Matematyka. Poszukuję – odkrywam.

Krzysztof Chełmiński

Zadania olimpijskie z geometrii

Sielpia, 6.11.2022

Zadanie 1

W trójkącie ostrokątnym ABC wybrano na boku BC punkt D różny od B i C. W półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą BC i zawierającej punkt A wybrano punkty E i F takie, że DE jest prostopadła do BE i jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ACD oraz DF jest prostopadła do CF i jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABD. Wykaż, że punkty A, D, E i F leżą na jednym okręgu.

Szkic rozwiązania 1 Oznaczmy przez T punkt przecięcia prostych BE i CF. Oczywiście punkty D, E, F i T leżą na jednym okręgu (dwa przeciwległe kąty są proste). Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy

$$\angle ADE = \angle ACD \quad \text{oraz} \quad \angle FDA = \angle DBA\,.$$

Zatem mamy także $\angle FDE + \angle BAC = 180^\circ$. Ponadto z pierwszego spostrzeżenia mamy $\angle BTC + \angle EDF = 180^\circ$ co prowadzi do wniosku, że $\angle BAC = \angle BTC$ i punkty B, C, T i A leżą na jednym okręgu. Zatem także

$$\angle ATE = \angle ATB = \angle ACB = \angle ACD = \angle ADE$$

co implikuje, że punkty A, E, D i T leżą na jednym okręgu. Stąd puszukiwanym okręgiem jest okrąg opisany na trójkącie DET.

Zadanie 1

W trójkącie ostrokątnym ABC wybrano na boku BC punkt D różny od B i C. W półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą BC i zawierającej punkt A wybrano punkty E i F takie, że DE jest prostopadła do BE i jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ACD oraz DF jest prostopadła do CF i jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABD. Wykaż, że punkty A, D, E i F leżą na jednym okręgu.

Szkic rozwiązania 2: Niech G będzie punktem z prostej FD takim, że na czworokącie $ADCG$ można opisać okrąg. Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy $\angle GAC = \angle GDC = \angle DAB$ oraz $\angle GCA = \angle GDA = \angle FDA = \angle DBA$. Zatem trójkąty ABD i ACG są podobne. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ to podobieństwo. Wykażemy, że $\mathcal{P}(E) = F$.

$$\angle CGD = \angle CAD = \angle BDE$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą oraz równość kątów wierzchołkowych. Z ostatniej równości wynika postulowana wcześniej własność, ze $\mathcal{P}$ przeprowadza E na F. Zatem mamy, że $\angle BAC = \angle EAF$. Ostatecznie mamy

$$\angle FDE + \angle EAF = \angle ADF + \angle EDA + \angle BAC = \angle BAD + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ .$$

Zadanie 2

Dany jest równoległobok $ABCD$ taki, że $AC = BC$. Na przedłużeniu boku AB poza punkt B wybrano punkt P. Okrąg opisany na trójkącie ACD przecina odcinek PD w punkcie Q różnym od D oraz okrąg opisany na trójkącie APQ przecina odcinek PC w punkcie R różnym od P. Wykaż, że proste CD, AQ i BR przecinają się w jednym punkcie.

Spostrzeżenia początkowe: Z założenia o danym równoległoboku mamy

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle ACD = \angle ADC\,.$$

Wprost z definicji punktów Q i R mamy, że na czworokątach $APRQ$ i $AQCD$ można opisać okręgi. Zatem mamy

$$\angle CRA = 180^\circ - \angle ARP = 180^\circ - \angle AQP = \angle DQA = \angle DCA = \angle CBA\,.$$

Oznacza to, że punkty A, B, C i R leżą na jednym okręgu.
Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AQ i DC. Teraz teza sprowadza się do wykazania, że punkty B, R i X są współliniowe.

Szkic rozwiązania 1: Zauważamy, że $\angle RQX = 180^\circ - \angle AQR = \angle RPA = \angle RCX$ i dlatego punkty C, Q, R i X leżą na jednym okręgu. Ostatecznie mamy

$$\angle XRC = \angle XQC = 180^\circ - \angle CQA = \angle ADC = \angle BAC = 180^\circ - \angle CRB\,.$$

Zadanie 2

Dany jest równoległobok $ABCD$ taki, że $AC = BC$. Na przedłużeniu boku AB poza punkt B wybrano punkt P. Okrąg opisany na trójkącie ACD przecina odcinek PD w punkcie Q różnym od D oraz okrąg opisany na trójkącie APQ przecina odcinek PC w punkcie R różnym od P. Wykaż, że proste CD, AQ i BR przecinają się w jednym punkcie.

Szkic rozwiązania 2:

Niech Y będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ARP różnym od R. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą wnioskujemy, że prosta CD jest styczna do okręgu $o(ABRC)$. Ponadto mamy $\angle RYA = \angle RPA = \angle RCX = \angle RBC$ co oznacza, że proste AY i BC są równoległe. Stąd Y jest punktem prostej AD. Zatem $\angle RYD = \angle RCX$ i punkty C, D, Y i R leżą na jednym okręgu.

Oznaczmy przez $\alpha = o(APQR)$, $\beta = o(CDYR)$ oraz $\gamma = o(AQCD)$. Wtedy prosta CD jest osią potęgową β i γ, prosta AQ jest osią potęgową okręgów α i γ oraz prosta BR jest osią potęgową okręgów α i β. Z twierdzenia o trzech osiach potęgowych proste te przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 3

Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku I. Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie ACI. Przedłużenia boków BA i BC poza A i C przecinają ω w punktach X i Z. Przedłużenia boków AD i CD poza D przecinają ω w punktach Y i T. Wykaż, że obwody czworokątów $ADTX$ i $CDYZ$ są sobie równe. (Uwaga: podane czworokąty mogą być krzyżowe!)

Szkic rozwiązania: Zaczniemy od wykazania pewnego pomocniczego lematu

Lemat *Punkty A, B i C leżą w tej kolejności na okręgu ω. Dwusieczna kąta zewnętrznego kąta $\angle ABC$ przecina ω w punkcie X. Wtedy $XC = XA$.*

Szkic dowodu lematu: Wystarczy wykazać równość kątów $\angle XCA = \angle XAC$. Oznaczmy $\angle XBC = \alpha$ oraz $\angle XCB = \beta$. Czworokąt $ABXC$ jest wpisany w okrąg i dlatego $\angle BAC + \angle BXC = 180°$. Stąd natychmiast mamy $\angle XAC = \alpha$. Niech X' będzie dowolnym punktem na prostej XB za punktem B. Wtedy widzimy, że z założenia zadania mamy $\angle ABX' = \alpha$. Zatem ponownie z sumy kątów $\angle XCA + \angle XBA = 180°$ wnioskujemy, że $\angle XCA = \alpha$ co kończy ten dowód.

Zadanie 3

Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku I. Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie ACI. Przedłużenia boków BA i BC poza A i C przecinają ω w punktach X i Z. Przedłużenia boków AD i CD poza D przecinają ω w punktach Y i T. Wykaż, że obwody czworokątów $ADTX$ i $CDYZ$ są sobie równe. (Uwaga: podane czworokąty mogą być krzyżowe!)

Szkic rozwiązania 1: Wprost z lematu $IZ = IT$ oraz $IX = IY$ co daje $XT = YZ$. Z otrzymanych równości mamy też $TR = ZQ$ i $XP = YS$ (odcinki styczne z punktów jednakowo odległych od środka okręgu). Ostatecznie wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} P_{ADTX} &= XT + XA + AS + SD + DT = XT + XP + RT = \\ &= YZ + YS + QZ = YZ + YD + DR + RC + CZ = P_{CDYZ}\,. \end{aligned}$$

Zadanie 3

Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu o środku I. Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie ACI. Przedłużenia boków BA i BC poza A i C przecinają ω w punktach X i Z. Przedłużenia boków AD i CD poza D przecinają ω w punktach Y i T. Wykaż, że obwody czworokątów $ADTX$ i $CDYZ$ są sobie równe. (Uwaga: podane czworokąty mogą być krzyżowe!)

Szkic rozwiązania 2:

Z lematu mamy równość $XT = YZ$ i aby zakończyć dowód potrzebujemy równości

$$XA + AD + DT = YD + DC + CZ\,.$$

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg i dlatego mamy $AB - AD = BC - CD$. Dodając tą równość do poprzedniej otrzymujemy równoważną równość, która zakończy rozwiązanie

$$XB + DT = XA + AB + DT = YD + BC + CZ = YD + BZ\,.$$

Oznaczmy przez $\lambda = \frac{XZ}{AC} = \frac{TY}{AC}$. Wtedy z potęgi punktu B względem ω mamy $BA \cdot BX = BC \cdot BZ$ i dlatego

$$\frac{XB}{BC} = \frac{BZ}{AB} = \frac{XZ}{AC} = \lambda\,.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\frac{DT}{AD} = \frac{DY}{CD} = \frac{TY}{AC} = \lambda\,.$$

Zatem nasza teza sprowadza się równoważnie do

$$\lambda BC + \lambda AD = \lambda CD + \lambda AB$$

co wynika z wpisywalności rozważanego czworokąta w okrąg.