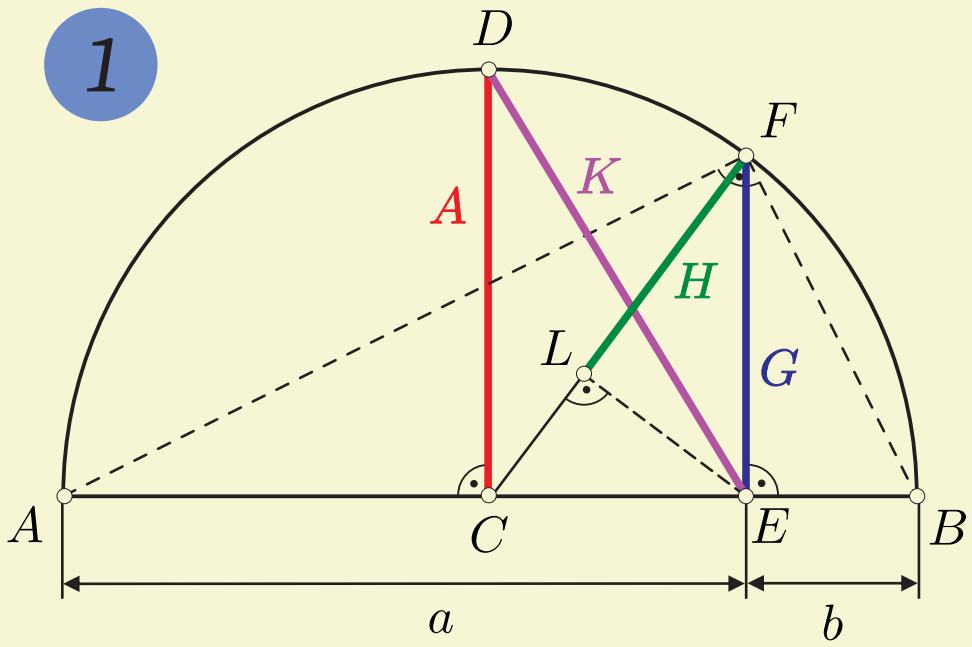
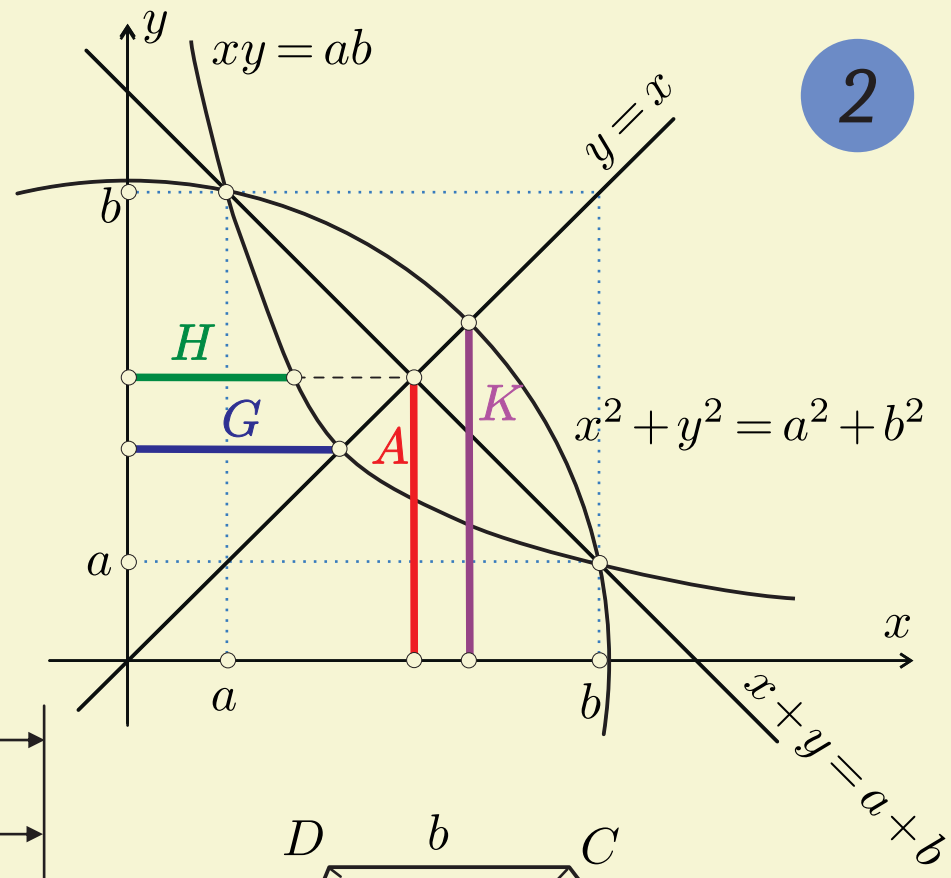
Nierówności między średnimi liczbowymi

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

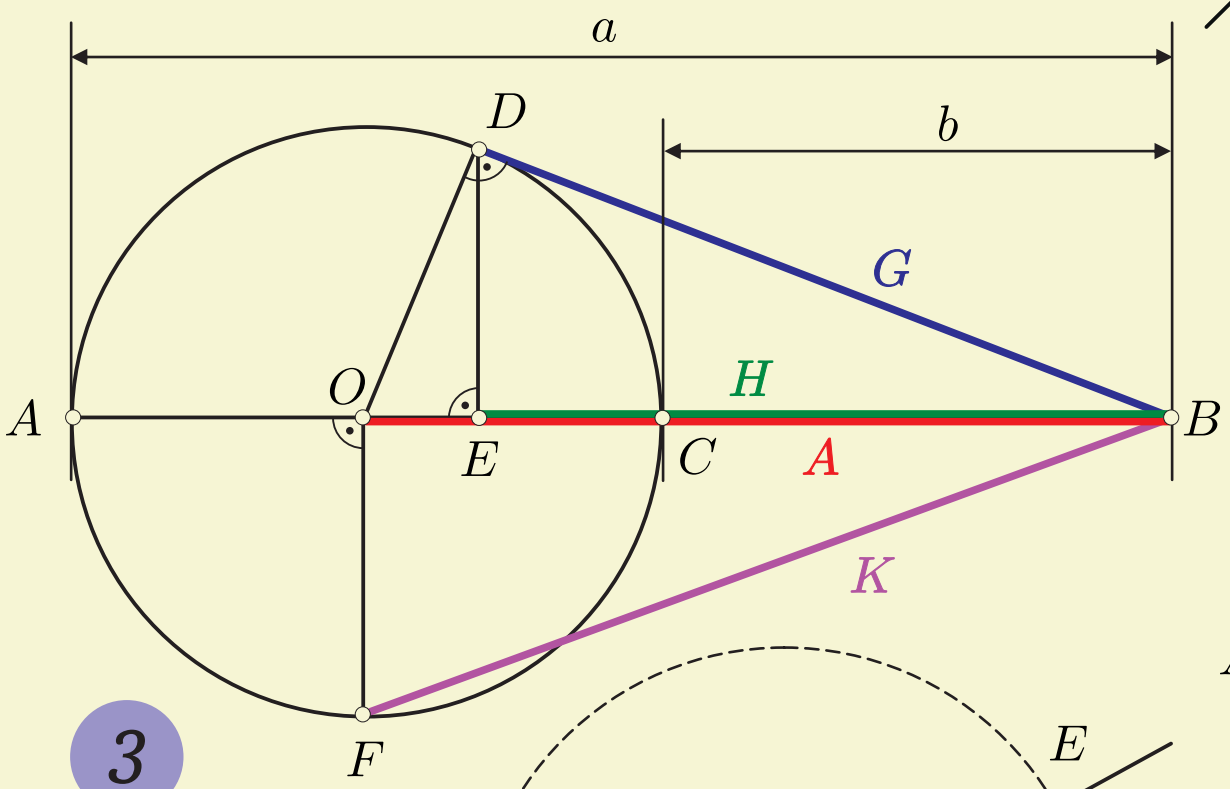
1



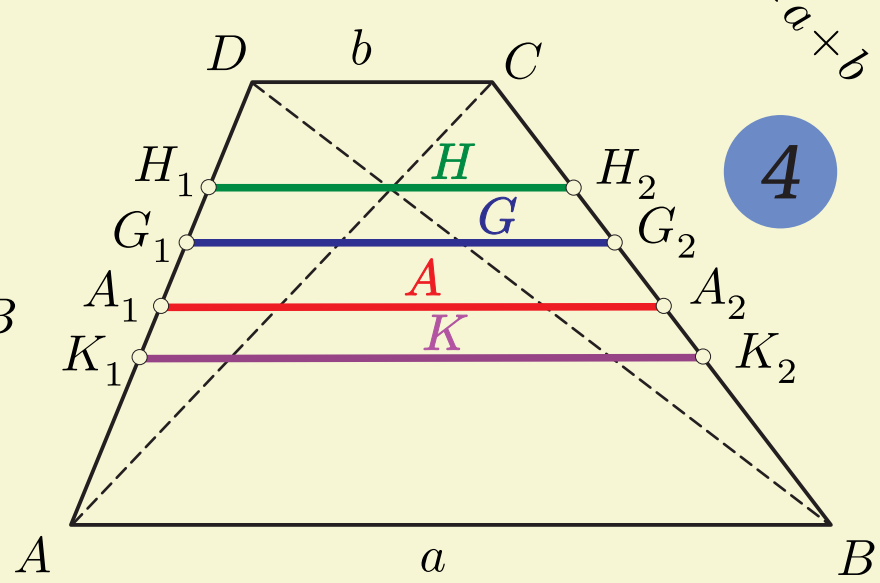
2



3



4

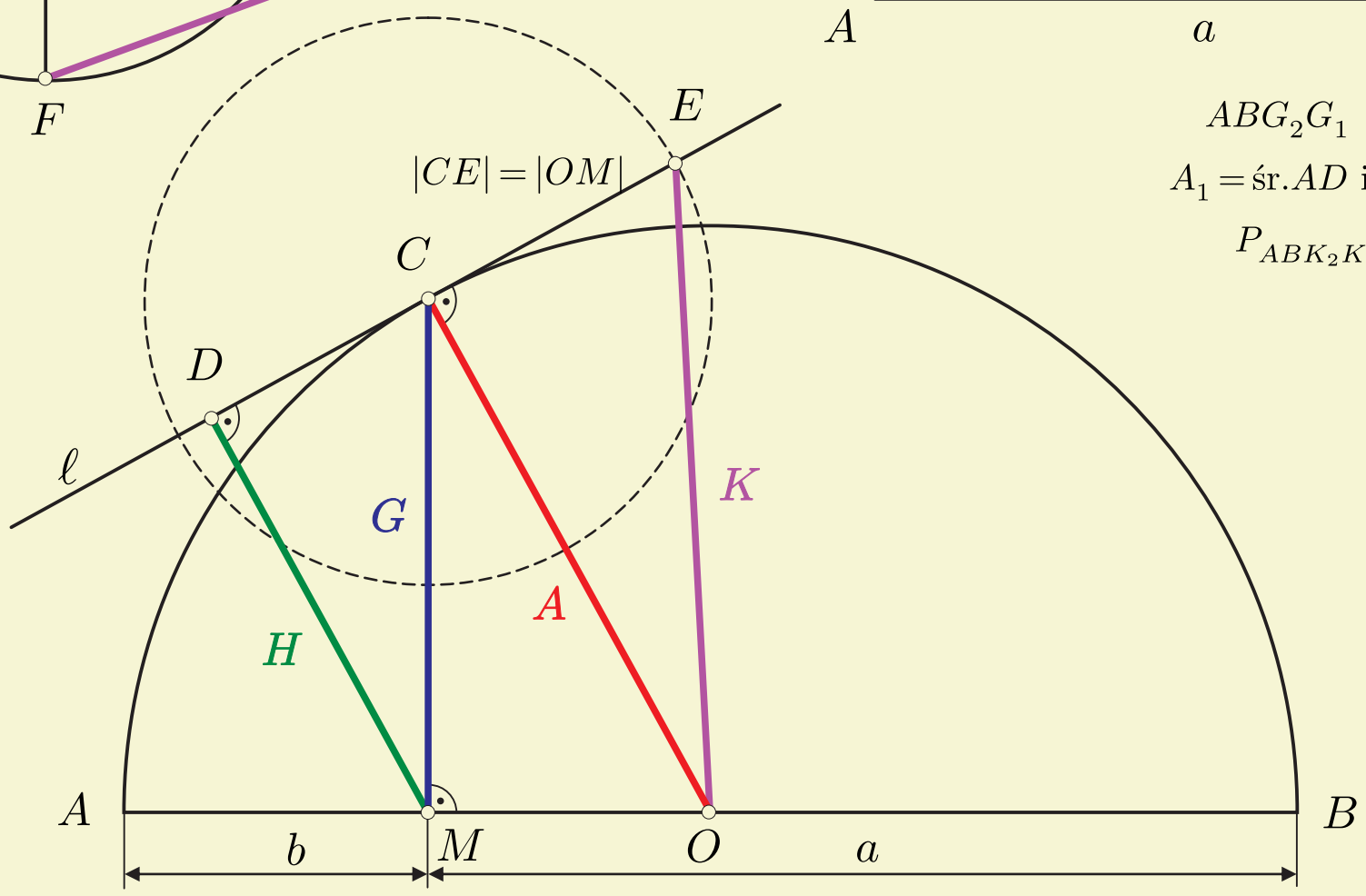


$ABG_2G_1 \sim G_1G_2CD$

$A_1 = \text{śr.}AD$ i $A_2 = \text{śr.}BC$

$P_{ABK_2K_1} = P_{A_1A_2CD}$

5

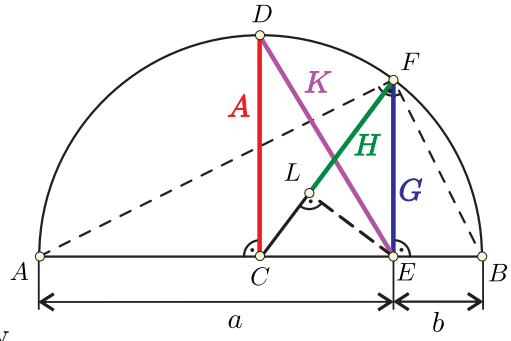


$$H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \bullet \quad G = \sqrt{ab} \quad \bullet \quad A = \frac{a+b}{2} \quad \bullet \quad K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Nierówności między średnimi liczbowymi

Renata Jurasińska, Tomasz Szymczyk

Rysunek 1.



Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz niech $a>b$. Rysujemy półokrąg o środku w punkcie C i średnicy $|AB|=a+b$. Punkt E leży na odcinku AB i $|AE|=a$. Wtedy $|CD|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{a+b}{2}$. Z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego wynika, że $|EF|=\sqrt{ab}$. Zauważmy, że $|CE|=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$.
Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta CDE, otrzymujemy

$$|DE|^2=|CD|^2+|CE|^2, \quad \text{czyli} \quad |DE|^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

więc $|DE|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Zauważmy teraz, że trójkąty EFL i CEF są podobne. Zatem

$$\frac{|FL|}{|EF|}=\frac{|EF|}{|CF|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{|FL|}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}.$$

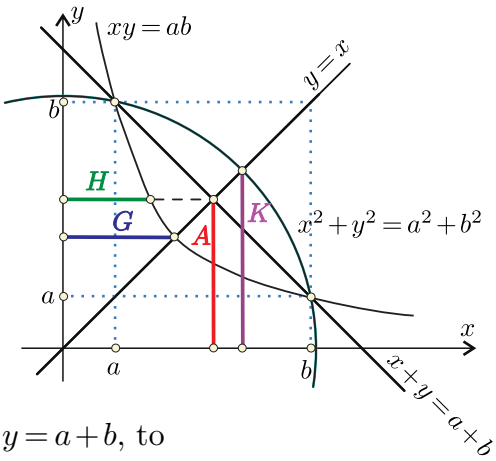
Stąd uzyskujemy

$$|FL|=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Ponieważ

$$|DE|>|CD|=|CF|>|EF|>|FL|, \quad \text{więc} \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Rysunek 2.



Niech a i b $(a<b)$ będą liczbami dodatnimi. Zaznaczamy je na osiach układu współrzędnych (jak na rysunku). W tym samym układzie współrzędnych rysujemy krzywe o równaniach:

$$y=x, \quad x+y=a+b, \quad xy=ab, \quad x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Niech punkt (x_K,y_K) będzie punktem wspólnym okręgu $x^2+y^2=a^2+b^2$ i prostej $y=x$. Wtedy

$$x_K^2+x_K^2=a^2+b^2, \quad \text{skąd} \quad x_K=y_K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Jeśli punkt (x_A,y_A) jest punktem przecięcia prostych $y=x$ i $x+y=a+b$, to

$$x_A+x_A=a+b, \quad \text{czyli} \quad x_A=y_A=\frac{a+b}{2}.$$

Niech teraz punkt (x_G,y_G) będzie punktem wspólnym prostej $y=x$ i hiperboli $xy=ab$. Zatem $x_G\cdot x_G=ab$, skąd $x_G=\sqrt{ab}$.

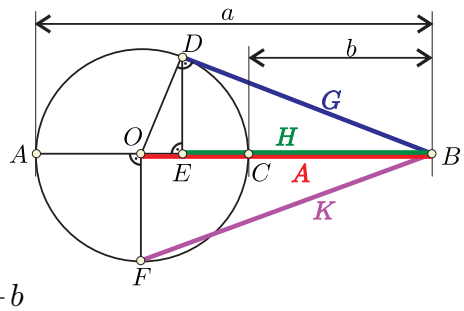
Jeżeli punkt (x_H, y_H) jest takim punktem hiperboli $xy = ab$, że $y_H = y_A = \frac{a+b}{2}$, to

$$x_H \cdot \frac{a+b}{2} = ab, \quad \text{skąd} \quad x_H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Ponieważ $x_K = y_K > y_A = x_A > x_G > x_H$, więc dostajemy, że

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Rysunek 3.



Niech a, b $(a > b)$ będą liczbami dodatnimi. Na odcinku AB o długości $|AB| = a$ obieramy taki punkt C, że $|BC| = b$ (jak na rysunku).
Okrąg o średnicy AC i środku O jest styczny do prostej przechodzącej przez punkt B w punkcie D. Wówczas

$$|OA| = |OC| = |OD| = \frac{a-b}{2}$$

oraz

$$|OB| = |OC| + |BC| = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}.$$

Niech ponadto punkt E będzie rzutem prostokątnym punktu D na odcinek AB, a punkt F – wspólnym punktem okręgu i prostej przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do odcinka AB.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa, zastosowanego do trójkąta OBD, otrzymujemy

$$|BD|^2 = |OB|^2 - |OD|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab,$$

a stąd $|BD| = \sqrt{ab}$.

Zauważmy, że trójkąty prostokątne OBD i BDE są podobne, więc stąd mamy

$$\frac{|OB|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|BE|}, \quad \text{czyli} \quad |BE| = \frac{|BD|^2}{|OB|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Z kolei z trójkąta prostokątnego BOF mamy

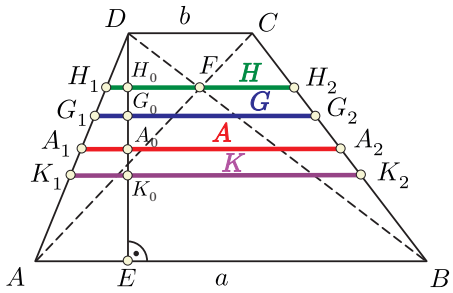
$$|BF|^2 = |OF|^2 + |OB|^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

czyli $|BF| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Ponieważ w trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, więc z trójkątów: BDE, OBD, BOF mamy

$$|BF| > |OB| > |BD| > |BE|, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Rysunek 4.



Niech w trapezie $ABCD$, o podstawach AB i CD, będzie spełniony warunek $|AB|>|CD|$. Na jego nierównoległych bokach AD i BC wybieramy odpowiednio takie punkty H_1, G_1, A_1, K_1 i H_2, G_2, A_2, K_2, że odcinki H_1H_2, G_1G_2, A_1A_2 i K_1K_2 są równoległe do podstaw trapezu oraz:

- Odcinek H_1H_2 przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych AC i BD trapezu,
- trapezy ABG_2G_1 i G_1G_2CD są podobne,
- punkty A_1, A_2 są środkami boków odpowiednio AD i BC,
- trapezy ABK_2K_1 i K_1K_2CD mają równe pola.

Na początku wykażemy, że odcinki te są położone tak, jak na rysunku. Niech odcinek DE będzie wysokością tego trapezu, która odcinki: H_1H_2, G_1G_2, A_1A_2, K_1K_2 przecina w punktach odpowiednio: H_0, G_0, A_0, K_0. Ponieważ punkty A_1 i A_2 są środkami ramion odpowiednio AD i BC trapezu, więc punkt A_0 jest środkiem jego wysokości DE.

Pola trapezów ABK_2K_1 i K_1K_2CD są równe, więc

$$\frac{|AB|+|K_1K_2|}{2}\cdot|K_0E|=\frac{|K_1K_2|+|CD|}{2}\cdot|K_0D|,$$

czyli

$$(|AB|+|K_1K_2|)\cdot|K_0E|=(|K_1K_2|+|CD|)\cdot|K_0D|.$$

Ponieważ $|AB|>|CD|$, więc musi być $|K_0E|<|K_0D|$, a stąd $|K_0E|<|A_0E|$, czyli $|K_1K_2|>|A_1A_2|$.

Skoro trapezy ABG_2G_1 i G_1G_2CD są podobne, to $\dfrac{|G_0D|}{|G_0E|}=\dfrac{|G_1G_2|}{|AB|}<1$. Zatem $|G_0D|<|G_0E|$, skąd wynika, że $|G_0D|<|A_0D|$, czyli $|G_1G_2|<|A_1A_2|$.

Z podobieństwa tych trapezów wynika też, że $\dfrac{|G_1G_2|}{|AB|}=\dfrac{|CD|}{|G_1G_2|}$, skąd dostajemy $|G_1G_2|=\sqrt{ab}$.

Ponadto

$$\frac{|DG_0|}{|G_0E|}=\frac{|G_1G_2|}{|AB|}=\frac{\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}<1.$$

Natomiast z podobieństwa trójkątów CDF i ABF wnioskujemy, że $\dfrac{|DH_0|}{|H_0E|}=\dfrac{b}{a}<1$.

Dla liczb x z przedziału $(0;1)$ mamy $x<\sqrt{x}<1$, więc $\dfrac{|DH_0|}{|H_0E|}<\dfrac{|DG_0|}{|G_0E|}$.

Gdyby było $|DH_0|\geqslant|DG_0|$, to mielibyśmy $|H_0E|\leqslant|G_0E|$, a stąd

$$\frac{|DH_0|}{|H_0E|}\geqslant\frac{|DG_0|}{|H_0E|}\geqslant\frac{|DG_0|}{|G_0E|},\quad\text{czyli}\quad\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{\frac{b}{a}},$$

a to jest sprzeczne dla liczb z przedziału $(0;1)$, więc $|DH_0|<|DG_0|$. Z otrzymanej nierówności dostajemy $|H_1H_2|<|G_1G_2|$.

Tym samym udowodniliśmy, że $|K_1K_2|>|A_1A_2|>|G_1G_2|>|H_1H_2|$.

Wyznaczymy teraz długości tych odcinków w zależności od długości a i b podstaw trapezu.

Przyjmijmy dodatkowe oznaczenia: $S=P_{ABCD}$, $|K_1K_2|=x$, $|K_0E|=h_a$, $|K_0D|=h_b$. Ponieważ trapezy ABK_2K_1 i K_1K_2CD mają równe pola, więc

$$\frac{S}{2}=\frac{a+x}{2}\cdot h_a\quad\text{i}\quad\frac{S}{2}=\frac{b+x}{2}\cdot h_b.$$

Stąd

$$S=\frac{a+b}{2}(h_a+h_b)=\frac{a+b}{2}\left(\frac{S}{a+x}+\frac{S}{b+x}\right)=S\cdot\frac{(a+b)^2+2x(a+b)}{2ab+2x^2+2x(a+b)}.$$

Zatem $2ab+2x^2=(a+b)^2$, skąd po prostych przekształceniach dostajemy $x=|K_1K_2|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Aby wyznaczyć długość odcinka A_1A_2 zauważmy, że wysokości trapezów ABA_2A_1 i A_1A_2CD są równe i przyjmijmy oznaczenia $|DA_0|=h$ i $|EA_0|=h$. Zatem

$$S=\frac{(a+b)\cdot 2h}{2}=\frac{(a+|A_1A_2|)\cdot h}{2}+\frac{(b+|A_1A_2|)\cdot h}{2},$$

a stąd

$$a+b=\frac{a+|A_1A_2|}{2}+\frac{b+|A_1A_2|}{2},\quad \text{czyli}\quad 2(a+b)=a+b+2|A_1A_2|$$

i ostatecznie $|A_1A_2|=\frac{a+b}{2}$.

Wcześniej wyznaczyliśmy $|G_1G_2|=\sqrt{ab}$.

Aby wyznaczyć długość odcinka H_1H_2 skorzystamy z podobieństwa odpowiednich par trójkątów. Ponieważ trójkąty DH_1F i DAB są podobne, więc

$$\frac{|H_1F|}{|DH_0|}=\frac{a}{|DE|},\quad \text{skąd}\quad |H_1F|=a\cdot\frac{|DH_0|}{|DE|}.$$

Z kolei z podobieństwa trójkątów CDF i ABF mamy

$$\frac{b}{|DH_0|}=\frac{a}{|DE|-|DH_0|},\quad \text{a stąd}\quad \frac{|DH_0|}{|DE|}=\frac{b}{a+b}.$$

Zatem

$$|H_1F|=a\cdot\frac{|DH_0|}{|DE|}=\frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że $|H_2F|=\frac{ab}{a+b}$. Ostatecznie $|H_1H_2|=|H_1F|+|H_2F|=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Ponieważ $|K_1K_2|>|A_1A_2|>|G_1G_2|>|H_1H_2|$, więc $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

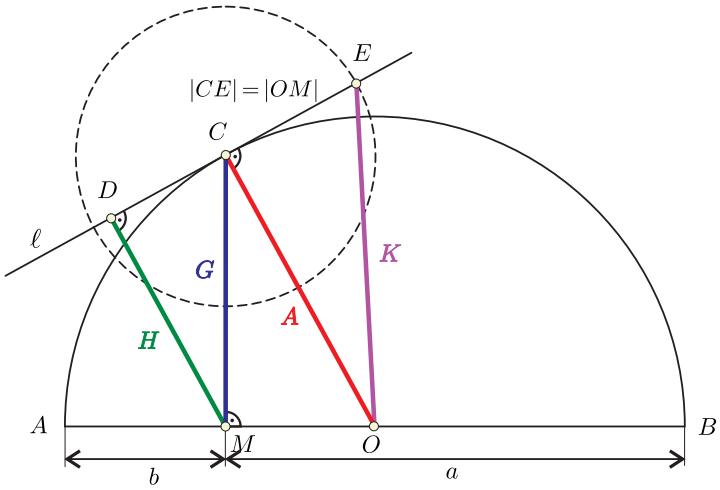
Rysunek 5.

Niech a i b $(a>b)$ będą liczbami dodatnimi, a odcinek AB o długości $|AB|=a+b$ będzie średnicą półokręgu o środku O. Na odcinku AB wybieramy taki punkt M, że $|AM|=b$. Punkt C jest punktem wspólnym półokręgu i prostej prostopadłej do odcinka AB i przechodzącej przez punkt M. Zatem

$$|OC|=|OA|=\frac{a+b}{2}.$$

Zauważmy, że

$$|OM|=|OA|-|AM|=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}.$$



Z trójkąta prostokątnego OMC mamy $|OC|^2=|OM|^2+|CM|^2$, więc

$$|CM|^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad \text{skąd} \quad |CM|^2=ab, \quad \text{czyli} \quad |CM|=\sqrt{ab}.$$

Prosta ℓ jest styczną do wykreślonego półokręgu w punkcie C, który jest środkiem okręgu o promieniu długości $|CE|=|OM|=\frac{a-b}{2}$. Trójkąt OCE jest prostokątny. Stosując do niego twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$|OE|^2=|OC|^2+|CE|^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}, \quad \text{czyli} \quad |OE|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Niech D będzie rzutem prostokątnym punktu M na prostą ℓ. Zauważmy, że trójkąty CDM i OMC są podobne, więc

$$\frac{|DM|}{|CM|}=\frac{|CM|}{|OC|}, \quad \text{skąd} \quad \frac{|DM|}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}, \quad \text{czyli} \quad |DM|=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Ponieważ $|OE|>|OC|>|CM|>|DM|$, więc

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Zauważmy, że z równości

$$\frac{|DM|}{|CM|}=\frac{|CM|}{|OC|}$$

wynika równość $|CM|^2=|DM|\cdot|OC|$, czyli $|CM|=\sqrt{|DM|\cdot|OC|}$. Skoro

$$|CM|=\sqrt{ab}, \quad |DM|=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \quad |OC|=\frac{a+b}{2},$$

więc

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\frac{a+b}{2}}.$$