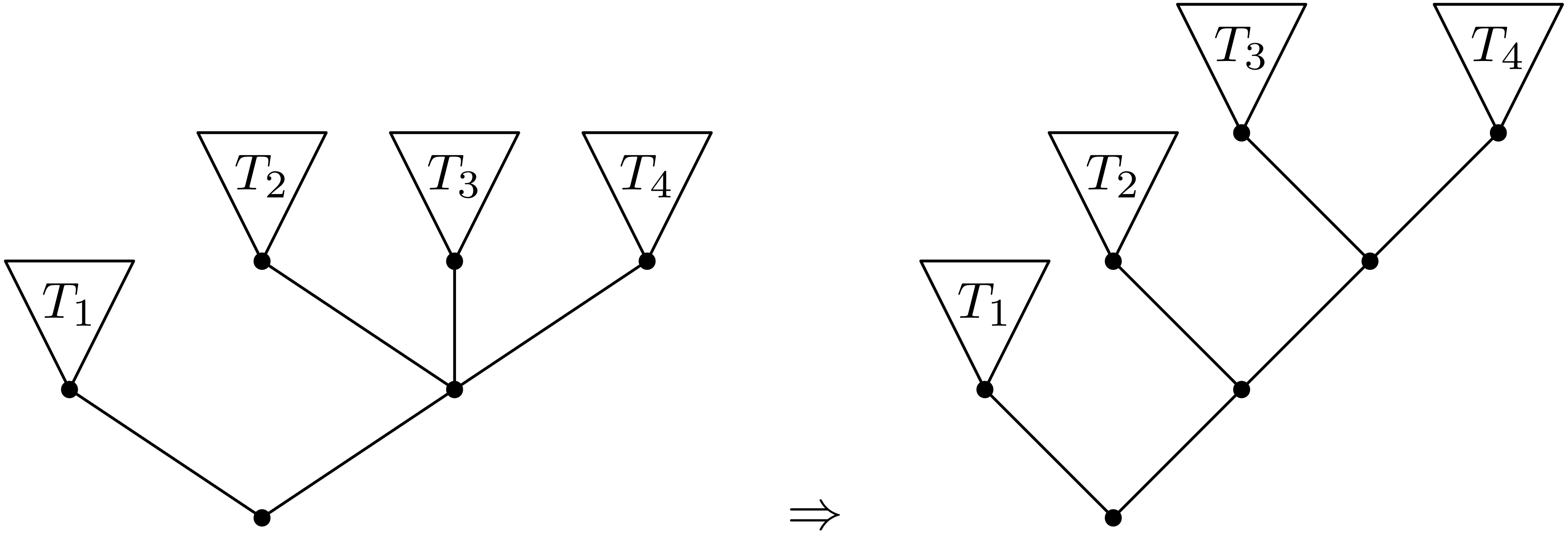
$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1, \\ (n+1)s_{n+1} &= 3(2n-1)s_n - (n-2)s_{n-1}, \quad \text{dla} \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Zamiana drzew Schrödera na drzewa binarne

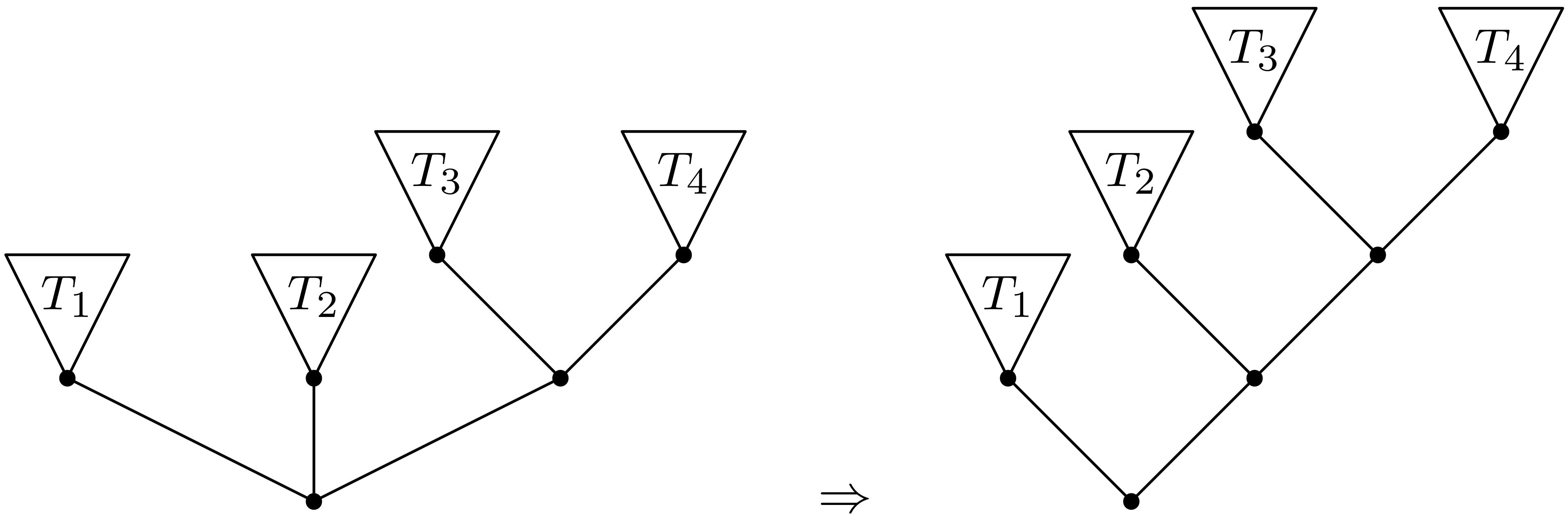
Krok 1:



Krok 2:



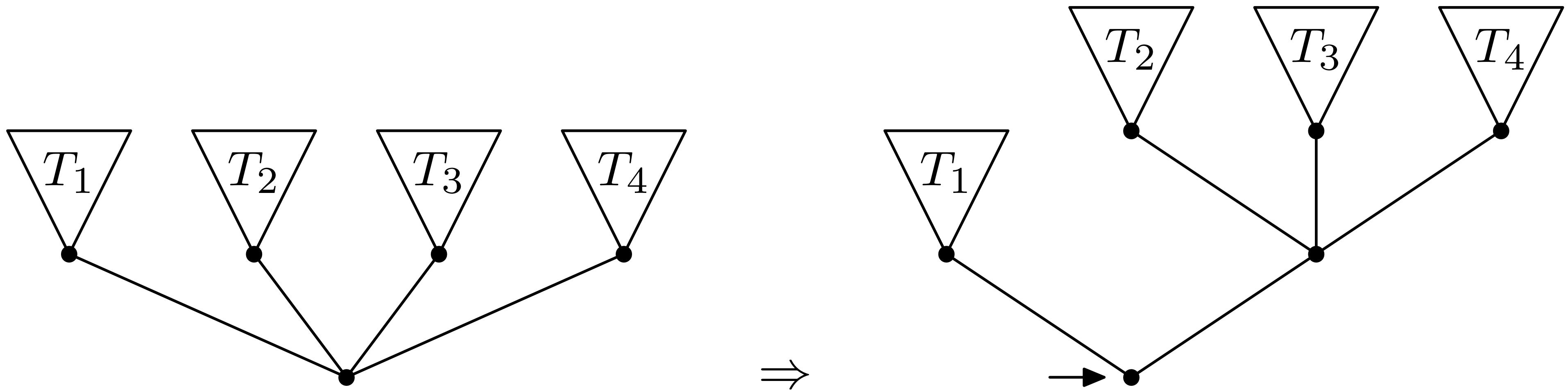
Ale także:



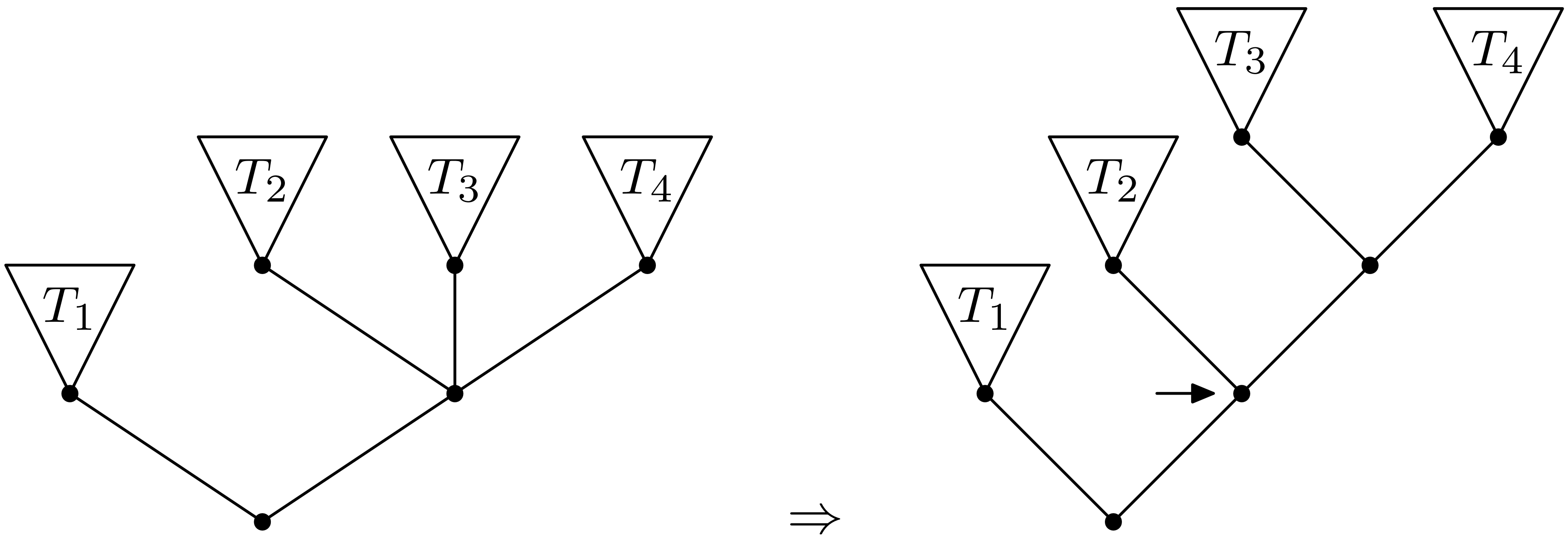
Jedno drzewo binarne T powstało z czterech różnych drzew Schrödera (łącznie z samym drzewm T).

Musimy jakoś odróżnić powstałe w ten sposób drzewa binarne.

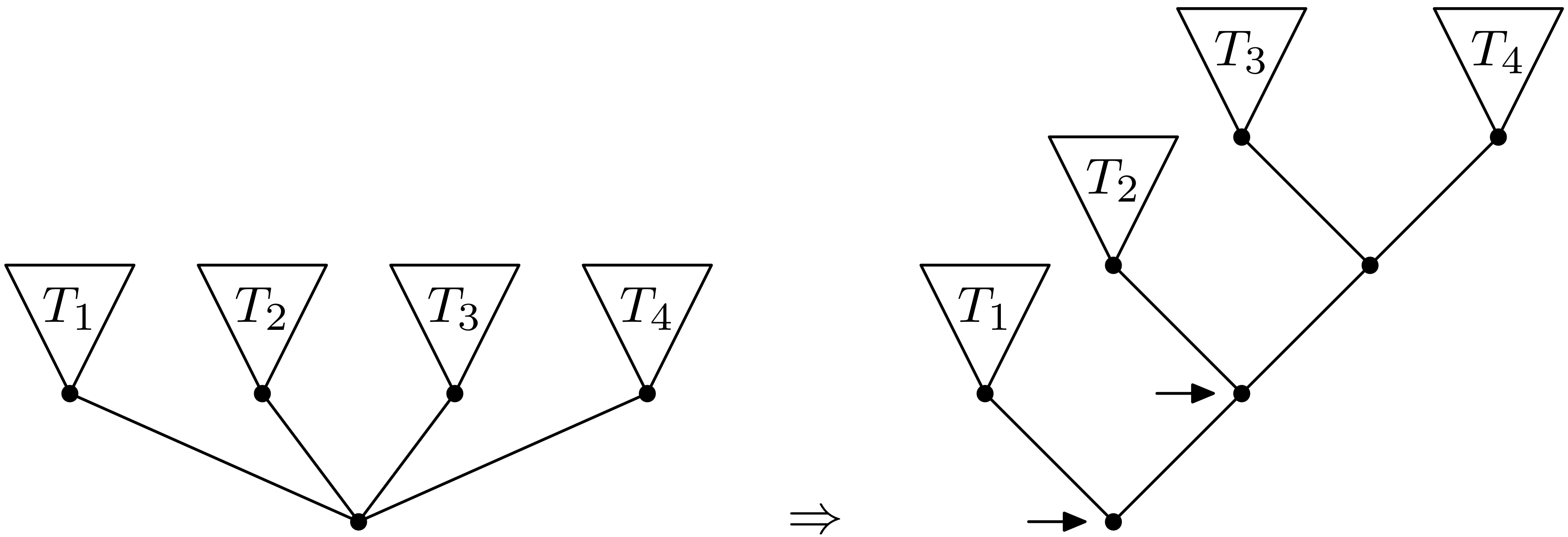
Wskazujemy węzeł „rozdwajany”:



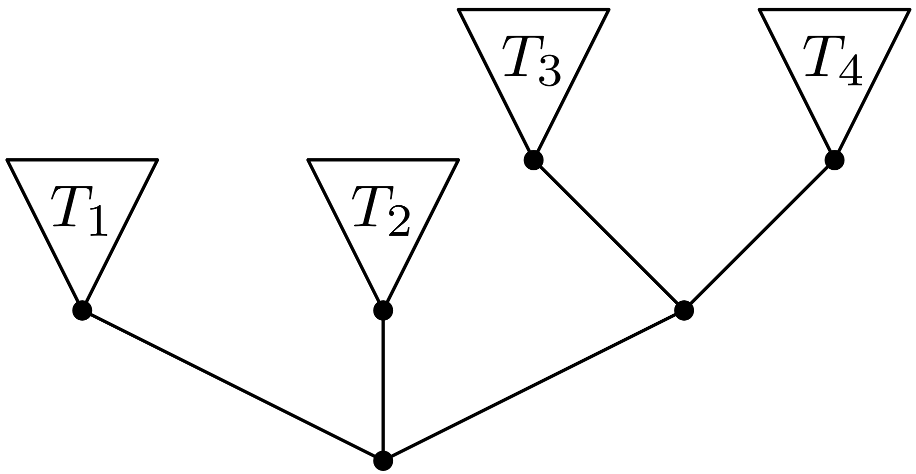
Podobnie:



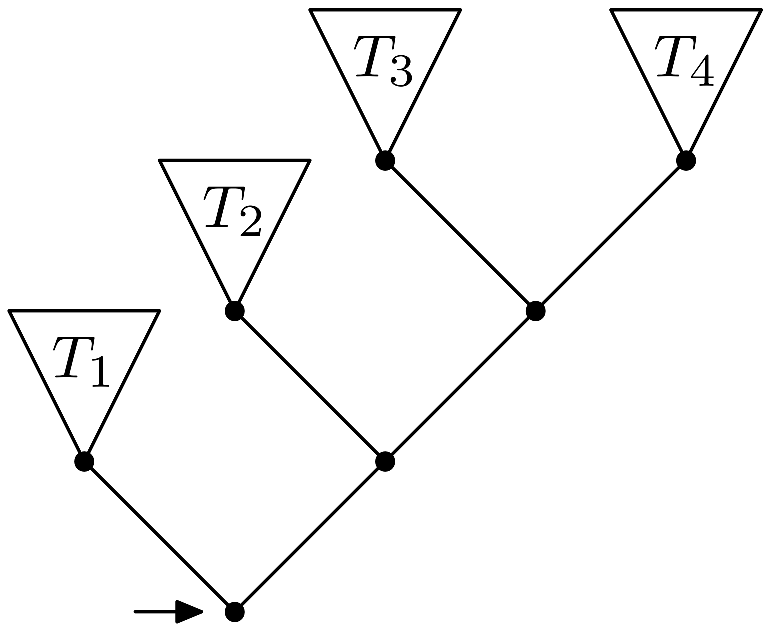
Możemy wskazać więcej węzłów:



Mamy także:



$\Rightarrow$



Każdy węzeł otrzyma jedną z dwóch wag: 1 lub 2.

Węzły wskazywane to te, które dostaną wagę 2.

Mówimy, że węzeł jest dobrze wyważony, w dwóch przypadkach:

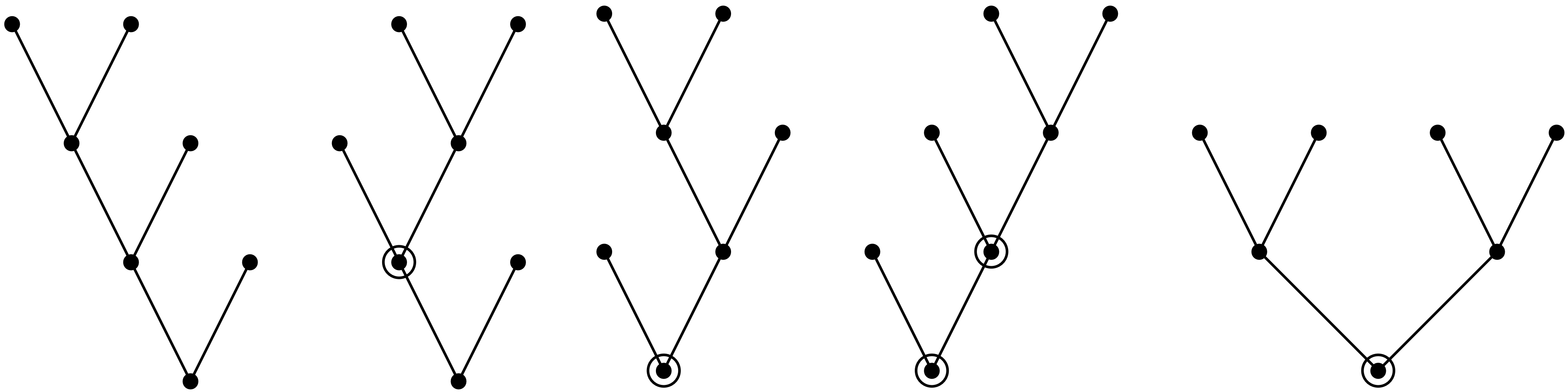
- jeśli ma wagę 1

lub

- jeśli ma wagę 2 oraz wyrastające z niego prawe poddrzewo składa się nie tylko z liścia.

Mówimy, że drzewo binarne jest dobrze wyważone, jeśli każdy jego węzeł jest dobrze wyważony.

Węzły, które mogą mieć wagę 2:



Dowód twierdzenia 3. zostanie przeprowadzony w dwóch krokach.

Pierwszy krok polega na wykazaniu, że dla danej liczby naturalnej n liczba s_n drzew Schrödera mających n liści, jest równa liczbie dobrze wyważonych drzew binarnych mających n liści.

Potrzebną do tego bijekcję definiujemy w następujący sposób:

- Jeśli drzewo T składa się tylko z korzenia (tzn. $T = [r]$), to przyjmujemy
$$\Phi(T) = [r].$$

- Jeśli w drzewie T z korzenia wyrastają dokładnie dwa poddrzewa T_1 i T_2 (tzn. $T = [r; T_1, T_2]$), to przyjmujemy
$$\Phi(T) = [1; \Phi(T_1), \Phi(T_2)].$$

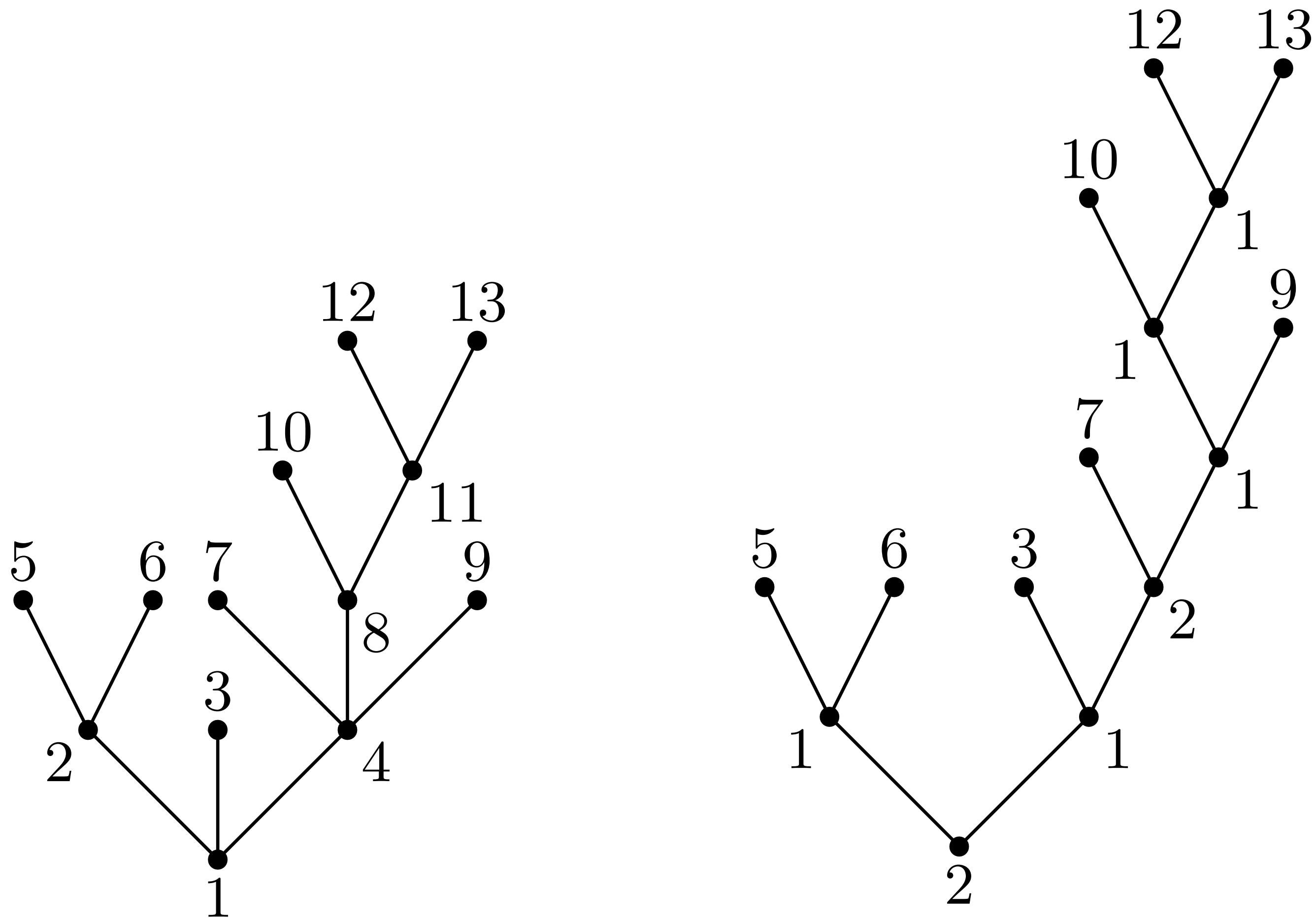
- Jeśli w drzewie T z korzenia wyrastają poddrzewa $T_1, T_2, \ldots, T_k$, gdzie $k > 2$, (tzn. $T = [r, T_1, T_2, \ldots, T_k]$), to przyjmujemy
$$\Phi(T) = \big[2, \Phi(T_1), \Phi([r, T_2, \ldots, T_k])\big].$$

Należy wykazać, że:

- tak określona funkcja Φ rzeczywiście jest bijekcją ze zbioru drzew Schrödera w zbiór dobrze wyważonych drzew binarnych

oraz

- funkcja Φ zachowuje liczbę liści drzewa.

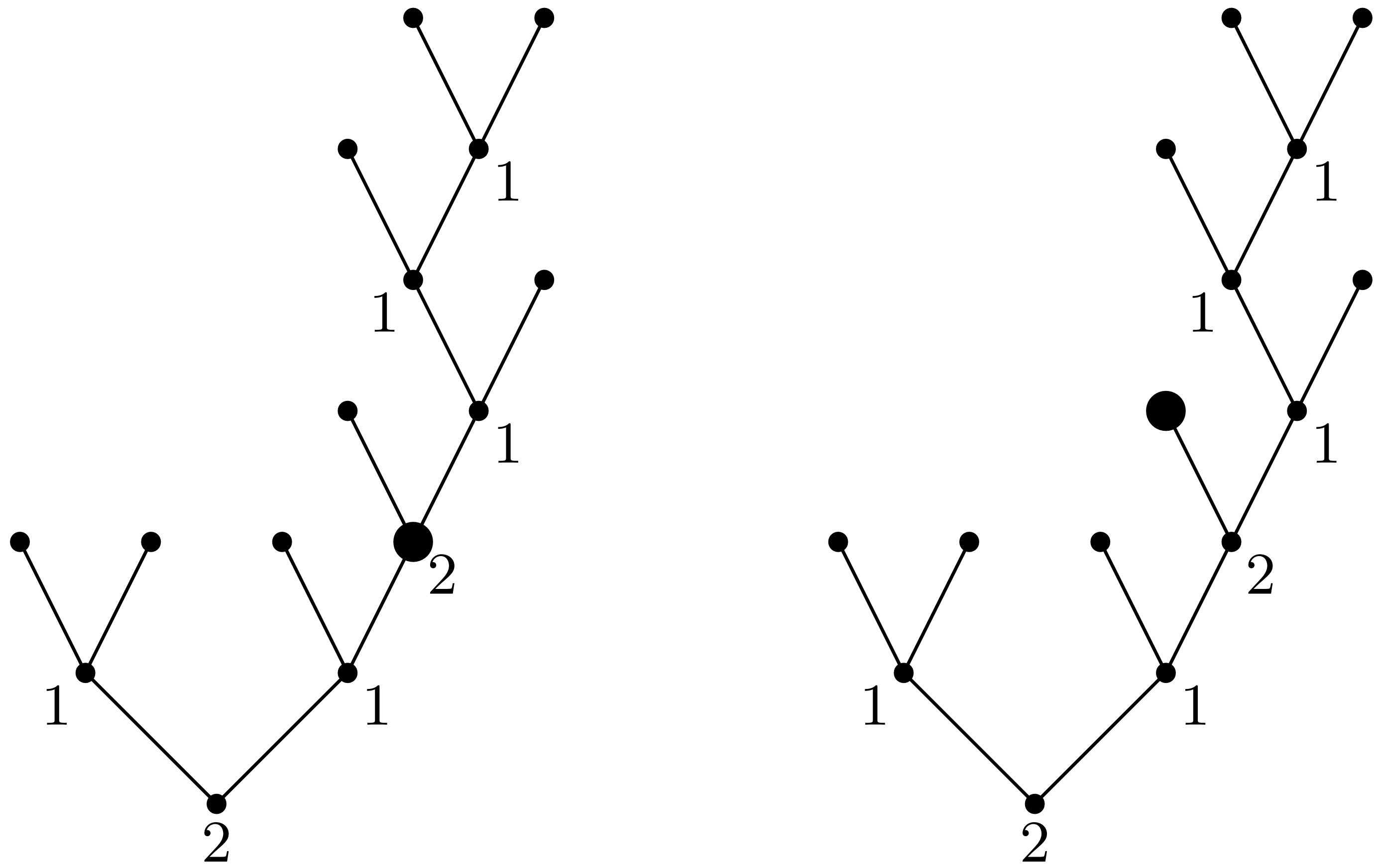


$T \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(T)$

Stąd wynika, że s_n jest liczbą dobrze wyważonych drzew binarnych mających n liści.

Drugi krok w dowodzie twierdzenia 3. polega na zaznaczaniu wierzchołków (tak jak w dowodzie twierdzenia 1.).

Jeśli w dobrze wyważonym drzewie binarnym jest zaznaczony jeden wierzchołek, to takie drzewo będziemy nazywać drzewem zaznaczonym. Zaznaczony wierzchołek będziemy na rysunku przedstawiać większą kropką.


1
1
1
2
1
1
2
1
1
1
2
1
1
2

- $DZ(n)$ oznacza zbiór wszystkich drzew zaznaczonych mających n liści,
- $LZ(n)$ oznacza zbiór drzew zaznaczonych mających n liści, w których zaznaczony został jeden liść,
- $WZ(n)$ oznacza zbiór drzew zaznaczonych mających n liści, w których zaznaczony został jeden węzeł.

$$|DZ(n)| = (2n-1)\cdot s_n, \quad |LZ(n)| = n\cdot s_n \quad \text{oraz} \quad |WZ(n)| = (n-1)\cdot s_n.$$

$$3 \cdot |DZ(n)| = |LZ(n+1)| + |WZ(n-1)| \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

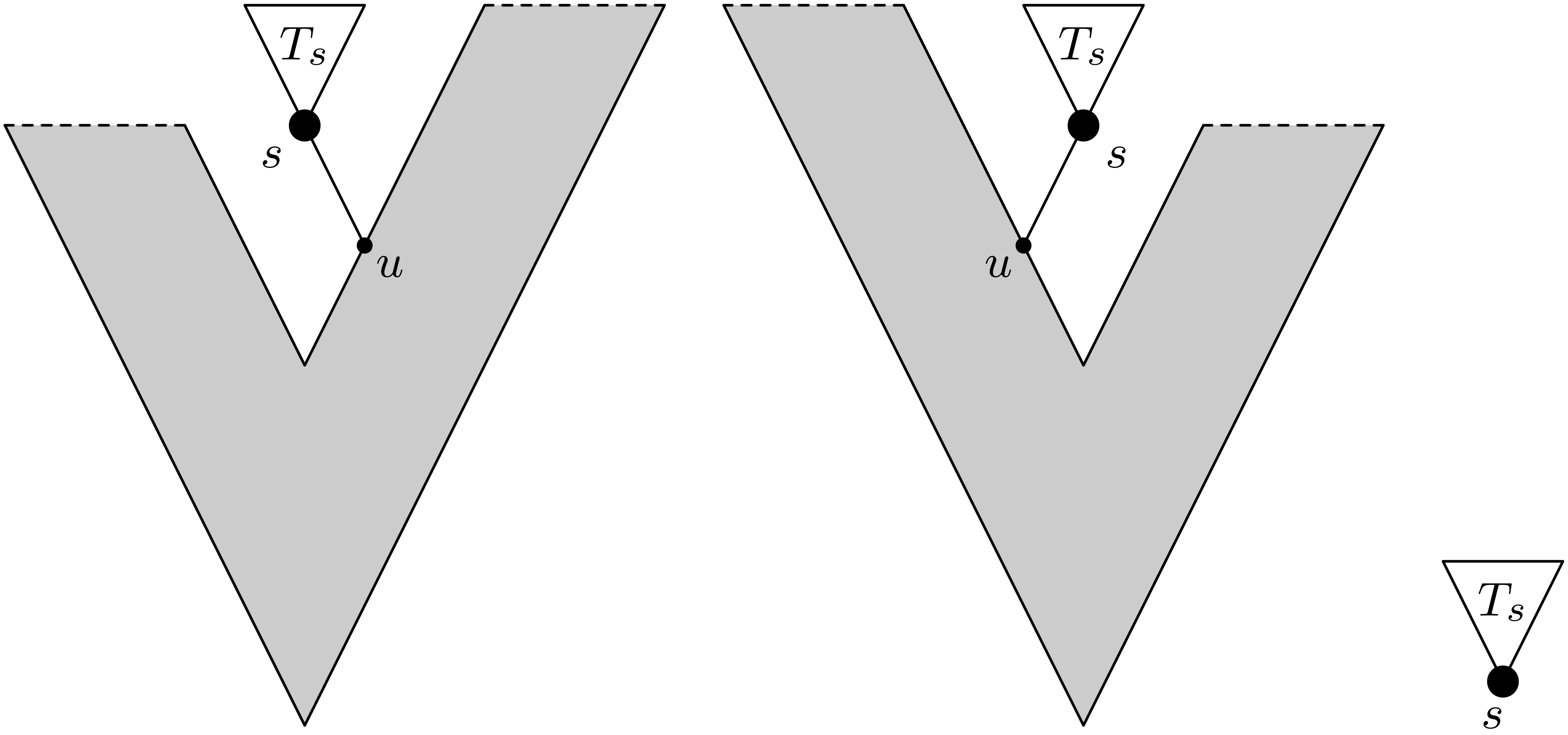
Wybierzmy trzy różne elementy L_1, L_2 i R_1.

Do zakończenia dowodu twierdzenia wystarczy wskazać bijekcję przeprowadzającą zbiór

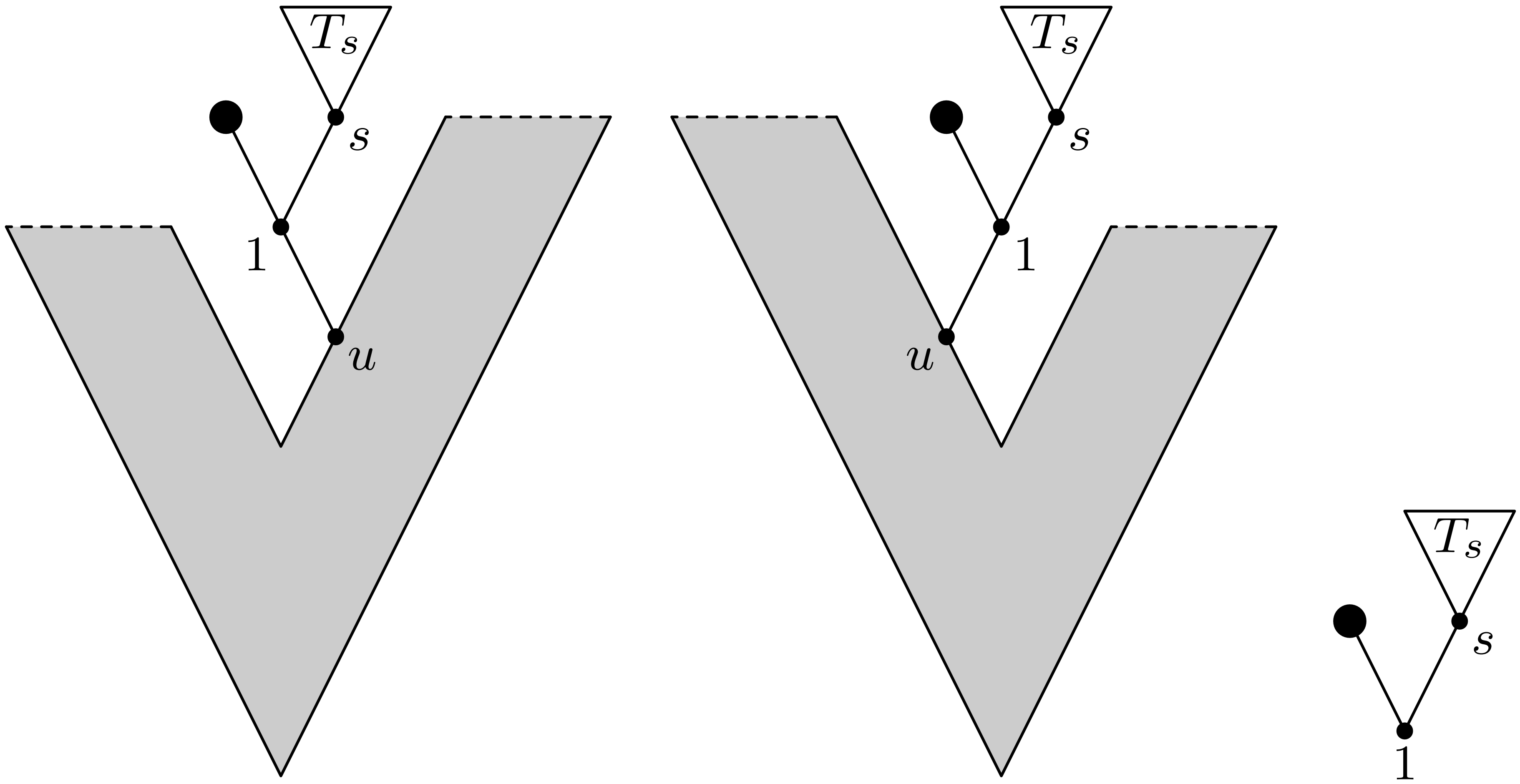
$$\{L_1, L_2, R_1\} \times DZ(n)$$

na sumę rozłączną zbiorów

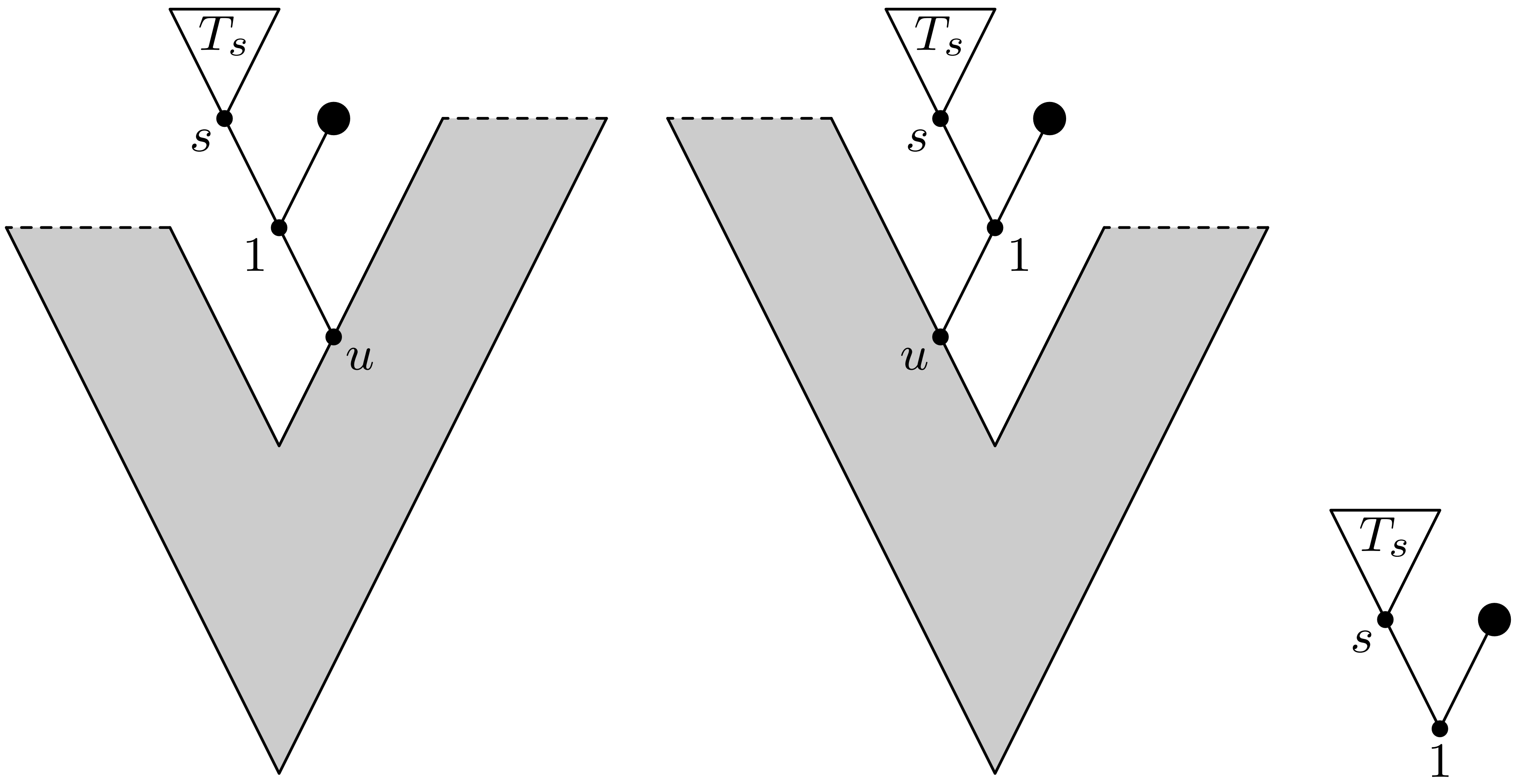
$$LZ(n+1) \cup WZ(n-1).$$


T_s
s
u
T_s
s
u
T_s
s

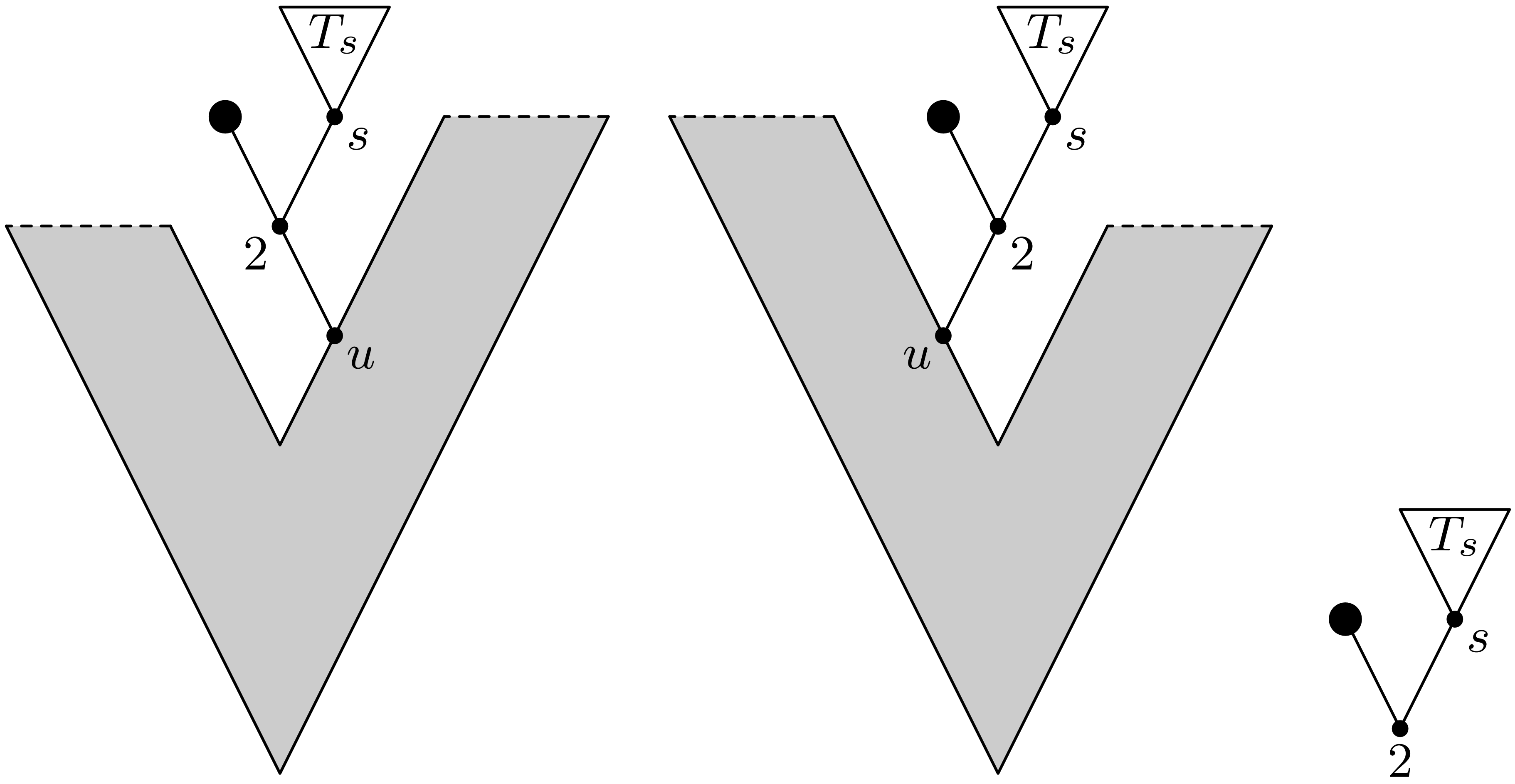
(L_1, T)



(R_1, T)

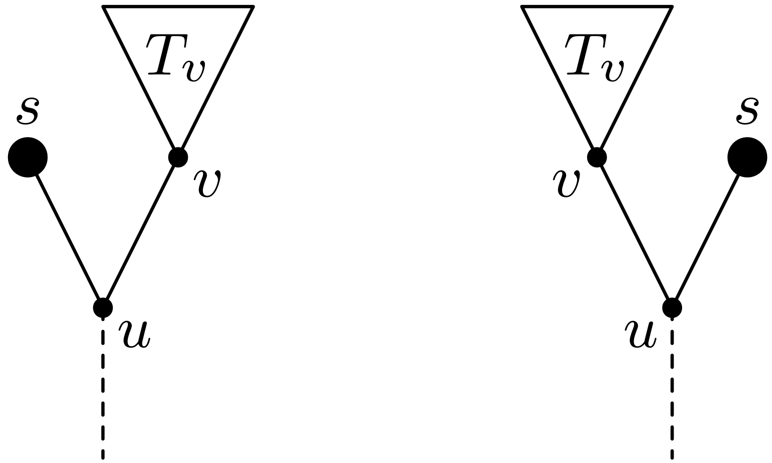


(L_2, T)

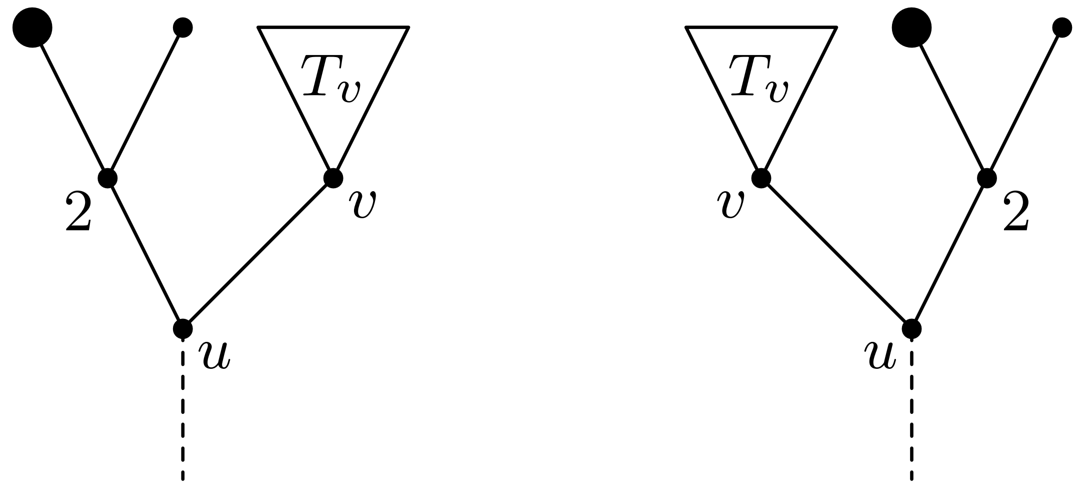


A jeśli wierzchołek s jest liściem?

Niech v będzie drugim (oprócz s) wierzchołkiem wyrastającym z u:

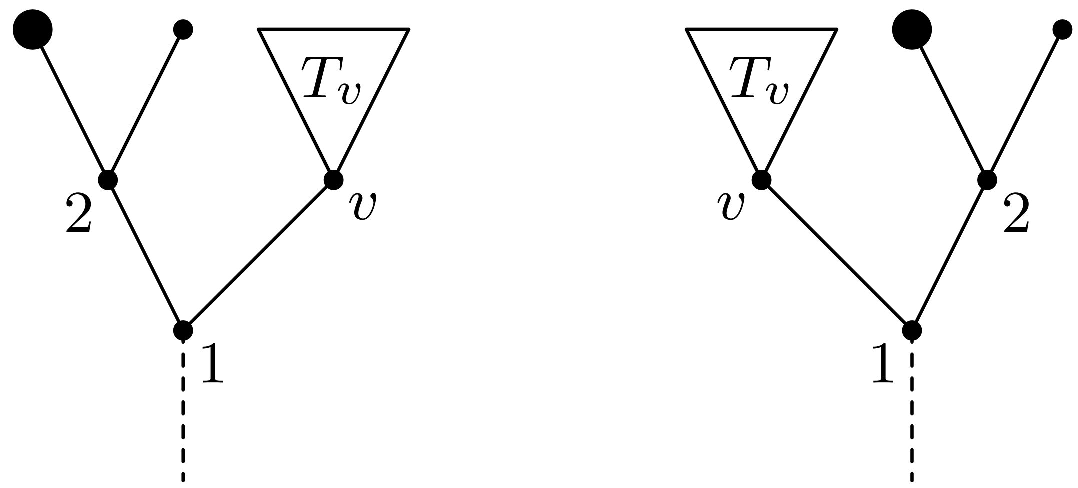


Spróbujmy zrobić to samo, co w przypadku, gdy wierzchołek s nie jest liściem:

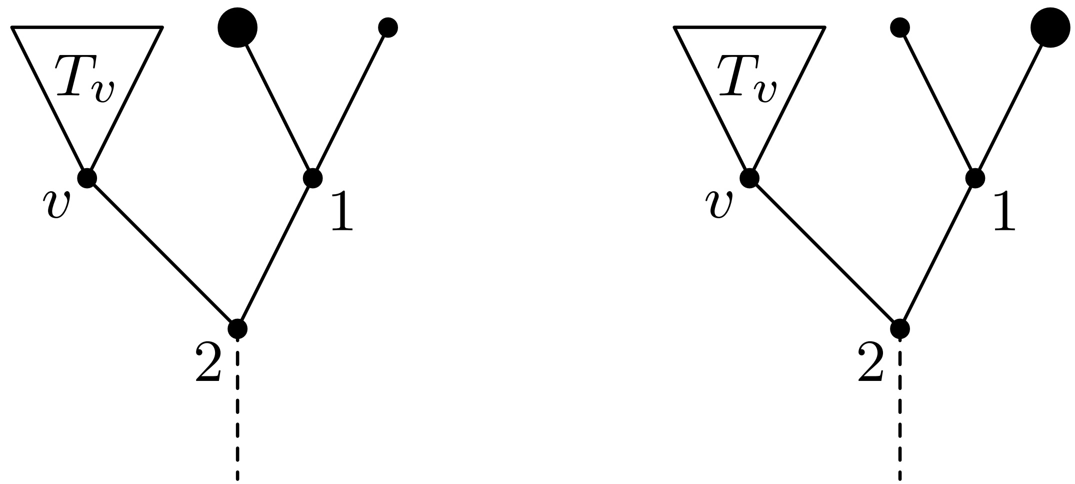


Jest źle: z wierzchołka wagi 2 wyrastają dwa liście!

Ten problem można łatwo naprawić, gdy wierzchołek u ma wagę 1. Mamy wtedy drzewa:



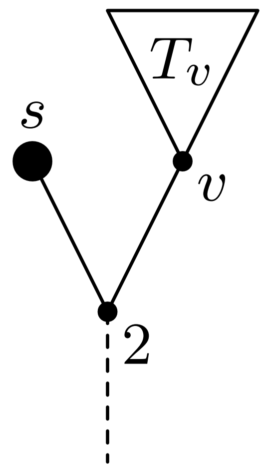
Zamiast nich bierzemy drzewa:



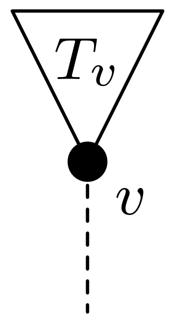
Został ostatni przypadek, gdy wierzchołek u ma wagę 2.

Wtedy wierzchołek v wyrastający z wierzchołka u na prawo nie jest liściem.

Mamy zatem sytuację:



Teraz usuwamy z drzewa wierzchołki u i s oraz zaznaczamy wierzchołek v.



Nie jest on liściem, więc otrzymujemy drzewo, w którym zaznaczony jest węzeł. Ponadto usunęliśmy z drzewa T jeden liść, więc ostatecznie otrzymujemy drzewo ze zbioru $WZ(n-1)$.

To jest szukana bijekcja.

To kończy dowód twierdzenia 3.

Plutarch *De Stoicorum repugnantiis* 1047C–E

ἀλλὰ μὴν αὐτὸς τὰς διὰ δέκα ἀξιωμάτων συμπλοκὰς πλήθει φησὶν ὑπερβάλλειν ἑκατὸν μυριάδας οὔτε δι' αὑτοῦ ζητήσας ἐπιμελῶς οὔτε διὰ τῶν ἐμπείρων τἀληθὲς ἱστορήσας. [...] Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμετικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχός ἐστιν ἀποδεικνύων τὸ διάπτωμα τοῦ λογισμοῦ παμμέγεθες αὐτῷ γεγονός, εἴγε τὸ μὲν καταφατικὸν ποιεῖ συμπεπλεγμένων ἀξιωμάτων μυριάδας δέκα καὶ πρὸς ταύταις τρισχίλια τεσσαράκοντα ἐννέα τὸ δ' ἀποφατικὸν ἐνακόσια πεντήκοντα δύο πρὸς τριάκοντα καὶ μιᾷ μυριάσι. (1047C–E)

But now he [Chrysippus] says himself that the number of conjunctions produced by means of ten assertibles exceeds a million, though he had neither investigated the matter carefully by himself nor sought out the truth with the help of experts. [. . .] Chrysippus is refuted by all the arithmeticians, among them Hipparchus himself who proves that his error in calculation is enormous if in fact affirmation gives 103049 conjoined assertibles and negation 310952.

De Stoicorum repugnantiis

Chrysippus says that the number of compound propositions that can be made from only ten simple propositions exceeds a million. (Hipparchus, to be sure, refuted this by showing that on the affirmative side there are 103049 compound statements, and on the negative side 310952.)

Quaestiones convivales

Chryzyp twierdzi, że liczba zdań złożonych, które mogą być utworzone z tylko dziesięciu zdań prostych, przekracza milion. (Hipparch, dla pewności, zaprzeczył temu, pokazując, że istnieje 103049 zdań twierdzących oraz 310952 zdania przeczące.)

Znaczenie obu fragmentów było niejasne aż do stycznia 1994 roku, kiedy David Hough, doktorant George Washington University, zauważył, że liczba 103049 jest dziesiątą liczbą Schrödera.

K O N I E C