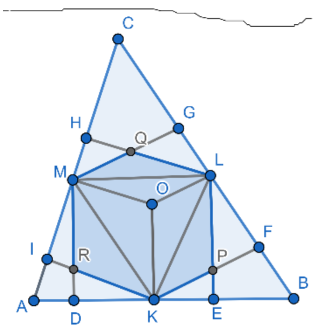
Szkice rozwiązań.

1. Jest $[ACB] = [ACD]$. Jak się tyle samo odejmie, to tyle samo zostanie.
2. Załóżmy, że prosta *DP* przecina bok *AB* w punkcie *E*. Wtedy $[ACD] = \frac{1}{2}[BCDE] = [BPC]$.
3. Z założenia wynika, że $[ABK] = [CAL]$. Zatem *AL* = *BK* i $\triangle AKB \equiv \triangle CAL$ (bkb). Jeśli $\sphericalangle ACL = \alpha$, to $\sphericalangle CAK = 60^\circ - \alpha$ i dlatego $\sphericalangle AMC = 120^\circ$.
4. Jest $[AFB] = [ACE]$, a ponieważ trójkąty *AFB* i *ACE* mają równe wysokości opuszczone odpowiednio z wierzchołków *A* i *C*, więc odpowiednie podstawy też są równe, czyli *BF* = *AE*.
5. **Sposób 1**. Jeśli prosta *KL* $(K \in AD, L \in BC)$ przechodzi przez punkt *P* i jest równoległa do *AB*, to $[APB] = \frac{1}{2}[ABLK], [CPD] = \frac{1}{2}[KLCD]$. Stąd wynika teza zadania.

Sposób 2. Jeśli do prostej *KL* dołączymy prostą *MN* $(M \in AB, N \in CD)$ przechodzącą przez *P* i równoległą do *AD*, to proste *KL* i *MN* dzielą równoległobok *ABCD* na cztery równoległoboki, z których każdy jest podzielony przekątną na dwa trójkąty o równych polach.

5a. Wniosek z zadania **5**.

6. Odcinki *PK*, *PL*, *PM* i *PN* dzielą odpowiednio trójkąty *ABP*, *BCP*, *CDP* i *DAP* na dwa trójkąty o równych polach.
7. Obierzmy punkty *M* i *N* tak, by *ADME* i *AGNB* były równoległobokami. Równoległoboki te są przystające, więc ich „połowy" mają równe pola.
8. Z zadania **7.** Wynika, że pole każdego z trójkątów *NAS*, *BRQ* i *MPC* jest równe jest równe $[ABC]$.
9. Załóżmy, że przekątne *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *O* oraz, że $[ABO] = S_1$, $[BCO] = S_2, [CDO] = S_3, [DAO] = S_4$. Równość w założeniu przyjmuje postać $(S_1 + S_4) \cdot (S_2 + S_3) = (S_1 + S_2) \cdot (S_3 + S_4)$, co jest równoważne równości $(S_1 - S_3) \cdot (S_2 - S_4) = 0$. Stąd $S_1 = S_3$ lub $S_2 = S_4$, a w konsekwencji $AD \parallel BC$ lub $AB \parallel CD$.
10. $[BQD] = [BQP] = [AQP] = [AQE]$. Wynika stąd, że punkt *Q* jest jednakowo odległy od ramion kąta *ACB*, gdyż wysokości w trójkątach *BQD* i *AQE* , opuszczone odpowiednio na proste *BD* i *AE* są równe. Zatem punkt *Q* leży na dwusiecznej kąta *ACB*.
11. $BP \parallel CD$, więc $[BPD] = [BPC]$. Także, $CP \parallel AB$, więc $[BPC] = [APC]$. Zatem $[BPD] = [APC]$, a ponieważ *AC* = *BD*, więc punkt *P* jest jednakowo oddalony od ramion kąta *AOD* i dlatego leży na dwusiecznej tego kąta.
12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy punkt *O* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *ABC*, czworokąty *KPLO*, *LQMO*, *MRKO* są równoległobokami i $[KPLQMR] = 2 \cdot [KLM] = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [ABC] = \frac{1}{2} \cdot [ABC]$.



13. Przyjmując oznaczenia z rysunku stwierdzamy, że $[RSQ] = [RSC] = [CSM] = [NSM]$. Analogicznie $[PSQ] = [MSK]$ i $[PSR] = [KSN]$.

14. *AFCP* jest trapezem, więc $[FMC] = [AMP]$. Podobnie *AECQ* jest trapezem, więc $[EMC] = [AMQ]$. Z tych równości wynika teza.

15. Wystarczy wykazać, że $[ABL] = [KBCD]$. Jest $[KBL] = [KBC]$ oraz $[AKL] = [KCL] = [KCD]$. Stąd $[KBL] + [AKL] = [KBC] + [KCD]$ czyli $[ABL] = [KBCD]$.

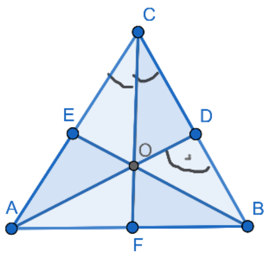
16. Proste *BP* i *CP* zawierają odpowiednio środkowe trójkątów *ABC* i *BCD*, więc punkty *A* i *C* są jednakowo oddalone od prostej *BP*, oraz punkty *B* i *D* są jednakowo oddalone od prostej *CP*. Wynika stąd, że $[PAB] = [PCB] = [PCD]$. Ale wysokości trójkątów *PAB* i *PCD* poprowadzone z wierzchołka *P* są równe, gdyż punkt *P* leży na dwusiecznej kąta *AKD*, więc równe są też odpowiednie podstawy, czyli *AB* = *CD*.

17. Załóżmy, że punkt *O* jest środkiem odcinka *MN*. Wtedy $[AON] = [AOM]$ i $[CON] = [COM]$. Zatem $[ANC] = [AMC]$. Także $[AMB] = [AMC]$ i $[ANC] = [DNC]$, więc $[ACD] = [ABC]$ i dlatego $[ABCD] = 2 \cdot [ABC]$.

18. Jest $AB \parallel CD$ i $BC \parallel DE$, więc czworokąty *ACDB* i *BCED* są trapezami lub równoległobokami i dlatego $[ACD] = [BCD] = [BCE]$.

19. Wystarczy wykazać, że $[AKC] = [MKD]$. Jest $AC \parallel KD$, więc $[AKC] = [ADC]$. Także $AD \parallel BC$, więc $[ADC] = [ADB]$. Zatem $[AKC] = [ADB] = \frac{1}{2} \cdot [MBDK] = [MKD]$.

20. Punkt *M* jest jednakowo oddalony od prostych *AC* i *AB*, więc wystarczy wykazać, że $[MCD] = [MBE]$. Czworokąt *MCNB* jest równoległobokiem, czworokąty *MCDN* i *MBEN* są trapezami, więc $[MCD] = [MCN] = [MBN] = [MBE]$.

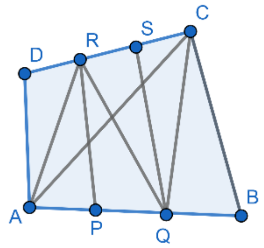


21. Załóżmy, że wysokość *AD*, środkowa *BE* oraz dwusieczna *CF* przecinają się w punkcie *O*. Odcinek *OE* jest środkową w trójkącie *AOC*, więc $[AOE] = [COE]$. Zatem $[COE] = [COD]$ i *CE* = *CD*, trójkąty *COE* i *COD* są przystające i $\sphericalangle CEO = 90^\circ$. Wynika stąd, że odcinek *BE* jest środkową i wysokością w trójkącie *ABC*, więc *AB* = *BC*. Wtedy w trójkącie *ADC* jest $CD = \frac{1}{2}AC$ i $\sphericalangle CAD = 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = 60^\circ$, więc także $\sphericalangle CAB = 60^\circ$.

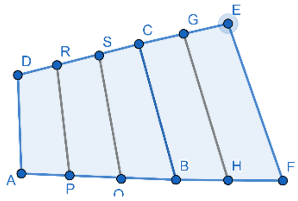
22. $[CAQ] = \frac{1}{2}[CAB]$ i $[ACS] = \frac{1}{2}[ACD]$, więc $[AOCS] = \frac{1}{2}[ABCD]$. Analogicznie $[PBRD] = \frac{1}{2}[ABCD]$. Wynika stąd, że $[ADP] + [CBR] = \frac{1}{2}[ABCD]$ a wtedy też $[ACQS] = [ADP] + [CBR]$. Odejmując od obu stron ostatniej równości $[AKNS] + [MLQC]$ otrzymujemy tezę.

23. Wykażemy najpierw następujący **lemat**: Jeżeli każdy z dwóch przeciwległych boków czworokąta wypukłego o polu *S* podzielimy na trzy równe części, to proste, poprowadzone przez odpowiednie punkty podziału, dzielą ten czworokąt na trzy części tak, że pole środkowej części jest równe $\frac{1}{3}S$

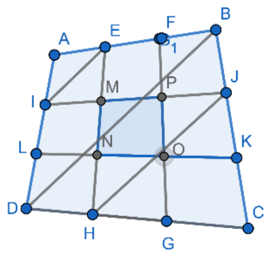
Dowód lematu. .



Załóżmy, że $[APRD] = S_1, [PQSR] = S_2, [QBCS] = S_3$. Ponieważ $[BCQ] = \frac{1}{3}[ABC]$ i $[ADR] = \frac{1}{3}[ACD]$, więc $[AQCR] = \frac{2}{3}S$. Zatem $S_2 = \frac{1}{2}[AQCR] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)$. Warto zwrócić uwagę na następujące, równoważne równości: $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$ i $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$ (kolejne pola różnią się o tyle samo – to informacja dla uczniów szkoły podstawowej, tworzą ciąg arytmetyczny – to informacja dla licealistów).



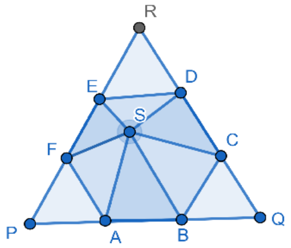
Dowód tezy zadania: Oznaczmy pola kolejnych „małych" czworokątów (licząc od lewej strony) przez S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Z lematu wynika, że istnieje liczba $a \in R$ taka, że $S_1 = S_3 - 2a, S_2 = S_3 - a, S_4 = S_3 + a, S_5 = S_3 + 2a$. Wynika stąd, że $S = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) = 5 \cdot S_3$.



24. Wykażemy najpierw, że $IM = \frac{1}{3}IJ$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $IE \parallel BD$ oraz $HJ \parallel BD$, przy czym $IE = \frac{1}{3}BD$ i $HJ = \frac{2}{3}BD$. Wynika stąd, że trójkąty IME oraz HMJ są podobne i $IE = \frac{1}{2}HJ$, więc także $IM = \frac{1}{2}MJ$, co dowodzi, że $IM = \frac{1}{3}IJ$. Podobnie stwierdzamy, że każdy z odcinków IJ, KL, EH i FG jest podzielony na trzy równe części. Stąd i z rozwiązania zadania **23.** wynika, że $[MNOP] = \frac{1}{3}[EFGH] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}[ABCD] = \frac{1}{9}S$.

25. Z symetrii względem prostej BD wynika, że $[APQ] = [CPQ]$. Stąd $[ACQ] = 2[APQ]$, ale $[MQC] = \frac{1}{2}[ACQ]$, gdyż $MQ = \frac{1}{2}AQ$. Zatem $[MQC] = [APQ]$ i dlatego $[MQPC] = 2[APQ]$.

26. Załóżmy, że punkty E i F są odpowiednio środkami odcinków EI i FI. Wtedy $AM \perp EI$, $AN \perp FI$ i punkty P oraz Q, symetryczne do punktu A odpowiednio względem prostych BE i CF, leżą na prostej BC (dwusieczna kąta zawiera się w osi symetrii tego kąta). Zatem $MN \parallel PQ \parallel BC$. Jest też $MN \parallel EF$, więc $EF \parallel BC$. Czworokąt $BCEF$ jest trapezem, więc $[BIF] = [CIE]$.

27. 

Opiszmy na sześciokącie $ABCDEF$ trójkąt równoboczny PQR, jak na rysunku. Wtedy $[ABS] = \frac{1}{3}[PQS]$, $[CDS] = \frac{1}{3}[QRS]$, $[EFS] = \frac{1}{3}[RPS]$ i $[ABS] + [CDS] + [EFS] = \frac{1}{3}[PQR] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}[ABCDEF] = \frac{1}{2}[ABCDEF]$.

28. Ponieważ $AN = BM = \frac{1}{2}(AB + CD)$, więc $[ACN] = [BDM] = \frac{1}{2}[ABCD]$. Zatem pole wspólnej części trójkątów ACN i BDM, czyli pięciokąta $KMNLO$, jest równe polu figury niepokrytej tymi trójkątami.

29. Wskazówka:Wykaż, że $[ACN] + [BDM] = [ABCD]$. Dalej jak w rozwiązaniu zadania **28**.

30. $[ABN] = [ADM] = \frac{1}{2}[ABCD]$, więc pole wspólnej części trójkątów ABN i ADM (pole czworokąta $APQR$) jest równe polu figury niepokrytej tymi trójkątami, czyli $[BMP] + [MCNQ]+[NDR]$.

31. $MH_1 \parallel DN$ i $NH_1 \parallel DM$, więc czworokąt $MDNH_1$ jest równoległobokiem. Podobnie $MH_2 \parallel CN$ i $NH_2 \parallel CM$, więc także czworokąt $MCNH_2$ jest równoległobokiem.
Załóżmy, że punkt P jest środkiem odcinka MN.
Wtedy punkty C i H_2 oraz punkty D i H_1 są symetryczne do siebie względem punktu P. Zatem obrazem odcinka CD w symetrii względem punktu P jest odcinek H_2H_1, z czego wynika, że $H_1H_2 \parallel CD$, więc $H_1H_2 \perp AB$ i $H_1H_2 = CD$. Dlatego $[AH_1BH_2] = \frac{1}{2}AB \cdot H_1H_2 = \frac{1}{2}AB \cdot CD = [ABC]$.

32. Wystarczy wykazać, że $[BDE] = [ABCE]$. Ale $[BDE] = \frac{1}{2}BE \cdot DH$.
$[ABCE] = \frac{1}{2}AH \cdot BE + \frac{1}{2}BC \cdot BE = \frac{1}{2}(AH + BC) \cdot BE = \frac{1}{2}DH \cdot BE = [BDE]$, gdyż $AH + BC = HD$.

33. Przez punkt X prowadzimy prostą MN równoległą do AD ($M \in AB, N \in CD$), zaś przez punkt Y prowadzimy prostą KL równoległą do AB ($K \in AD, L \in BC$). Wtedy $[XRS] = \frac{1}{2}[MRSN]$ i $[YPQ] = \frac{1}{2}[PQLK]$. Wystarczy wykazać, że $[MRSN] = [PQLK]$, co jest równoważne równości $[PXWK] + [ZQLY] = [MRZX] + [WYSN]$. Ostatnia równość jest prawdziwa, gdyż $[PXWK] = [MRZX]$ i $[ZQLY] = [WYSN]$.

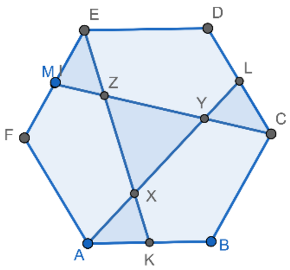
34. Przyjmijmy oznaczenia $PB = x$, $QC = y$, $AB = a$. Obierzmy na boku BC punkt N tak, by czworokąt $ABNM$ był równoległobokiem. Załóżmy też, że h_1 i h_2 oznaczają odpowiednio długości wysokości w równoległobokach $ABNM$ i $MNCD$ poprowadzone odpowiednio do boków AB i MN. Mamy wykazać, że $x \cdot h_1 = y \cdot h_2$, czyli, że $\frac{y}{x} = \frac{h_1}{h_2}$. Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{x} = \frac{y}{DQ}$. Stąd otrzymujemy równości $x \cdot y = AP \cdot DQ = (a - x) \cdot (a - y) = a^2 - (x + y) \cdot a + x \cdot y$, z których wynika, że $x + y = a$, co oznacza, że $AP = y$, $DQ = x$ i $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AP}{x} = \frac{y}{x}$.

35. Załóżmy, że punkt L jest symetryczny do punktu B względem punktu O.
Jest $MN \parallel EF$, więc $[ABD] = [ACD]$ i $[AOB] = [COD]$. Wystarczy wykazać, że $[AOK] = \frac{1}{2}[ACD]$. Załóżmy, że punkt P jest środkiem boku AD. Wtedy odcinek CP

jest środkową w trójkącie ACD i $\frac{1}{2}[ACD] = [CPD] = [CPK] + [CKD]$, ale $[CPK] = [COK]$ (gdyż $CK \parallel OP$ -dlaczego? To zostawiam dla czytelnika) i $\frac{1}{2}[ACD] = [CPK] + [CKD] = [COK] + [CKD] = [OCKD]$. Zatem także $[AOK] = \frac{1}{2}[ACD]$.

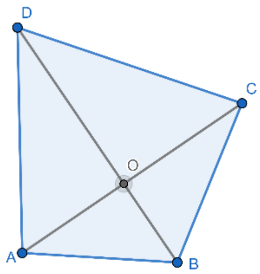
36. <u>Wskazówka</u>: Wykaż najpierw, że $\sphericalangle AMB = 90^\circ$.
Załóżmy, że punkty K i H są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i M na bok AC oraz, że prosta BM przecina bok AC w punkcie L. Ponieważ $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC$ i $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, więc $BM = ML$, a wtedy $MH = \frac{1}{2}BK$ i $[AMC] = \frac{1}{2}[ABC]$.

37.



Wprowadźmy dla krótkości oznaczenia: $S = [XYZ]$, $P = [AKX] = [CLY] = [EMZ]$, $T = [KBCYX] = [LDEZY] = [MFAXZ]$. Można pokazać, że $[KBCDE] = 2 \cdot [AKEF]$ (co zostawiam jako ćwiczenie dla czytelnika). Wtedy

$2 \cdot (2P + T) = S + 2T + P$, co po przekształceniu daje równość $S = 3P$.



38. Wiadomo, że $[AOB] \cdot [COD] = [BOC] \cdot [DOA]$. Teza wynika z następującego **twierdzenia**:
Jeżeli liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $ab = cd$, to liczba $a + b + c + d$ jest złożona.
Dowód twierdzenia. Jest $a + b + c + d \geq 4$, więc wystarczy wykazać, że $a + b + c + d$ nie jest liczbą pierwszą. Załóżmy, że $a + b + c + d$ jest liczbą pierwszą. Wtedy $a \cdot (a + b + c + d) = a^2 + ab + ac + ad = a^2 + cd + ac + ad = (a + c) \cdot (a + d)$ i liczba $a + b + c + d$, jako liczba pierwsza, dzieliłaby jedną z liczb $a + c, a + d$ co jest niemożliwe, bo liczby te są mniejsze od $a + b + c + d$.

+