Konferencja SEM, Żerków 2021

Równe pola

Zbigniew Karczmarczyk (zbylut1@gazeta.pl)

1. Punkt M jest dowolnym punktem wewnętrznym przekątnej AC w równoległoboku $ABCD$. Na bokach AB, BC, CD, DA obrano odpowiednio punkty P, Q, R, S tak, że odcinki PR i SQ przechodzą przez punkt M oraz $PR \parallel AD$ i $SQ \parallel AB$. Wykaż, że $[PBQM] = [SMRD]$.

2. W trapezie $ABCD$, z krótszą podstawą CD, przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do BC i przecinającą przekątną AC w punkcie P. Wykaż, że $[ACD] = [BPC]$.

3. Na bokach AB i BC trójkąta równobocznego ABC obrano odpowiednio punkty L i K tak, że $[AMC] = [LBKM]$, gdzie M jest punktem przecięcia się odcinków AK i CL. Wyznacz kąt $\sphericalangle AMC$.

4. Na ramionach AB i BC trójkąta równoramiennego ABC obrano odpowiednio punkty E i F. Odcinki AF i CE przecinają się w punkcie M. Wykaż, że jeśli $[BEMF] = [ACM]$, to $AE = BF$.

5. Wykaż, że jeśli punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym równoległoboku $ABCD$, to $[APB] + [CPD] = \frac{1}{2} \cdot [ABCD]$.

5a. Podstawą ostrosłupa $SABCD$ jest równoległobok $ABCD$. Wykaż, że dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz tego ostrosłupa suma objętości czworościanów $PSAB$ i $PSCD$ jest równa sumie objętości czworościanów $PSBC$ i $PSDA$.

6. Punkt P jest dowolnym punktem wewnętrznym czworokąta wypukłego $ABCD$. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA. Wykaż, że $[AKPN] + [MPLC] = \frac{1}{2}[ABCD]$.

7. Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$ mają wspólny tylko punkt A i są tak samo zorientowane. Wykaż, że $[ABG] = [ADE]$.

8. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz tego trójkąta, kwadraty $ABRS$, $BCPQ$ i $ACMN$. Wykaż, że $[NAS] = [BRQ] = [MPC]$.

9. Wiadomo, że w czworokącie wypukłym $ABCD$ prawdziwa jest równość $[ABD] \cdot [BCD] = [ABC] \cdot [ADC]$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem lub równoległobokiem.

10. W trójkącie ABC na bokach AC i BC obrano odpowiednio punkty E i D tak, że $AE = BD$. Punkt M jest środkiem boku AB. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że punkt Q, symetryczny do punktu P względem punktu M, leży na dwusiecznej kąta ACB.

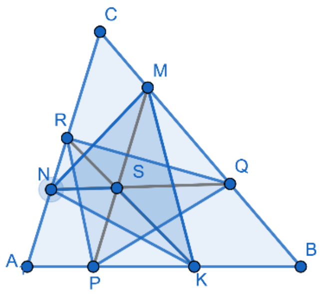
11. Przekątne wypukłego czworokąta $ABCD$ mają tę samą długość i przecinają się w punkcie O. Punkt P, leżący wewnątrz kąta AOD, jest taki, że $AB \parallel CP$ i $CD \parallel BP$. Wykaż, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AOD.

12. Ze środka każdego boku trójkąta ostrokątnego poprowadzono proste prostopadłe do dwóch pozostałych boków. Wykaż, że pole sześciokąta ograniczonego tymi prostymi jest równe połowie pola tego trójkąta.

Równe pola

Zbigniew Karczmarczyk (zbylut1@gazeta.pl)

13. Przez punkt S, leżący wewnątrz trójkąta ABC, poprowadzono odcinki równoległe do boków tego trójkąta (jak na rysunku). Wykaż, że $[KMN] = [PQR]$.



14. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD równoległoboku $ABCD$. Prosta EF przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że $[APQ] = [CEF]$.

15. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AD czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że $[AKML] = [BCDM]$.

16. W czworokącie wypukłym $ABCD$ półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie K. Okazało się, że na dwusiecznej kąta AKD istnieje punkt P taki, że proste BP i CP dzielą na połowy odpowiednio odcinki AC i BD. Wykaż, że $AB = CD$.

17. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Przekątna AC przechodzi przez środek odcinka MN. Wykaż, że $[ABCD] = 2 \cdot [ABC]$.

18. Punkt C leży na odcinku AE. Po jednej stronie prostej AE zbudowano, nie mające wspólnych punktów wewnętrznych, trójkąty ABC i CDE tak, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE$. Wykaż, że $[ACD] = [BCE]$.

19. Trapez $ABCD$ ($AD \parallel BC$) i równoległobok $MBDK$ są położone tak, że $A \in KM$ i boki równoległoboku są równoległe do przekątnych trapezu. Przekątna AC przecina odcinek MD w punkcie P, a odcinek KC przecina odcinek MD w punkcie Q. Wykaż, że $[PQC] = [AMP] + [KDQ]$.

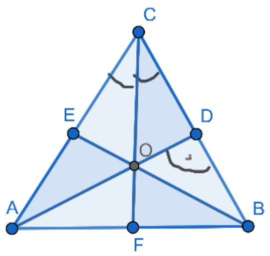
20. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną $AP^{\rightarrow}$ ($P \in BC$). Punkt M jest punktem wewnętrznym odcinka AP. Punkt N jest symetryczny do punktu M względem środka boku BC. Prosta BN przecina prostą AC w punkcie D, a prosta CN przecina prostą AB w punkcie E. Wykaż, że $BE = CD$.

21. Dwusieczna, środkowa i wysokość pewnego trójkąta ostrokątnego poprowadzone z trzech różnych wierzchołków przecinają się w jednym punkcie i dzielą ten trójkąt na sześć

Równe pola

Zbigniew Karczmarczyk (zbylut1@gazeta.pl)

trójkątów. Pola trójkątów *AOE*, *BOF*, *COD* (jak na rysunku) są równe. Wykaż, że dany

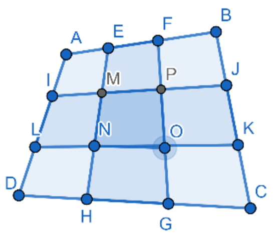


trójkąt jest równoboczny.

22. W czworokącie wypukłym *ABCD* punkty *P*, *Q*, *R*, *S* są odpowiednio środkami boków *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Punkty *K*, *L*, *M*, *N* są odpowiednio punktami przecięcia się odcinków *AQ* i *DP*, *AQ* i *BR*, *CS* i *BR*, *CS* i *DP*. Wykaż, że $[KLMN] = [AKP] + [BLQ] + [CMR] + [DNS]$.

23. Każdy z dwóch przeciwległych boków czworokąta wypukłego o polu *S* podzielono na 5 równych części. Proste, wyznaczone przez odpowiednie punkty podziału, dzielą ten czworokąt na 5 czworokątów. Wykaż, że pole środkowego czworokąta jest równe $\frac{1}{5}S$.

24. W wypukłym czworokącie o polu *S* podzielono każdy bok na trzy równe części i punkty podziału połączono jak na rysunku. Wykaż, że pole środkowego z otrzymanych



„małych" czworokątów jest równe $\frac{1}{9}S$.

25. W kwadracie *ABCD* punkt *M* jest środkiem boku *CD*. Proste *AC* i *AM* przecinają przekątną *BD* odpowiednio w punktach *P* i *Q*. Wykaż, że $[MQPC] = 2 \cdot [APQ]$.

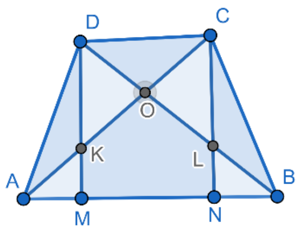
26. W trójkącie *ABC* punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Na półprostych $BI^{\rightarrow}$ i $CI^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio punkty *E* i *F* (różne od *I*) takie, że *AI* = *AE* = *AF*. Wykaż, że $EF \parallel BC$ i $[BIF] = [CIE]$.

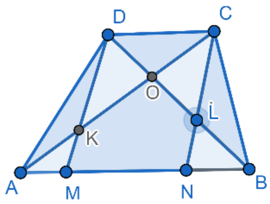
27. Punkt *S* leży wewnątrz sześciokąta foremnego *ABCDEF*. Wykaż, że $[ABS] + [CDS] + [EFS] = \frac{1}{2}[ABCDEF]$.

28. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątne oraz wysokości z wierzchołków krótszej górnej podstawy (jak na rysunku). Wykaż, że $[KMNLO] = [AKD] + [DOC] + [CLB]$.

Równe pola

Zbigniew Karczmarczyk (zbylut1@gazeta.pl)





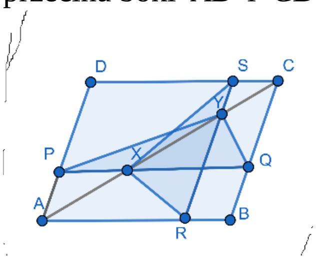
29. Przez wierzchołki C i D krótszej podstawy trapezu $ABCD$ poprowadzono proste równoległe przecinające podstawę AB odpowiednio w punktach M i N. Te proste oraz przekątne trapezu dzielą ten trapez na siedem trójkątów i pięciokąt (jak na rysunku). Wykaż, że $[KMNLO] = [AKD] + [DOC] + [CLB]$.

30. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$. Odcinki AM i BN przecinają się w punkcie P, odcinki BN i MD przecinają się w punkcie Q, zaś odcinki MD i AN przecinają się w punkcie R. Wykaż, że $[APQR] = [BMP] + [MCNQ] + [NDR]$.

31. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością, punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i BC. Załóżmy, że punkty H_1 i H_2 są odpowiednio ortocentrami trójkątów MNC i MND. Wykaż, że $[AH_1BH_2] = [ABC]$.

32. W trapezie równoramiennym $ABCD$ z punktu B opuszczono wysokość na dłuższą podstawę AD i na jej przedłużeniu obrano punkt E. Odcinki EC i BD przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $[PED] = [ABE] + [BPC]$.

33. Na przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ wybrano dowolnie różne punkty X i Y (patrz rysunek). Prosta, równoległa do AB i przechodząca przez X, przecina boki AD i BC odpowiednio w punktach P i Q. Prosta, równoległa do BC i przechodząca przez Y, przecina boki AB i CD odpowiednio w punktach R i S. Wykaż, że $[XRS] = [YPQ]$.



34. W równoległoboku $ABCD$ na boku AD obrano punkt M i przez ten punkt poprowadzono proste równoległe do przekątnych równoległoboku i przecinające boki AB i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że $[MPB] = [MQC]$.

35. W trapezie $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ przekątne przecinają się w punkcie O. Prosta, przechodząca przez punkt C i punkt symetryczny do punktu B względem punktu O, przecina podstawę AD w punkcie K. Wykaż, że $[AOK] = [AOB] + [DOK]$.

Równe pola

Zbigniew Karczmarczyk (zbylut1@gazeta.pl)

36. Okrąg o środku I jest wpisany w nierównoramienny trójkąt ABC i jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta AI przecina odcinek DE w punkcie M. Wykaż, że $[AMC] = \frac{1}{2}[ABC]$.

37. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków AB, CD, EF. Odcinki AL i EK przecinają się w punkcie X, odcinki AL i CM przecinają się w punkcie Y zaś odcinki CM i EK przecinają się w punkcie Z. Wykaż, że $[XYZ] = [AKX] + [CLY] + [EMZ]$.

38. Wypukły czworokąt podzielono przekątnymi na cztery trójkąty, których pola są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że pole tego czworokąta jest liczbą złożoną.