Cyfrowe zadania

rozwiązania zadań

1. Wyznaczyć wszystkie cyfry C, dla których liczba $\overline{1234C}$ jest podzielna przez 6.

2. Wyznaczyć wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne, które są trzy razy większe od sumy swoich cyfr.

Szukamy takich liczb naturalnych dwucyfrowych $\overline{ab}$, że

$$\overline{ab} = 3(a+b).$$

Zatem $10a+b=3a+3b$, a stąd $7a=2b$.

Lewa strona ostatniej równości jest podzielna przez 7, więc również prawa strona tej równości dzieli się przez 7, skąd dostajemy, że cyfra b dzieli się przez 7, czyli $b=7$ lub $b=0$.

Jeśli $b=0$, to również $a=0$.

Jeżeli natomiast $b=7$, to $a=2$.
Stąd może istnieć tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania: 27.

Łatwo sprawdzamy, że liczba ta istotnie spełnia warunki zadania, bo $3\cdot(2+7)=3\cdot 9=27$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby dwucyfrowe, które są cztery razy większe od sumy swoich cyfr.

Odp.: Tymi liczbami są: 12, 24, 36, 48.

4. Znaleźć takie cyfry A i B, dla których zachodzi równość $\overline{BAA}-\overline{AAB}=\overline{BB}$.

Równość $\overline{BAA}-\overline{AAB}=\overline{BB}$ zapisujemy w postaci równoważnej $\overline{BAA}=\overline{AAB}+\overline{BB}$.

Stąd kolejno

$$100B+10A+A=(100A+10A+B)+(10B+B),$$

$$100B+11A=110A+12B,$$

$$88B=99A,$$

$$8B=9A.$$

Zatem A jest cyfrą podzielną przez 8, czyli $A=0$ lub $A=8$. Jednak nie może być $A=0$, bo cyfra A występuje na początku zapisu dziesiętnego liczby. Pozostaje tylko $A=8$ i wtedy mamy $B=9$.

5. Ile jest liczb pięciocyfrowych postaci $\overline{a567b}$ podzielnych przez 36?

Liczba naturalna jest podzielna przez 36 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4 i przez 9 (bo liczby 4 i 9 są względnie pierwsze).

Jeśli jest podzielna przez 4, to dwucyfrowa liczba zbudowana z dwóch ostatnich cyfr tej liczby jest podzielna przez 4. Zatem szukane liczby są postaci: $\overline{a5672}$, $\overline{a5676}$.

Skoro liczby te mają być też podzielne przez 9, więc sumy ich cyfr mają być podzielne przez 9. Stąd przez 9 muszą dzielić się sumy:

$$a+5+6+7+2=20+a \quad \text{oraz} \quad a+5+6+7+6=24+a.$$

W pierwszym przypadku zachodzi ta podzielność dla $a=7$, a w drugim dla $a=3$.

Są zatem tylko dwie liczby spełniające warunki zadania: 75672 i 35676.

6. Wyznaczyć wszystkie liczby postaci $\overline{aa2022bb}$ $(a \neq 0)$, które są podzielne przez 36.

Istnieją trzy liczby spełniające warunki zadania:

66202200, 22202244, 77202288.

7. Wyznaczyć wszystkie liczby dwucyfrowe $\overline{AB}$ dla których $\sqrt{\overline{AB}} = A+B$.

Równość daną w zadaniu zapiszemy w postaci równoważnej

$$\overline{AB} = (A+B)^2.$$

Zatem kwadrat liczby $A+B$ ma być liczbą dwucyfrową.

Liczbami dwucyfrowymi, które są kwadratami liczb całkowitych są liczby: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Sprawdzamy bezpośrednio, że

$$(1+6)^2 \neq 16, \quad (2+5)^2 \neq 25, \quad (3+6)^2 \neq 36, \quad (4+9)^2 \neq 49, \quad (6+4)^2 \neq 64, \quad (8+1)^2 = 81.$$

Stąd dostajemy, że jest tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania i jest nią 81.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe $\overline{ABC}$ dla których $\sqrt[3]{\overline{ABC}} = A+B+C$.

Jak w zadaniu poprzednim, równość z zadania zapisujemy w postaci równoważnej

$$\overline{ABC} = (A+B+C)^3.$$

Teraz sześcian liczby $A+B+C$ ma być liczbą trzycyfrową.

Zachodzi to tylko dla liczb:

$$5^3 = 125, \quad 6^3 = 216, \quad 7^3 = 343, \quad 8^3 = 512, \quad 9^3 = 729.$$

Bezpośrednim sprawdzeniem stwierdzamy, że

$$(1+2+5)^3 \neq 125, \quad (2+1+6)^3 \neq 216, \quad (3+4+3)^3 \neq 343,$$
$$(5+1+2)^3 = 512, \quad (7+2+9)^3 \neq 729.$$

Zatem istnieje jedna taka liczba: 512.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby czterocyfrowe $\overline{ABCD}$ dla których $\sqrt[4]{\overline{ABCD}} = A+B+C+D$.

Jest tylko jedna taka liczba: 2401.

10. Wyznaczyć wszystkie takie czterocyfrowe liczby naturalne $\overline{abcd}$, które spełniają równanie

$$\overline{abcd} = 22 \cdot \overline{ab} + 23 \cdot \overline{cd}.$$

Niech $\overline{abcd}$ będzie poszukiwaną czterocyfrową liczbą naturalną. Liczbę tę możemy zapisać w postaci

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}.$$

Stąd $100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 22\overline{ab} + 23 \cdot \overline{cd}$, albo równoważnie – (1): $39 \cdot \overline{ab} = 11 \cdot \overline{cd}$.

Ponieważ $\overline{cd} \leqslant 99$, więc z (1) dostajemy $39 \cdot \overline{ab} = 11 \cdot \overline{cd} \leqslant 11 \cdot 99 = 1089$,

a stąd $\overline{ab} \leqslant 27$.

Liczby 39 i 11 są względnie pierwsze, więc z (1) otrzymujemy, że liczba $\overline{ab}$ dzieli się przez 11.

Liczbami dwucyfrowymi podzielnymi przez 11 i niewiększymi od 27 są tylko $\overline{ab} = 11$ oraz $\overline{ab} = 22$.

Wtedy powtórnie z (1) mamy $\overline{cd} = \dfrac{39 \cdot 11}{11} = 39$ oraz $\overline{cd} = \dfrac{39 \cdot 22}{11} = 78$,

zatem poszukiwanymi liczbami mogą być tylko $\overline{abcd} = 1139$ oraz $\overline{abcd} = 2278$.

Łatwo sprawdzamy, że

$$22 \cdot 11 + 23 \cdot 39 = 1139 \quad \text{oraz} \quad 22 \cdot 22 + 23 \cdot 78 = 2278.$$

11. Wyznaczyć wszystkie cyfry A, M, T, Y, dla których spełniona jest równość

$$\overline{MAMA}+\overline{TATA}=\overline{MMMMY}.$$

Równość daną w zadaniu możemy zapisać równoważnie

$$1010M+1010T+202A=11110M+Y, \quad \text{czyli} \quad 101(2A+10T-100M)=Y.$$

Stąd $101\Big|Y$, więc $Y=0$.

Zatem

$$2A+10T-100M=0, \quad \text{czyli} \quad A=50M-5T.$$

Wynika stąd, że $5\Big|A$, czyli $A=0$ lub $A=5$.

Jeśli $A=0$, to $T=10M\leqslant 9$, więc $M=0$ i $T=0$, a to nie jest możliwe.

Jeżeli $A=5$, to $T=10M-1\leqslant 9$, czyli $M\leqslant 1$.

Gdy $M=0$, to $T<0$, co nie jest możliwe.

Gdy $M=1$, to $T=9$ i ostatecznie: $A=5$, $M=1$, $T=9$, $Y=0$.

Łatwo sprawdzamy, że

$$1515+9595=11110.$$

12. Wyznaczyć wszystkie różne od zera cyfry: a, b, c spełniające równość $\overline{ccc}(\overline{ccc}+2)=\overline{aaabbb}$.

Niech $x=111$.

Wtedy równość daną w zadaniu możemy zapisać równoważnie $cx(cx+2)=1000ax+bx$.

Stąd po podzieleniu obu stron przez x, mamy $c^2x+2c=1000a+b$, czyli $111c^2=999a+(a+b-2c)$.

Z ostatniej równości wnioskujemy, że $a+b-2c$ dzieli się przez 111.

Ale $-16\leqslant a+b-2c\leqslant 16$, więc $a+b-2c=0$.

Zatem $c^2=9a$, a stąd dostajemy, że $3\big|c$.

Ponieważ cyfry mają być różne od zera, więc $c=3$ lub $c=6$, lub $c=9$.

Jeżeli $c=3$, to $a=1$ i stąd $b=5$.

Jeśli $c=6$, to $a=4$ i $b=8$.

Gdy $c=9$. to $a=9$ oraz $b=9$.

Łatwo sprawdzamy, że

$$333\cdot(333+2)=111\,555,\quad 666\cdot(666+2)=444\,888,\quad 999\cdot(999+2)=999\,999.$$

13. Znaleźć wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne, których dwie pierwsze cyfry są jednakowe, dwie ostatnie cyfry są jednakowe oraz liczby te są kwadratami liczb całkowitych.

Niech szukaną liczbą będzie liczba $\overline{aabb}$, gdzie $a \neq 0$.

Jeśli spełnione są warunki zadania, to istnieje taka liczba całkowita, że

$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = k^2.$$

Wnioskujemy stąd, że $100a + b = 11m^2$ dla liczby całkowitej m oraz $9 < m^2 < 83$, bo liczba $11m^2$ jest liczbą trzycyfrową.

Poniższa tabelka przedstawia możliwe wartości m:

m	4	5	6	7	8	9
m^2	16	25	36	49	64	81
$11m^2$	176	275	396	539	704	891

Łatwo zauważyć, że tylko liczba $11m^2 = 704$ jest postaci $100a + b$.

Wtedy $7744 = 88^2$.

14. Liczba A ma 2022 cyfry i jest podzielna przez 9. Liczba B jest sumą cyfry liczby A, a liczba C jest sumą cyfr liczby B. Jaka jest suma cyfr liczby C?

Zauważmy, że dodatnia liczba całkowita dzieli się przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9.

Skoro liczba A ma 2022 cyfry, to liczba B spełnia nierówność $B \leqslant 2022 \cdot 9 = 18198$.

Jest to również liczba podzielna przez 9.

Zatem liczba C, jako suma cyfr liczby B, spełnia nierówność $C \leqslant 5 \cdot 9 = 45$ i jest liczbą podzielną przez 9.

W zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 44, 45\}$ największą sumę cyfr ma liczba 39.

Zatem suma cyfr liczby C nie przekracza 12 i jest liczbą podzielną przez 9.

Jedyną taką liczbą jest 9.

15. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite, które są 13 razy większe od sumy swoich cyfr.

Niech szukaną liczbą będzie $x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$, gdzie a_0, a_1, a_2, ..., a_n są cyframi. Wówczas warunek dany w treści zadania możemy zapisać jako

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n = 13 \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

albo w postaci równoważnej

$$a_2 \cdot (10^2 - 13) + a_3 \cdot (10^3 - 13) + \dots + a_n \cdot (10^n - 13) = 12 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1. \tag{1}$$

Zauważmy, że $12 \cdot a_0 + 3 \cdot a_1 \leqslant 12 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 135$.

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 3$ cyfra a_k jest różna od zera. Wówczas

$$a_k \cdot (10^k - 13) \geqslant 10^3 - 13 = 987.$$

Wynika stąd, że lewa strona zależności (1) jest większa lub równa 987. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ i równość (1) przybiera postać

$$87a_2 = 12a_0 + 3a_1. \tag{2}$$

Gdyby było $a_2 \geqslant 2$, to z warunku (2) dostalibyśmy

$$174 \leqslant 87a_2 = 12a_0 + 3a_1 \leqslant 135.$$

Wobec tego $a_2 = 0$ lub $a_2 = 1$.

Jeśli $a_2 = 0$, to $a_0 = a_1 = 0$, skąd dostajemy $x = 0$. Liczba ta nie spełnia warunków zadania, bo nie jest dodatnia.

Jeżeli $a_2 = 1$, to równość (2) przybiera postać $12a_0 + 3a_1 = 87$, czyli

$$4a_0 + a_1 = 29. \tag{3}$$

Stąd $a_0 \leqslant 7$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że równanie (3) w zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ma rozwiązania:

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 6 \\ a_1 = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Zatem poszukiwanymi liczbami mogą być: 195, 156, 117. Łatwo sprawdzamy, że liczby te spełniają warunki zadania.

Uwaga. Aby szybko rozwiązać równanie (3), wystarczy zauważyć, że z podzielności przez 4 mamy $a_1 \in \{1, 5, 9\}$.