N O B E L
I
K O M B I N A T O R Y K A

Wojciech Guzicki

„Matematyka. Poszukuję — odkrywam”

Sielpia, 4–6.11.2022 r.

„Matematycy nagród Nobla nie otrzymują”.

Osoba	Rok	Dziedzina	Doktorat
Bertrand Russell	1950	Literatura	Cambridge 1983?
Max Born	1954	Fizyka	Getynga 1906
Walther Bothe	1954	Fizyka	Berlin 1914
John Bardeen	1956	Fizyka	Princeton 1936
	1972		
Kenneth Arrow	1972	Ekonomia	Columbia 1951
Leonid Kantorowicz	1975	Ekonomia	Leningrad 1934?
Gerard Debreu	1983	Ekonomia	Paryż 1956
Herbert Hauptman	1985	Chemia	Maryland 1955
John Nash	1994	Ekonomia	Princeton 1950
John Pople	1998	Chemia	Cambridge 1951

Osoba	Rok	Dziedzina	Doktorat
Clive Granger	2003	Ekonomia	Nottingham 1959
Robert Aumann	2005	Ekonomia	MIT 1955
Lloyd Shapley	2012	Ekonomia	Princeton 1953
Roger Penrose	2020	Fizyka	Cambridge 1958

Kenneth Arrow: *The Impossibility Theorem*

Wyobraźmy sobie wybory, w których bierze udział n kandydatów, tworzących zbiór C. Zakładamy przy tym, że $n \geq 3$.

Niech E będzie zbiorem wyborców (nazywanym także *elektoratem*); przyjmijmy, że w wyborach bierze udział m wyborców:

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}.$$

Oznaczmy

$$[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$$

dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 1$. Mamy wówczas:

$$E = \{e_i : \; i \in [m]\}.$$

Każdy wyborca układa swoją listę preferencji. Lista preferencji jest funkcją różnowartościową

$$\sigma : C \to [n].$$

Jeśli funkcja σ jest listą preferencji jakiegoś wyborcy oraz $\sigma(a) > \sigma(b)$ dla pewnych kandydatów $a, b \in C$, to znaczy, że ten wyborca uważa kandydata a za lepszego od kandydata b. Innymi słowy, $\sigma(a)$ dla $a \in C$ określa „wartość" kandydata, zdaniem danego wyborcy. Kandydat o wartości 1 jest najbardziej niechcianym kandydatem, a kandydat o najwyższej wartości n jest kandydatem najbardziej pożądanym przez tego wyborcę.

Niech Σ będzie zbiorem wszystkich możliwych list preferencji. W notacji teoriomnogościowej mamy:

$$\Sigma = [n]^C.$$

Niech następnie S będzie zbiorem wszystkich możliwych ciągów długości m list preferencji. W notacji teoriomnogościowej mamy:

$$S = \Sigma^{[m]}.$$

Jeśli

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$$

jest takim ciągiem, to znaczy, że lista σ_1 jest listą preferencji wyborcy e_1, lista σ_2 jest listą preferencji wyborcy e_2 i tak dalej.

Taki ciąg m indywidualnych list preferencji nazwiemy głosowaniem (czasem nazywamy go także *stanem* elektoratu).

Każdy wyborca przedstawia w głosowaniu swoją listę preferencji i na podstawie tych indywidualnych list ma zostać utworzona — w pewien deterministyczny sposób (a więc na przykład nie odwołując się do losowania) — lista ostateczna.

Rozważamy zatem funkcję

$$F : S \to \Sigma,$$

którą nazwiemy systemem wyborczym.

Funkcja F tworzy z dowolnego głosowania, czyli ciągu m indywidualnych list preferencji $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ jedną, ostateczną listę preferecji — wynik wyborów. Tę listę

$$\sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$$

nazwiemy listą preferencji społecznych.

Chcemy, by system wyborczy spełniał kilka naturalnych warunków.

Przed sformułowaniem tych warunków wprowadzę jedną definicję. Dla dowolnego ciągu

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S$$

indywidualnych list preferencji i takich kandydatów $a, b \in C$, że $a \neq b$ definiujemy następujący zbiór:

$$W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big) = \{i \in [m] : \ \sigma_i(a) > \sigma_i(b)\}.$$

Zbiór $W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big)$ jest zbiorem tych wyborców (dokładniej: numerów wyborców), którzy cenią kandydata a bardziej niż kandydata b.

Pierwszym warunkiem jest warunek jednomyślności (J):

jeśli wszyscy wyborcy wolą kandydata a od kandydata b, to kandydat a ma większą wartość niż kandydat b na liście preferencji społecznych.

Inaczej: jeśli wszyscy wyborcy wolą Alicję od Boba, to w wyniku wyborów Alicja ma lepsze miejsce niż Bob na liście preferencji społecznych.

(J) Niech

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S \quad \text{oraz} \quad \sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m).$$

Niech następnie

$$a, b \in C \quad \text{oraz} \quad a \neq b.$$

Wówczas jeśli

$$\sigma_i(a) > \sigma_i(b) \quad \text{dla} \quad i \in [m],$$

to $\sigma(a) > \sigma(b)$.

(J) Niech

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S \quad \text{oraz} \quad \sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m).$$

Niech następnie

$$a, b \in C \quad \text{oraz} \quad a \neq b.$$

Wówczas, jeśli

$$W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big) = [m],$$

to $\sigma(a) > \sigma(b)$.

Drugim warunkiem jest warunek monotoniczności (M):

jeśli poparcie, które kandydatka Alicja uzyskała w pierwszym głosowaniu, wystarczało, by w wyniku wyborów znalazła się na liście preferencji społecznych wyżej od Boba, a następnie w drugim głosowaniu uzyskała poparcie tych samych wyborców i być może jeszcze innych (przy czym żaden wyborca nie zmienił swojej oceny innych kandydatów), to uzyskane poparcie także powinno wystarczyć do tego, by w tym drugim głosowaniu Alicja znalazła się wyżej od Boba na liście preferencji społecznych.

(M) Niech

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S \quad \text{oraz} \quad \sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m).$$

Niech następnie $a, b \in C$ będą takimi kandydatami, że:

$$a \neq b, \quad \sigma(a) > \sigma(b) \quad \text{oraz} \quad X = W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big).$$

Niech wreszcie Y bedzie takim zbiorem, że

$$X \subseteq Y \subseteq [m].$$

(M cd.) Definiujemy teraz ciąg indywidualnych preferencji

$$(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in S$$

w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &\text{jeśli} \quad i \in X, \quad \text{to} \quad \tau_i = \sigma_i, \\ &\text{jeśli} \quad i \in [m] \setminus Y, \quad \text{to} \quad \tau_i = \sigma_i, \\ &\text{jeśli} \quad i \in Y \setminus X, \quad \text{to} \quad \tau_i(a) = \sigma_i(b), \quad \tau_i(b) = \sigma_i(a) \\ &\qquad\qquad \text{oraz} \quad \tau_i(x) = \sigma_i(x) \quad \text{dla} \quad x \in C \setminus \{a, b\}. \end{aligned}$$

Niech

$$\tau = F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m).$$

Wówczas $\tau(a) > \tau(b)$.

Wreszcie mamy warunek trzeci, niezależności od innych alternatyw (N):

to, czy w wyniku wyborów Alicja znajdzie się na liście preferencji społecznych wyżej od Boba, zależy tylko od tego, jak wyborcy oceniają Alicję i Boba i nie zależy od tego, jak wyborcy oceniają innych kandydatów.

(N) Przypuśćmy, że dane są dwa ciągi indywidualnych list preferencji:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in S$$

i odpowiadające im listy preferencji społecznych:

$$\sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \quad \text{oraz} \quad \tau = F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m).$$

Niech następnie $a, b \in C$ będą takimi kandydatami, że

$$a \neq b, \quad \sigma(a) > \sigma(b)$$

oraz

$$W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big) = W\big((\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m), a, b\big).$$

Wówczas

$$\tau(a) > \tau(b).$$

Powstaje pytanie o to, czy system wyborczy może spełniać jednocześnie te trzy warunki.

Odpowiedź jest pozytywna.

Popatrzmy na następujący system wyborczy F:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) = \sigma_1.$$

Wynikiem wyborów jest to, o czym zadecydował wyborca e_1.

Można łatwo sprawdzić, że wszystkie warunki są wówczas spełnione.

Mówimy wtedy, że wyborca e_1 jest dyktatorem w systemie wyborczym F.

Oczywiście dyktatorem może być inny wyborca: mamy zatem m przykładów systemów wyborczych.

Czy istnieją inne?

Otóż Arrow udowodnił, że nie:

Twierdzenie 1. Jeśli system wyborczy F spełnia warunki (J), (M) i (N), to jest jednym z m systemów dyktatorskich.

Przyczyny tego stanu rzeczy leżą w kombinatoryce.

Przypuśćmy, że dany jest dowolny zbiór X.

Mówimy, że rodzina zbiorów $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem w zbiorze X, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $X \in \mathcal{F}$, $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
- jeśli $A \subseteq B \subseteq X$ oraz $A \in \mathcal{F}$, to $B \in \mathcal{F}$,
- jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- jeśli $A \subseteq X$, to albo $A \in \mathcal{F}$, albo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Zbiory należące do ultrafiltra traktujemy jako duże, nienależące do niego jako małe.

Przykładem ultrafiltra jest rodzina zbiorów:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \ x_0 \in A\}$$

dla ustalonego elementu x_0 zbioru X. Taki ultrafiltr w zbiorze X nazywamy ultrafiltrem głównym generowanym przez element x_0.

W twierdzeniu Arrowa istotną rolę odgrywa własność zbiorów skończonych wyrażona w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2. Każdy ultrafiltr w zbiorze skończonym jest główny.

W dowodzie twierdzenia Arrowa najważniejszym pojęciem jest pojęcie zbioru decydującego dla systemu wyborczego. Zbiory decydujące tworzą ultrafiltr w zbiorze $[m]$, czyli w zbiorze numerów wyborców. Generator tego ultrafiltru jest właśnie numerem dyktatora systemu wyborczego.

Przyjmijmy teraz, że F jest pewnym ustalonym systemem wyborczym spełniającym warunki (J), (M) i (N).

Zacznijmy od dwóch definicji.

Niech a i b będą dowolnymi różnymi kandydatami oraz niech

$$X \subseteq [m].$$

Zbiór X decyduje o tym, czy kandydat a jest lepszy od kandydata b, gdy dla dowolnego ciągu $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S$, jeśli

$$\sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \quad \text{oraz} \quad X \subseteq W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big),$$

to

$$\sigma(a) > \sigma(b).$$

Innymi słowy, do tego, by Alicja w wyniku wyborów znalazła się wyżej od Boba, wystarczy, by tak chcieli wyborcy ze zbioru X (dokładniej: wyborcy o numerach ze zbioru X).

Zbiór $X \subseteq [m]$ nazwiemy zbiorem decydującym dla systemu wyborczego F, jeśli posiada następującą własność:

- dla każdej pary różnych kandydatów a i b zbiór X decyduje o tym, czy kandydat a jest lepszy od kandydata b, czyli dla każdego ciągu $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S$, jeśli

$$\sigma = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \quad \text{oraz} \quad X \subseteq W\big((\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), a, b\big),$$

  to

$$\sigma(a) > \sigma(b).$$

Zbiór $X \subseteq [m]$ jest więc zbiorem decydującym dla systemu wyborczego F, jeśli dla każdej pary $a, b \in C$ różnych kandydatów decyduje o tym, czy kandydat a jest lepszy od kandydata b.

Takie zbiory istnieją: przykładem jest cały zbiór $[m]$ (co wynika z warunku jednomyślności (J)).

Następujące twierdzenie kończy dowód twierdzenia Arrowa:

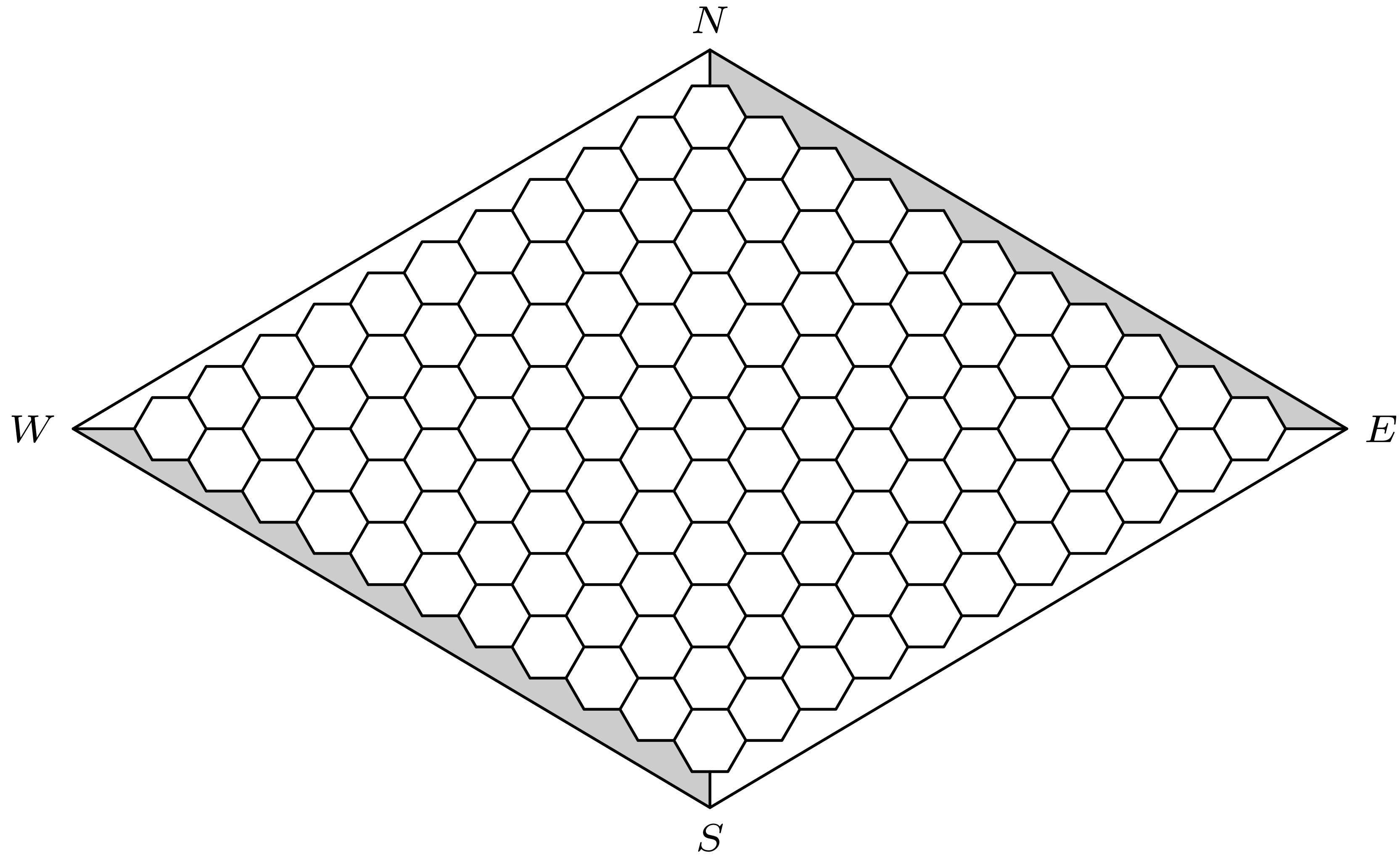
Twierdzenie 3. Zbiory decydujące dla systemu wyborczego tworzą ultrafiltr w zbiorze $[m]$.

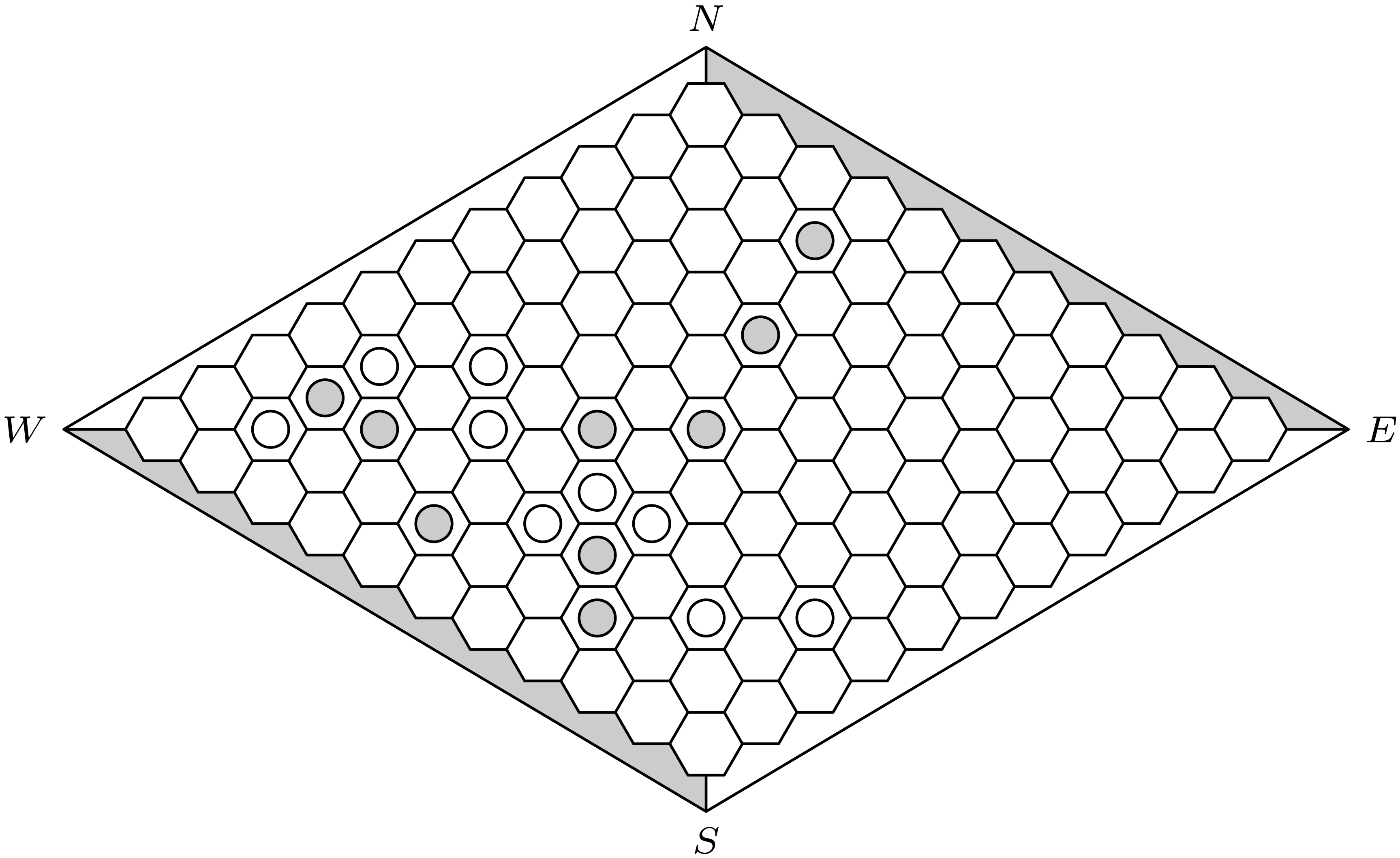
Jeśli i jest bowiem generatorem tego ultrafiltra, to zbiór $\{i\}$ jest decydujący dla systemu wyborczego, a więc i jest dyktatorem.

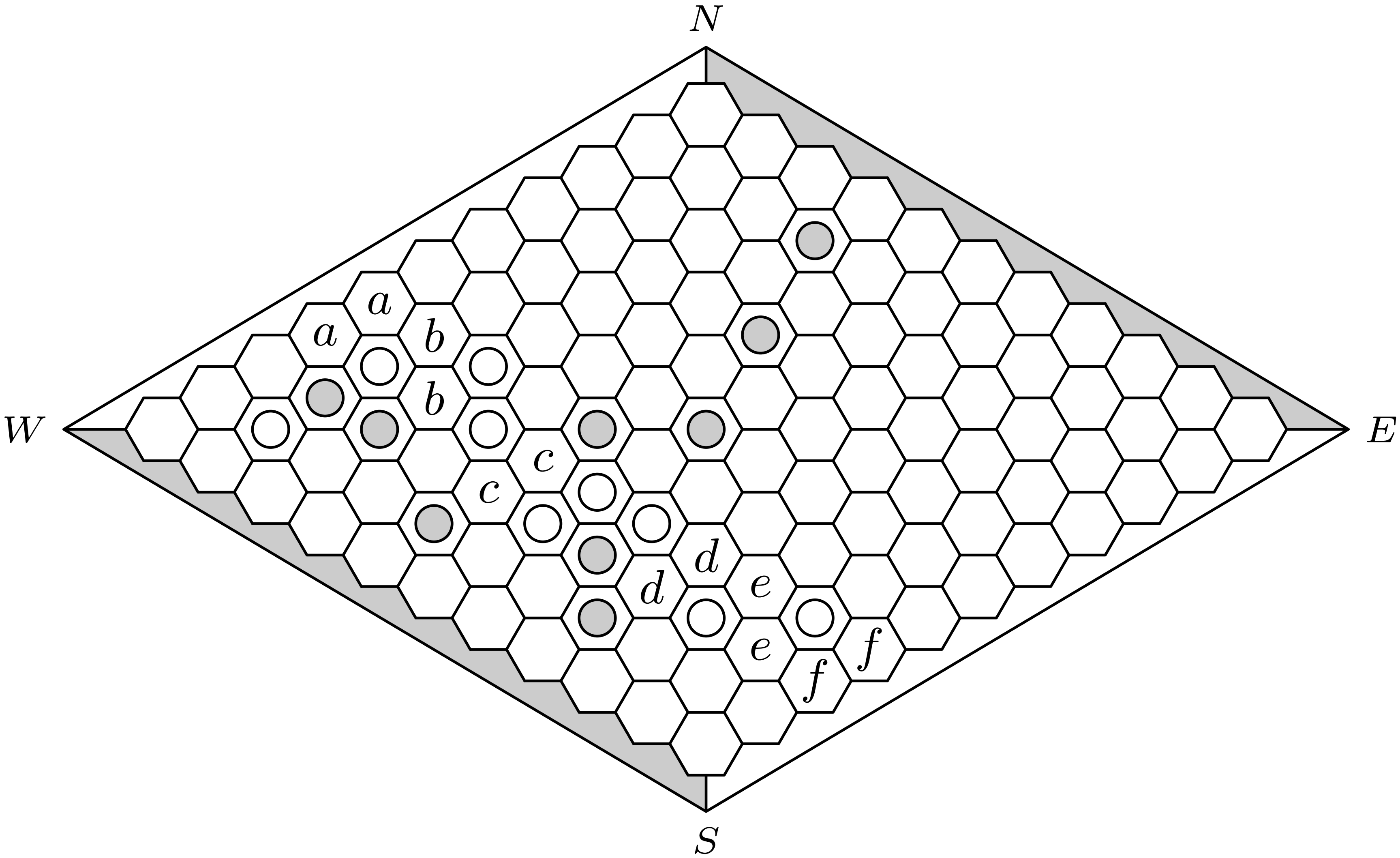
John Nash: *Gra Hex*

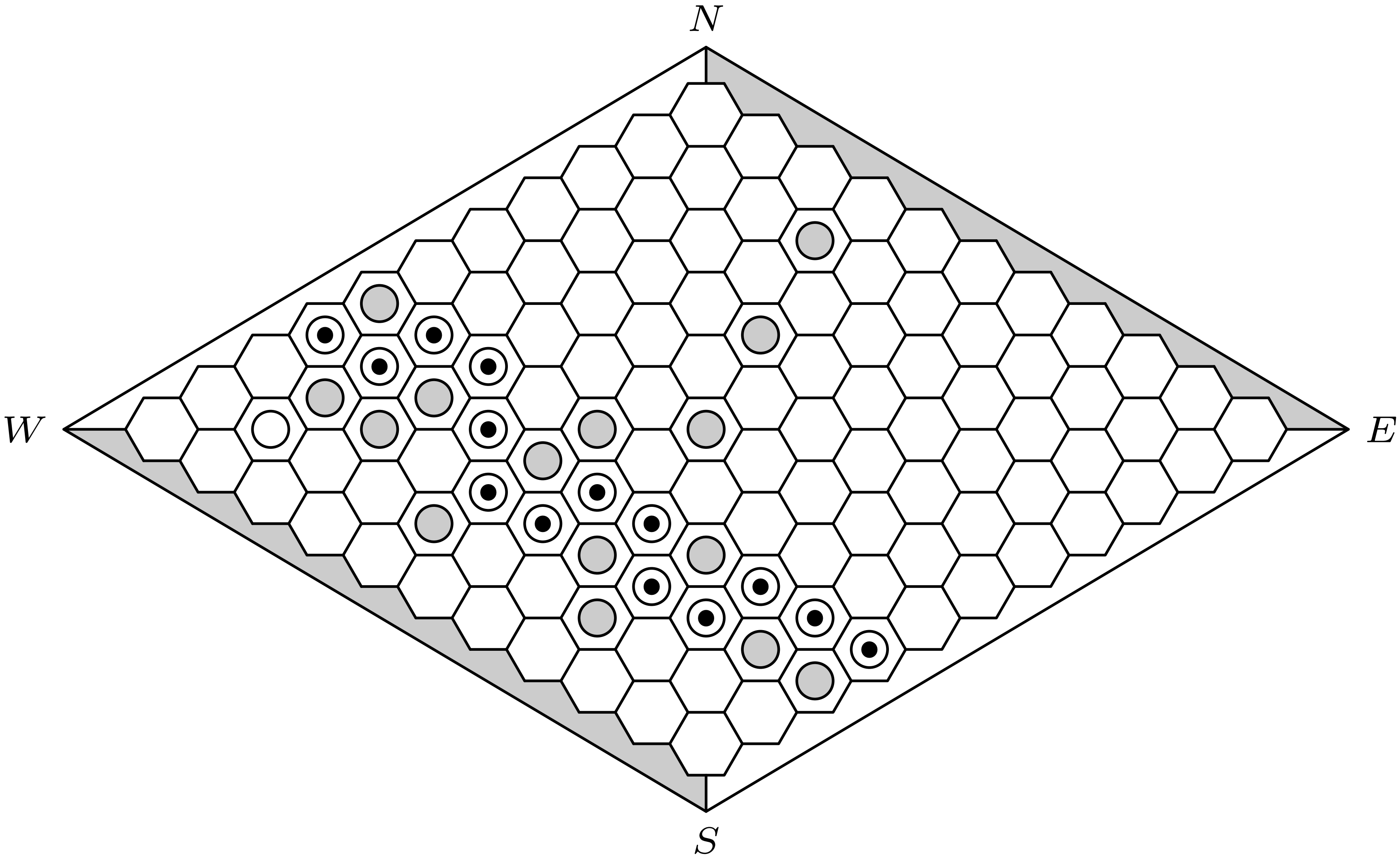
John Nash był jednym z dwóch twórców gry *Hex*.

Tę grę wymyślił w 1941 (1942?) roku Piet Hein i niezależnie od niego w 1948 (1949?) roku John Nash.


N
W
E
S


N
W
E
S


N
W
E
S
a
a
b
b
c
c
d
d
e
e
f
f


N
W
E
S

- Czy każda rozgrywka musi się zakończyć wygraną jednego z graczy? A może istnieją takie ustawienia pionków na planszy, że żaden z graczy nie ma ciągu pionków swojego koloru łączących jego przeciwległe boki planszy?

- Czy możliwe jest takie ustawienie pionków, że obaj gracze mają wygrywające ciągi pionków swojego koloru i o wygranej w grze będzie decydować to, który gracz pierwszy ustawi swój wygrywający ciąg?

- Gra *Hex* jest skończona: można wykonać co najwyżej 121 ruchów. O takich grach wiadomo, że są zdeterminowane — to znaczy, że jeden z graczy ma strategię nieprzegrywającą. W grach skończonych, w których remis jest niemożliwy, jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Jak jest w grze *Hex*?

W 1949 roku Nash udowodnił (ale swoje wyniki opublikował dopiero w 1952 roku), że gra *Hex* nie może zakończyć się remisem; co więcej, tylko jeden z graczy może skonstruować ciąg łączący przeciwległe boki planszy.

Z tego, że remis jest niemożliwy, wypływa wniosek, że jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Nash udowodnił także, że tym graczem jest gracz rozpoczynający grę.

Dowód Nasha, że gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą, jest niekonstruktywny. Dokładniej, Nash udowodnił, że drugi gracz nie może mieć strategii wygrywającej — stąd wynika, że taką strategię ma gracz rozpoczynający. Dotychczas (październik 2022 roku) nikomu nie udało się takiej strategii wskazać.

Główny pomysł dowodu Nasha. Przypuśćmy, że gracz drugi ma strategię wygrywającą. Gracz rozpoczynający wykonuje dowolny ruch, a następnie gra według strategii gracza drugiego. Jeśli musi wykonać ruch na polu, na którym już stoi jego pionek, znów wykonuje dowolny ruch. Te dowolne ruchy nie mogą przeszkodzić w wygraniu gry. A więc gracz rozpoczynający wygra, co przeczy założeniu.

Gra *Hex* została w całości przeanalizowana dla planszy o wymiarach 9×9 (Jakub Pawlewicz, Ryan B. Hayward, 2013). Znalezienie strategii wygrywającej dla planszy oryginalnej o wymiarach 11×11 jest wciąż problemem otwartym.

Twierdzenie o tym, że gra nie może kończyć się remisem, nie jest trywialne i w 1979 roku David Gale pokazał interesujący związek tego twierdzenia z tzw. twierdzeniem Brouwera o punkcie stałym (zob. także F. Murlak, *Delta*, maj 2006).

Lloyd Shapley: *stabilność małżeństw*

Założenia:

- Mamy dokładnie n kawalerów $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i tyle samo panien $k_1, k_2, \ldots, k_n$.
- Każdy kawaler ma swoją listę preferencji kandydatek na żonę. Inaczej mówiąc, każdy kawaler ustawia wszystkie kandydatki w kolejności: od najbardziej pożądanej na żonę do najmniej pożądanej.
- Podobnie każda panna ustawia w kolejności kandydatów na męża.
- Mówimy, że osoba jest wyżej na liście preferencji, jeśli jest bardziej pożądana.
- Załóżmy następnie, że został dokonany wybór: każdy kawaler zaręcza się z jedną panną.

Mówimy, że dokonane skojarzenie par jest niestabilne, jeśli istnieją dwie osoby: kawaler m_i oraz panna k_j spełniające następujące warunki:

- kawaler m_i oraz panna k_j nie są zaręczeni,
- kawaler m_i jest zaręczony z panną k_s, przy czym $s \neq j$,
- panna k_j jest zaręczona z kawalerem m_t, przy czym $t \neq i$,
- kawaler m_i ma na swojej liście preferencyjnej pannę k_j wyżej niż pannę k_s, z którą jest zaręczony,
- panna k_j ma na swojej liście preferencyjnej kawalera m_i wyżej niż kawalera m_t, z którym jest zaręczona.

Inaczej:

- Bob i Alicja nie są zaręczeni,
- Bob jest zaręczony z Cecylią,
- Alicja jest zaręczona z Dominikiem,
- Bob ma na swojej liście preferencyjnej Alicję wyżej niż Cecylię,
- Alicja ma na swojej liście preferencyjnej Boba wyżej niż Dominika.

W problemie stabilności małżeństw pytamy o to, czy dla dowolnych list preferencyjnych kawalerów i panien istnieje taki wybór małżeństw, który jest stabilny, a więc nie ma takich par m_i oraz k_j powodujących opisaną wyżej niestabilność.

W 1962 roku David Gale i Lloyd S. Shapley opublikowali w *American Mathematical Monthly* krótką pracę (7 stron), w której udowodnili twierdzenie mówiące, że dla każdego zestawu list preferencyjnych istnieje co najmniej jedno stabilne skojarzenie par. Ponadto pokazali efektywny algorytm znajdujący takie skojarzenie.

Shapley — jak widzieliśmy we wstępie — za to twierdzenie otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii. David Gale niestety nie doczekał tej nagrody, gdyż zmarł w 2008 roku.

Przykład 1. Kawalerowie: A, B, C i D, panny: X, Y, Z, T.

$$\begin{array}{rcl}
A & : & X,\ Y,\ Z,\ T, \\
B & : & X,\ T,\ Z,\ Y, \\
C & : & Y,\ X,\ Z,\ T, \\
D & : & T,\ Y,\ Z,\ X,
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
X & : & D,\ C,\ A,\ B, \\
Y & : & B,\ D,\ A,\ C, \\
Z & : & D,\ A,\ B,\ C, \\
T & : & C,\ B,\ A,\ D.
\end{array}$$

Mamy wówczas dokładnie jedno stabilne skojarzenie par:

$$(AZ, BT, CX, DY).$$

$$
\begin{array}{lllllll}
A: & X, & Y, & Z, & T, \\
B: & X, & T, & Z, & Y, \\
C: & Y, & X, & Z, & T, \\
D: & T, & Y, & Z, & X,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
X: & D, & C, & A, & B, \\
Y: & B, & D, & A, & C, \\
Z: & D, & A, & B, & C, \\
T: & C, & B, & A, & D.
\end{array}
$$

Skojarzenie (AY, BT, CZ, DX) jest niestabilne.

Popatrzmy na kawalera D i pannę Y.

- Kawaler D jest zaręczony z panną X, ale wolałby pannę Y.
- Panna Y jest zaręczona z kawalerem A, ale wolałaby kawalera D.

Para (D, Y) tworzy więc niestabilność tego skojarzenia.

Przykład 2. Kawalerowie: A, B i C, panny: X, Y i Z.

$$\begin{array}{lcl} A & : & Y,\ X,\ Z, \\ B & : & Z,\ Y,\ X, \\ C & : & X,\ Z,\ Y, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lcl} X & : & B,\ A,\ C, \\ Y & : & C,\ B,\ A, \\ Z & : & A,\ C,\ B. \end{array}$$

Istnieją trzy stabilne skojarzenia małżeństw:

$$(AY, BZ, CX), \quad (AX, BY, CZ) \quad \text{oraz} \quad (AZ, BX, CY).$$

Można także się przekonać, że żadne inne skojarzenie nie jest stabilne.

Algorytm.

- Na początku przyjmujemy, że każdy kawaler jest wolny;
- Dopóki co najmniej jeden kawaler m jest wolny, wykonujemy:
  - Wybieramy wolnego kawalera, który oświadcza się kolejnej pannie k ze swojej listy;
    - jeśli na liście panny k kawaler m jest wyżej od jej dotychczasowego narzeczonego, to panna k przyjmuje (tymczasowo) oświadczyny kawalera m, zrywa dotychczasowe zaręczyny i jej dotychczasowy narzeczony staje się wolny;
    - jeśli natomiast na liście panny k kawaler m jest niżej od jej dotychczasowego narzeczonego, to panna k odrzuca zaręczyny kawalera m, który pozostaje wolny;
- Jeśli żaden kawaler nie jest wolny, to tymczasowe zaręczyny stają się ostatecznymi.

Gale i Shapley udowodnili następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4. Powyższy algorytm kończy działanie dla dowolnego zestawu list preferencji oraz daje w wyniku skojarzenie stabilne.

Definicja. Kawalera m i pannę k nazwiemy partnerami stabilnymi, jeśli istnieje takie skojarzenie stabilne, w którym kawaler m jest zaręczony z panną k.

Twierdzenie 5. Załóżmy, że w wyniku działania algorytmu Bob został zaręczony z Alicją. Załóżmy następnie, że Bob i Cecylia są partnerami stabilnymi. Wówczas Alicja jest wyżej od Cecylii na liście preferencji Boba. Inaczej mówiąc, algorym Gale'a–Shapleya kojarzy każdego kawalera z najbardziej pożądaną jego stabilną partnerką.

Inny problem: rozmieszczanie studentów w pokojach akademika.

Mamy n studentów (gdzie n jest liczbą parzystą), których należy zakwaterować w akademiku w pokojach dwuosobowych. Każdy student ma listę preferencyjną kolegów, z którymi może być zakwaterowany.

Okazuje się (co także wykazali Gale i Shapley), że rozwiązanie stabilne może nie istnieć.

Przykład 3. Studenci: A, B, C i D.

$$\begin{aligned} A: &\quad B, C, D, \\ B: &\quad C, A, D, \\ C: &\quad A, B, D, \\ D: &\quad A, B, C. \end{aligned}$$

Wówczas nie istnieje stabilne połączenie studentów w pary.

Na przykład w skojarzeniu (AB, CD) para (B, C) tworzy niestabilność.

David Gale — jeszcze raz.

Praca, którą w 1953 roku napisali David Gale i F. M. Stewart zapoczątkowała rozwijane w XX wieku intensywne badania gier nieskończonych.

Oznaczenia:

- $\mathcal{N}$ jest zbiorem nieskończonych ciągów o wyrazach z $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}^*$ jest zbiorem skończonych ciągów o wyrazach z $\mathbb{N}$. Do zbioru $\mathbb{N}^*$ zaliczamy także ciąg pusty ε, czyli ciąg długości 0.
- $\mathbb{N}^{(p)} \subseteq \mathbb{N}^*$ jest zbiorem ciągów długości parzystej (zatem $\varepsilon \in \mathbb{N}^{(p)}$),
- $\mathbb{N}^{(n)} \subseteq \mathbb{N}^*$ jest zbiorem ciągów długości nieparzystej.

W grze uczestniczy dwóch graczy, nazwijmy ich Zaczynającym i Odpowiadającym.

Każdy z nich wybiera kolejno liczbę naturalną: Zaczynający wybiera liczbę $a_1 \in \mathbb{N}$, odpowiadający wybiera liczbę $a_2 \in \mathbb{N}$, Zaczynający wybiera liczbę $a_3 \in \mathbb{N}$, Odpowiadający wybiera liczbę $a_4 \in \mathbb{N}$ i tak dalej.

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{Zaczynający:} & a_1 & & a_3 & & a_5 & & a_7 & & a_9 & & \ldots & \\
\text{Odpowiadający:} & & a_2 & & a_4 & & a_6 & & a_8 & & a_{10} & & \ldots
\end{array}
$$

Wspólnie tworzą w ten sposób ciąg nieskończony (a_n) liczb naturalnych.

Zaczynający wybiera wyrazy a_n dla n nieparzystych, Odpowiadający — dla n parzystych.

Ta gra jest tzw. grą z pełną informacją: każdy z graczy wybiera swoją liczbę a_n, znając wszytkie dotychczasowe wybory, czyli cały ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Mamy zatem:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathcal{N}.$$

Należy określić, kto wygrał grę.

Przed rozpoczęciem gry wybierany jest zbiór $A \subseteq \mathcal{N}$. Wówczas:

- jeśli $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots) \in A$, to grę wygrał Zaczynający,
- jeśli $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathcal{N} \setminus A$, to grę wygrał Odpowiadający.

Strategią dla gracza Zaczynającego jest dowolna funkcja

$$\sigma : \mathbb{N}^{(p)} \to \mathbb{N}.$$

Strategią dla gracza Odpowiadającego jest dowolna funkcja

$$\tau : \mathbb{N}^{(n)} \to \mathbb{N}.$$

Co to znaczy, że gracz Zaczynający gra według strategii σ? Jeśli dotychczas zostały wybrane liczby tworzące ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (gdzie n jest liczbą parzystą), to Zaczynający wybiera liczbę

$$a_{n+1} = \sigma\big((a_1, a_2, \ldots, a_n)\big).$$

Analogicznie określamy grę gracza Odpowiadającego grającego według strategii τ.

W ten sposób, jeśli gracz Zaczynający wybierze pewną strategię σ i gracz Odpowiadający wybierze strategię τ, to przebieg gry będzie wyglądał następująco:

- **ruch 1:** Zaczynający wybiera liczbę $a_1 = \sigma(\varepsilon)$,
- **ruch 2:** Odpowiadający wybiera liczbę $a_2 = \tau\big((a_1)\big)$,
- **ruch 3:** Zaczynający wybiera liczbę $a_3 = \sigma\big((a_1, a_2)\big)$,
- **ruch 4:** Odpowiadający wybiera liczbę $a_4 = \tau\big((a_1, a_2, a_3)\big)$

i tak dalej.

Jeśli gracz Zaczynający wybierze strategię σ oraz gracz Odpowiadający wybierze strategię τ, to otrzymaną w wyniku tych strategii grę oznaczymy symbolem $\sigma * \tau$.
Wówczas:

- gracz Zaczynający wygrał, jeśli $\sigma * \tau \in A$,
- gracz Odpowiadający wygrał, jeśli $\sigma * \tau \in \mathcal{N} \setminus A$.

Strategię σ gracza Zaczynającego nazywamy strategią wygrywającą, jeśli

$$\forall \tau \, (\sigma * \tau \in A).$$

Podobnie strategię τ gracza Odpowiadającego nazywamy strategią wygrywającą, jeśli

$$\forall \sigma \, (\sigma * \tau \in \mathcal{N} \setminus A).$$

Przykład 1. Niech A będzie zbiorem ciągów nieograniczonych. Wówczas gracz Zaczynający ma strategię wygrywającą:

$$\sigma\big((a_1, a_2, \ldots, a_{2n})\big) = n$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Przykład 2. Niech A będzie zbiorem ciągów rozbieżnych do nieskończoności. Wówczas gracz Odpowiadający ma strategię wygrywającą:

$$\sigma\big((a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1})\big) = 1$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Naturalnym pytaniem jest, czy w każdej grze (to znaczy dla każdego zbioru $A \subseteq \mathcal{N}$) któryś z graczy ma strategię wygrywającą. W przypadku gier skończonych tak jest. Udowodnił to E. Zermelo w 1912 roku. Gry nieskończone okazały się inne.

W swojej pracy z 1953 roku Gale i Stewart udowodnili, że istnieją takie zbiory $A \subseteq \mathcal{N}$, dla których żaden z dwóch graczy nie ma strategii wygrywającej. Udowodnili następnie, że jeśli zbiór A jest *otwarty*, to jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

Dla dowolnego ciągu skończonego $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^*$ definiujemy zbiór bazowy U_s jako zbiór ciągów nieskończonych postaci:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots),$$

gdzie $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$ są dowolnymi liczbami naturalnymi. Inaczej mówiąc, są to ciągi nieskończone, których odcinkiem początkowym jest ciąg s.

Zbiór otwarty jest to suma zbiorów bazowych (skończenie wielu lub nieskończenie wielu).

Zbiór domknięty jest to dopełnienie zbioru otwartego.

Zbiór A o tej własności, że w opisanej wyżej grze jeden z graczy ma strategię wygrywającą, nazywamy zbiorem zdeterminowanym. Zbiory otwarte są zatem zdeterminowane.

Podobnie (co także udowodnili Gale i Stewart) zbiory domknięte są zdeterminowane.

Przez długi czas otwartym problemem było to, czy zdeterminowane są tzw. zbiory borelowskie.

Rodzina zbiorów borelowskich jest to najmniejszy zbiór $\mathcal{B}$ podzbiorów zbioru $\mathcal{N}$ o następujących własnościach:

- zbiory otwarte i domknięte należą do rodziny $\mathcal{B}$,
- jeśli zbiory $A_1, A_2, \ldots$ należą do rodziny $\mathcal{B}$, to

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}.$$

W 1975 roku Donald A. Martin udowodnił, że wszystkie zbiory borelowskie są zdeterminowane. Pytanie, jakie podzbiory zbioru $\mathcal{N}$ są zdeterminowane, jest jeszcze dalekie od rozstrzygnięcia.

Warto tu dodać, że w badaniu zbiorów zdeterminowanych znaczącą rolę odegrali matematycy polscy.

- Pierwszą grę nieskończoną badali Banach i Mazur w 1935 roku.
- Mycielski i Steinhaus sformułowali aksjomat determinacji (każdy zbiór jest zdeterminowany), którego konsekwencje są badane do dziś. W dowodzie istnienia zbiorów niezdeterminowanych korzysta się z aksjomatu wyboru. Zastąpienie aksjomatu wyboru aksjomatem determinacji ma interesujące konsekwencje w teorii mnogości.
- Jedną z nich jest twierdzenie, że każdy podzbiór zbioru $\mathcal{N}$ jest mierzalny (w sensie Lebesgue'a), udowodnione w 1964 roku przez Mycielskiego i Świerczkowskiego.

K O N I E C