Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W zawodach I stopnia obecnej 61 edycji Olimpiady Matematycznej wzięło udział 1517 uczniów. Jest to liczba znacznie wyższa niż w roku ubiegłym i bliska wieloletniej średniej. Może więc pojawiające się ostatnio narzekania na obniżające się zainteresowanie uczniów matematyką i na ich niechęć do stawiania czoła intelektualnym wyzwaniom są przesadzone, przynajmniej w odniesieniu do uczniów najbardziej ambitnych i matematycznie uzdolnionych. Może też nie zanika wśród nauczycieli chęć pracy z takimi uczniami. Do drugiego stopnia zakwalifikowano około 520 uczniów, ta liczba może jeszcze ulec zmianie, ponieważ komitety okręgowe mogą rozpatrywać odwołania uczestników.

Wszystkie zadania z I stopnia aktualnej edycji Olimpiady (także z pewnej liczby poprzednich) i ich rozwiązania można znaleźć na stronie internetowej Olimpiady pod adresem: www.om.edu.pl

Niektóre z zadań, jak zwykle, okazały się łatwiejsze (nadesłano więcej poprawnych rozwiązań), inne trudniejsze. W momencie przygotowywania tego tekstu nie były jeszcze zebrane wszystkie wyniki z całego kraju. Z danych częściowych (które jednak statystycznie są bliskie ostatecznych) wynika jednak, że zdecydowanie najtrudniejsze okazało się zadanie 12 (pojedyncze rozwiązania). Nieco łatwiejsze, ale też trudne, było zadanie 11 rozwiązane przez około 0,02% uczestników i zadanie 8, które rozwiązało około 0,1% startujących, średnio trudnymi — zadania 4, 5, 7 i 9, rozwiązane przez około 25% uczestników, a najłatwiejsze okazało się zadanie 2 rozwiązane przez ponad 85% uczestników.

Prawie zawsze uczniowie znajdują wiele innych sposobów rozwiązania zadań olimpijskich, niż te zaproponowane przez organizatorów. Niejednokrotnie są one prostsze, ładniejsze lub ciekawsze od rozwiązań „firmowych”. Niżej przytaczamy fragment rozwiązania zadania 11 nadesłanego przez uczennicę z Białegostoku.

Zadanie 11. *Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości*:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, takie że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

oraz czworokąt $P'Q'R'S'$ jest przystający do czworokąta $PQRS$.

Udowodnimy, że przekątne czworokątów $ABCD$ i $PQRS$ przecinają się pod tym samym kątem. Literami w, x, y, z oznaczmy odległości punktu przecięcia przekątnych od kolejnych wierzchołków, a literą α oznaczmy kąt między odcinkami w i x. Długości kolejnych boków czworokąta to a, b, c i d. Z twierdzenia kosinusów wynika, że $a^2 = w^2 + x^2 - 2wx\cos\alpha$, $b^2 = y^2 + x^2 + 2yx\cos\alpha$, $c^2 = z^2 + y^2 - 2zy\cos\alpha$, $d^2 = w^2 + z^2 + 2wz\cos\alpha$.

Niech P oznacza pole czworokąta. Ze wzoru na pole trójkąta mamy

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}[(xy + wz)\sin\alpha + (xw + yz)\sin\alpha] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2+y^2-b^2}{-2\cos\alpha} + \frac{w^2+z^2-d^2}{-2\cos\alpha}\right)\sin\alpha + \left(\frac{x^2+w^2-a^2}{2\cos\alpha} + \frac{y^2+z^2-c^2}{2\cos\alpha}\right)\sin\alpha\right] = \\ &= -\frac{1}{4}(w^2+x^2+y^2+z^2-b^2-d^2)\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{4}(w^2+x^2+y^2+z^2-a^2-c^2)\operatorname{tg}\alpha = \\ &= \frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\operatorname{tg}\alpha.\end{aligned}$$

Z tej równości oraz z równości odpowiednich boków czworokątów $ABCD$ i $PQRS$, a także ich pól, otrzymujemy wniosek, że tangensy kątów między przekątnymi obydwóch czworokątów są równe, więc same kąty też są równe.

Można też zadać pytanie, czy założenie równości pól w tym zadaniu jest rzeczywiście potrzebne. Z pracy jednego z uczniów z Warszawy wynika, że w zasadzie nie, tzn. udowodnił on tezę bez tego założenia, nie rozpatrując kilku bardzo szczególnych przypadków. Zachęcamy Czytelników do przemyślenia zarówno tej kwestii, jak i do dokończenia rozwiązania.