Odkrywamy wzór $(x+2)^n$

Konferencja SEM „Matematyka. Poszukuję–odkrywam”

Mateusz Dębowski

Sielpia, 4–6.11.2022 r.

Spójrzmy na $n = 0, 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
(x+2)^0 &= 1 \\
(x+2)^1 &= x + 2 \\
(x+2)^2 &= x^2 + 4x + 4 \\
(x+2)^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8
\end{aligned}
$$

Spójrzmy na $n = 0, 1, 2, 3$

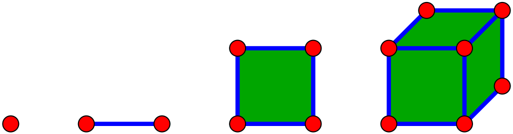
$$
\begin{aligned}
(x+2)^0 &= 1x^0 \\
(x+2)^1 &= 1x^1 + 2x^0 \\
(x+2)^2 &= 1x^2 + 4x^1 + 4x^0 \\
(x+2)^3 &= 1x^3 + 6x^2 + 12x^1 + 8x^0
\end{aligned}
$$

Spójrzmy na $n = 0, 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
(x+2)^0 &= 1x^0 \\
(x+2)^1 &= 1x^1 + 2x^0 \\
(x+2)^2 &= 1x^2 + 4x^1 + 4x^0 \\
(x+2)^3 &= 1x^3 + 6x^2 + 12x^1 + 8x^0
\end{aligned}
$$

Spójrzmy na $n = 0, 1, 2, 3$

$$(x+2)^0 = 1x^0$$
$$(x+2)^1 = 1x^1 + 2x^0$$
$$(x+2)^2 = 1x^2 + 4x^1 + 4x^0$$
$$(x+2)^3 = 1x^3 + 6x^2 + 12x^1 + 8x^0$$



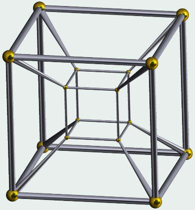
Hipoteza

Liczba ścian d-wymiarowych w kostce n-wymiarowej jest równa współczynnikowi przy x^d w rozwinięciu $(x+2)^n$.

Hipoteza

Liczba ścian d-wymiarowych w kostce n-wymiarowej jest równa współczynnikowi przy x^d w rozwinięciu $(x+2)^n$.

Sprawdzenie hipotezy dla $n = 4$

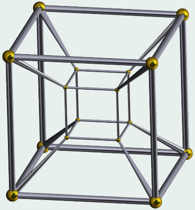


$$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Hipoteza

Liczba ścian d-wymiarowych w kostce n-wymiarowej jest równa współczynnikowi przy x^d w rozwinięciu $(x+2)^n$.

Sprawdzenie hipotezy dla $n = 4$



$$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Jeśli dla $n = 5$ hipoteza będzie prawdziwa, to zgodnie z wczorajszym twierdzeniem dla większych n też będzie prawdziwa.

Uściślijmy hipotezę

Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$(x+2)^n = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} x^d \cdot 2^{n-d}.$$

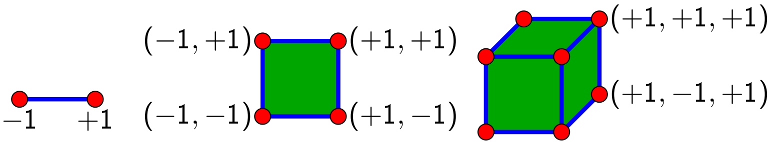
Uściślijmy hipotezę

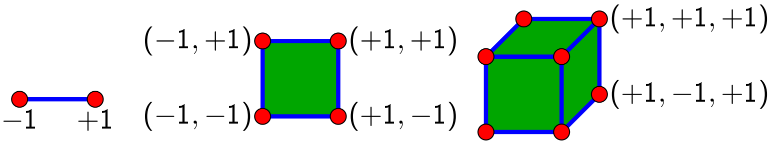
Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$(x+2)^n = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d} x^d \cdot 2^{n-d}.$$

Twierdzenie

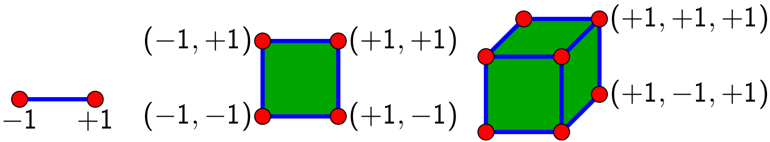
Liczba ścian d-wymiarowych w kostce n-wymiarowej wynosi $2^{n-d}\binom{n}{d}$.


−1
+1
(−1, +1)
(+1, +1)
(−1, −1)
(+1, −1)
(+1, +1, +1)
(+1, −1, +1)



Obserwacja

- Dwa punkty leżą na jednej krawędzi, jeśli różnią się tylko jedną współrzędną.
- Dwa punkty leżą na jednej ścianie (2d), jeśli różnią się dwiema współrzędnymi.
- itd.



Obserwacja

- Dwa punkty leżą na jednej krawędzi, jeśli różnią się tylko jedną współrzędną.
- Dwa punkty leżą na jednej ścianie (2d), jeśli różnią się dwiema współrzędnymi.
- itd.

Wniosek

Ściana d-wymiarowa w kostce n-wymiarowej jest jednoznacznie wyznaczona przez $n-d$ współrzędnych.

Liczba ścian d-wymiarowych $=$

(liczba wyborów współrzędnych, które się zmieniają)$\times$

(liczba wyborów wartości na współrzędnych, które pozostają bez zmian)

Liczba ścian d-wymiarowych $=$

(liczba wyborów współrzędnych, które się zmieniają)$\times$

(liczba wyborów wartości na współrzędnych, które pozostają bez zmian)

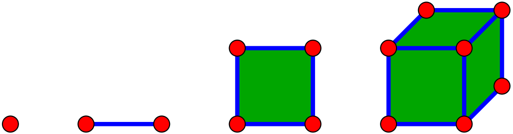
$$\text{Liczba ścian } d\text{-wymiarowych} = \binom{n}{d} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-d} \cdot \binom{n}{d}$$

Czy związek z $(x+2)^n$ jest przypadkowy? Odkryjmy to!

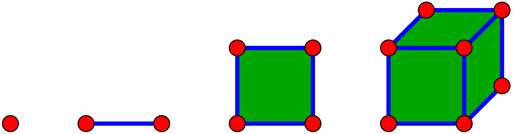
Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n, w którym współczynnik przy x^d oznacza liczbę ścian d-wymiarowych dla każdego $d \in \{0, 1, ..., n\}$.
Wtedy $P_0(x) = 1$.

Czy związek z $(x+2)^n$ jest przypadkowy? Odkryjmy to!

Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n, w którym współczynnik przy x^d oznacza liczbę ścian d-wymiarowych dla każdego $d \in \{0, 1, ..., n\}$.
Wtedy $P_0(x) = 1$.



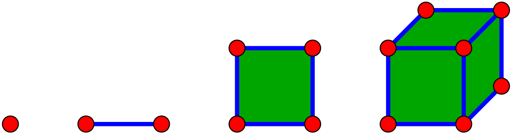
Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n, w którym współczynnik przy x^d oznacza liczbę ścian d-wymiarowych dla każdego $d \in \{0, 1, ..., n\}$. Wtedy $P_0(x) = 1$.



$$P_1(x) = P_0(x) + P_0(x) + xP_0(x) = (x+2)P_0(x)$$

Czy związek z $(x+2)^n$ jest przypadkowy? Odkryjmy to!

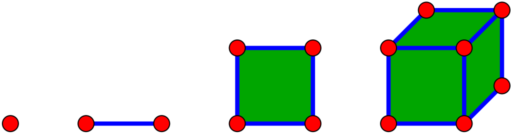
Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n, w którym współczynnik przy x^d oznacza liczbę ścian d-wymiarowych dla każdego $d \in \{0, 1, ..., n\}$.
Wtedy $P_0(x) = 1$.



$$P_1(x) = P_0(x) + P_0(x) + xP_0(x) = (x+2)P_0(x)$$
$$P_2(x) = P_1(x) + P_1(x) + xP_1(x) = (x+2)P_1(x)$$

Czy związek z $(x+2)^n$ jest przypadkowy? Odkryjmy to!

Niech $P_n(x)$ będzie wielomianem stopnia n, w którym współczynnik przy x^d oznacza liczbę ścian d-wymiarowych dla każdego $d \in \{0, 1, \dots, n\}$.
Wtedy $P_0(x) = 1$.



$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= P_0(x) + P_0(x) + xP_0(x) = (x+2)P_0(x) \\
P_2(x) &= P_1(x) + P_1(x) + xP_1(x) = (x+2)P_1(x) \\
&\dots \\
P_n(x) &= (x+2)^n P_0(x) = (x+2)^n
\end{aligned}
$$

Co wynika z tego wzoru?

Niech $x = 1$, wtedy

$$3^n = P_n(1) = \text{suma współczynników} = \sum_{d=0}^{n} \#(\text{ściany } d\text{-wymiarowe})$$

Co wynika z tego wzoru?

Niech $x = 1$, wtedy

$$3^n = P_n(1) = \text{suma współczynników} = \sum_{d=0}^{n} \#(\text{ściany } d\text{-wymiarowe})$$

- $1 = 3^0$
- $1 + 2 = 3^1$
- $1 + 4 + 4 = 3^2$
- $1 + 6 + 12 + 8 = 3^3$
- $1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 3^4$

Co wynika z tego wzoru?

Niech $x = 1$, wtedy

$$3^n = P_n(1) = \text{suma współczynników} = \sum_{d=0}^{n} \#(\text{ściany } d\text{-wymiarowe})$$

- $1 = 3^0$
- $1 + 2 = 3^1$
- $1 + 4 + 4 = 3^2$
- $1 + 6 + 12 + 8 = 3^3$
- $1 + 8 + 24 + 32 + 16 = 3^4$

A jaka jest kombinatoryczna natura tej równości?

Kombinatoryczna natura

Zaznaczmy środki ścian d-wymiarowych. Wtedy środek kostki n-wymiarowej jest w punkcie $(0, 0, \dots, 0)$.

Kombinatoryczna natura

Zaznaczmy środki ścian d-wymiarowych. Wtedy środek kostki n-wymiarowej jest w punkcie $(0, 0, \ldots, 0)$.

Środek ściany d-wymiarowej ma dokładnie d zer jako współrzędne. I na odwrót: d zer wyznacza wymiar ściany, na której leży.

Kombinatoryczna natura

Zaznaczmy środki ścian d-wymiarowych. Wtedy środek kostki n-wymiarowej jest w punkcie $(0, 0, \dots, 0)$.

Środek ściany d-wymiarowej ma dokładnie d zer jako współrzędne. I na odwrót: d zer wyznacza wymiar ściany, na której leży.

Zatem liczba wszystkich ścian jest równa liczbie wyborów wartości współrzędnej spośród $\{-1, 0, 1\}$ — innymi słowy liczbie ciągów długości n o wyrazach należących do $\{-1, 0, 1\}$.

Kombinatoryczna natura

Zaznaczmy środki ścian d-wymiarowych. Wtedy środek kostki n-wymiarowej jest w punkcie $(0, 0, \ldots, 0)$.

Środek ściany d-wymiarowej ma dokładnie d zer jako współrzędne. I na odwrót: d zer wyznacza wymiar ściany, na której leży.

Zatem liczba wszystkich ścian jest równa liczbie wyborów wartości współrzędnej spośród $\{-1, 0, 1\}$ — innymi słowy liczbie ciągów długości n o wyrazach należących do $\{-1, 0, 1\}$.

Liczba wszystkich ścian (dowolnego wymiaru) $= 3^n$

Co wynika z tego wzoru?

Niech $x = -1$, wtedy

$$1 = P_n(-1) = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d \#(\text{ściany } d\text{-wymiarowe})$$

Co wynika z tego wzoru?

Niech $x = -1$, wtedy

$$1 = P_n(-1) = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d \#(\text{ściany } d\text{-wymiarowe})$$

- 1d: $1 = -1 + 2 = -1 + V \Rightarrow V = 2$
- 2d: $1 = 1 - 4 + 4 = 1 - E + V \Rightarrow V - E = 0$
- 3d: $1 = -1 + 6 - 12 + 8 = -1 + F - E + V \Rightarrow V - E + F = 2$
- 4d: $1 = 1 - 8 + 24 - 32 + 16 = 1 - C + F - E + V \Rightarrow$
  $\Rightarrow V - E + F - C = 0$

Dziękuję za uwagę!