# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

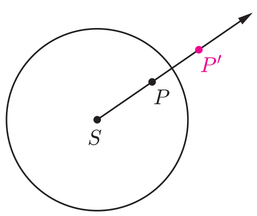
`www.sem.edu.pl`

W dniach 4–6 listopada 2011 roku w hotelu Ameliówka koło Kielc odbyła się konferencja organizowana przez SEM wspólnie z Wydziałami Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej i Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Było to już czwarte spotkanie naukowe zorganizowane w podobnej formie przez nasze Stowarzyszenie. Konferencja ta, podobnie jak poprzednie: *Konkursy matematyczne w Polsce*, *Matematyka – jak uczyć?* oraz *Gdzie jest matematyka?*, stworzyła okazję do spotkania wielu osób zainteresowanych rozbudzaniem matematycznych zdolności młodzieży.

Do Ameliówki przyjechało prawie 140 matematyków z całej Polski na co dzień zajmujących się szeroko rozumianą edukacją matematyczną. Zgodnie z tradycją uczestnikami konferencji byli zarówno nauczyciele matematyki w szkołach różnych typów, jak i pracownicy naukowi wyższych uczelni.

W trakcie konferencji odbywającej się pod hasłem *Gdzie jest nauczyciel?* zastanawiano się przede wszystkim nad rolą nauczyciela w kształceniu matematycznym. Próbowano odpowiedzieć na pytanie, jaką wartość wnosi nauczyciel do wykształcenia młodych ludzi. Doświadczeni nauczyciele matematyki, pracujący w specjalnych klasach matematycznych, dzielili się swoimi spostrzeżeniami i metodami pracy, pokazując *Gdzie jest nauczyciel w klasie uczniów zdolnych?* Dyskutowano również o podręcznikach matematyki oraz o sposobach i potrzebie uczenia matematyki humanistów. Przedstawiono także wiele interesujących zagadnień matematycznych, które można wykorzystać na zajęciach pozalekcyjnych w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych. Konferencja była też okazją prezentacji nowej formy organizacji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Więcej informacji o konferencji można znaleźć na stronie internetowej `sem.edu.pl/konferencja-2011`.

Inwersja względem okręgu o środku $S$ i promieniu $r$ to przekształcenie, które każdemu punktowi $P$ płaszczyzny poza $S$ przyporządkowuje taki punkt $P'$ półprostej $SP^{\rightarrow}$, że $SP \cdot SP' = r^2$.



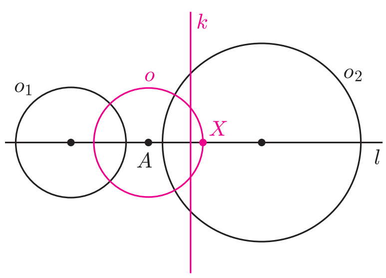

Inwersja ma, między innymi, takie własności:

- zachowuje kąty między krzywymi;
- okręgi nieprzechodzące przez $S$ przekształca na okręgi;
- okręgi przechodzące przez $S$ przekształca na proste nieprzechodzące przez $S$ i odwrotnie;
- proste przechodzące przez $S$ przekształca na te same proste.

Jednym z wielu bardzo ciekawych odczytów matematycznych było wystąpienie Wojciecha Martysa o inwersji względem okręgu. Chcielibyśmy zwrócić uwagę naszych Czytelników na pewną ładną własność inwersji przedstawioną wraz z dowodem podczas tego referatu.

**Własność.** *Niech $o_1$ i $o_2$ będą rozłącznymi okręgami leżącymi na danej płaszczyźnie. Wtedy istnieje inwersja tej płaszczyzny przekształcająca okręgi $o_1$ i $o_2$ na okręgi koncentryczne.*

**Dowód.** Możemy założyć, że okręgi $o_1$ i $o_2$ nie są koncentryczne. Oznaczmy przez $l$ prostą przechodzącą przez środki $o_1$ i $o_2$. Na prostej $l$ znajdujemy punkt $A$, z którego długości odcinków stycznych, poprowadzonych do $o_1$ i $o_2$, są jednakowe. Oznaczmy przez $r$ długość odcinka stycznego poprowadzonego z $A$ do $o_1$. Zauważamy, że okrąg $o$ o środku w punkcie $A$ i promieniu $r$ jest prostopadły do $o_1$ i do $o_2$. Oznaczmy przez $X$ jeden z punktów przecięcia $o$ z $l$. Wtedy inwersja o środku w punkcie $X$ przekształca prostą $l$ w siebie, co oznacza, że środki obrazów $o_1'$ i $o_2'$ okręgów $o_1$ i $o_2$ w tej inwersji leżą na $l$. Ponadto inwersja o środku w punkcie $X$ przekształca $o$ na prostą $k$ (bo $X \in o$) prostopadłą do $l$ (inwersja zachowuje kąty). Więc $o_1'$ i $o_2'$ są okręgami prostopadłymi do $k$, co oznacza, że ich środki leżą na $k$. Podsumowując: środki $o_1'$ i $o_2'$ leżą na $k$ i na $l$, a więc $o_1'$ i $o_2'$ muszą być koncentryczne.




Proponujemy Czytelnikom wykorzystanie udowodnionej własności w analizie następujących zadań.

**Zadanie 1.** *Dane są dwa okręgi $o_1$ i $o_2$. Znajdź inwersję przekształcającą $o_1$ na $o_2$.*

**Zadanie 2.** *Dany jest okrąg $o$ i dwa rozłączne okręgi $o_1$ i $o_2$. Narysuj okrąg styczny do $o$ i prostopadły do okręgów $o_1$ i $o_2$.*

**Zadanie 3.** *Niech $o_1$ i $o_2$ będą rozłącznymi okręgami, takimi że $o_1$ leży we wnętrzu $o_2$. Rysujemy okrąg $k_1$ styczny zewnętrznie do $o_1$ i wewnętrznie do $o_2$. Następnie rysujemy okrąg $k_2$ styczny zewnętrznie do $o_1$ i $k_1$ oraz wewnętrznie do $o_2$ itd. Jeżeli po skończonej liczbie kroków ostatni okrąg będzie styczny zewnętrznie do $k_1$, to mówimy, że okręgi $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tworzą łańcuch Steinera okręgów $o_1$ i $o_2$. Wykaż, że jeżeli istnieje łańcuch Steinera okręgów $o_1$ i $o_2$, to jest to niezależne od położenia pierwszego okręgu $k_1$.*

*Barbara ROSZKOWSKA-LECH, Krzysztof CHEŁMIŃSKI*