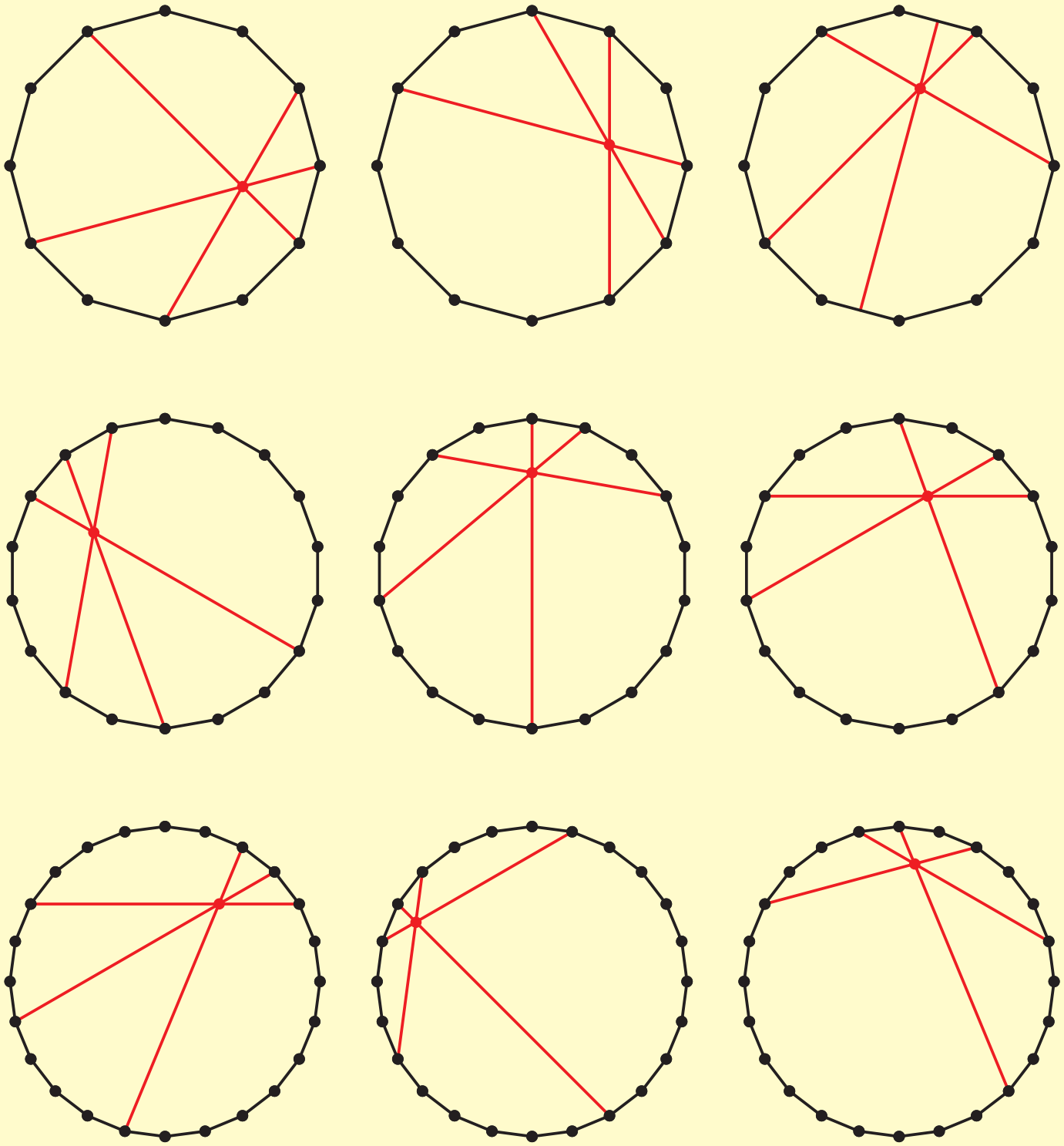
Przekątne wielokątów foremnych



STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Opracowanie i druk plakatu współfinansowane przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

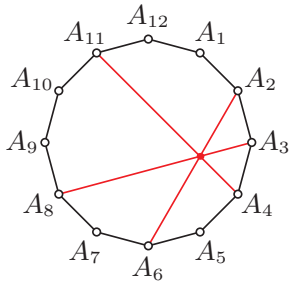
Przekątne wielokątów foremnych

Waldemar Pompe

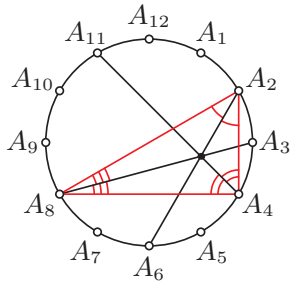
Przyglądając się wielokątom foremnym o liczbie boków podzielnej przez 6, zauważamy wiele *nietrywialnych* konfiguracji złożonych z trójek przekątnych, które przecinają się w jednym punkcie. Uniwersalna metoda dowodzenia tych faktów opiera się na trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy. Poniżej zaprezentujemy, jak w geometryczny, elementarny sposób uzyskać przedstawione na odwrocie własności.

Przykład 1.

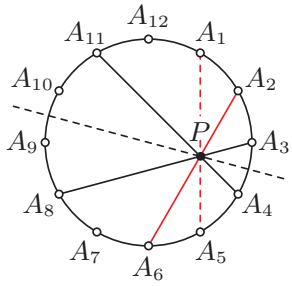
Niech $A_1A_2...A_{12}$ będzie 12-kątem foremnym. Wówczas przekątne A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie (rys. 1).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Rozpatrzmy okrąg opisany na danym wielokącie i weźmy pod uwagę trójkąt $A_2A_4A_8$ (rys. 2). Ponieważ krótsze łuki A_2A_3 i A_3A_4 danego okręgu są równej długości, więc $\sphericalangle A_2A_8A_3 = \sphericalangle A_4A_8A_3$. Przekątna A_3A_8 jest więc zawarta w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A_8 trójkąta $A_2A_4A_8$.

Analogicznie, przekątne A_2A_6 i A_4A_{11} są zawarte odpowiednio w dwusiecznych kątów przy wierzchołkach A_2 i A_4 tego trójkąta. Wobec tego proste A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie, co kończy dowód.

Uwaga

Ponieważ cięciwy A_3A_8 i A_4A_{11} są równej długości, więc punkt ich przecięcia P leży na symetralnej odcinka A_3A_4 (rys. 3). Wykazaliśmy, że punkt P leży także na odcinku A_2A_6. Odbijając symetrycznie prostą A_2A_6 względem symetralnej odcinka A_3A_4, otrzymujemy prostą A_1A_5, która zawiera punkt P. W szczególności okazuje się, że przekątne A_1A_5, A_2A_6 oraz A_4A_{11} przechodzą przez wspólny punkt. Również przekątne A_4A_{11}, A_2A_6 i symetralna odcinka A_3A_4 przecinają się w jednym punkcie.

Definicja

Załóżmy, że pewnych sześć punktów leżących na okręgu dzieli ten okrąg na sześć łuków, których długości wynoszą kolejno a, b, c, d, e, f (rys. 4). Jeśli główne przekątne sześciokąta o wierzchołkach w tych punktach przecinają się w jednym punkcie, to powiemy, że *szóstka liczb (a,b,c,d,e,f) wyznacza współpękowe cięciwy.*

Twierdzenie 1.

Załóżmy, że szóstka liczb (a,b,c,d,e,f) wyznacza współpękowe cięciwy, przy czym $a+d=c+f$ oraz $c<d$ (rys. 5). Wówczas szóstka liczb (t,u,w,x,y,z), gdzie

$$t=a,\quad u=b,\quad w=2c,\quad x=d-c,\quad y=\frac{e-b}{2},\quad z=\frac{e+b}{2}+f \tag{1}$$

także wyznacza współpękowe cięciwy (rys. 6). W szczególności, $e>b$.

Zauważmy, że skoro $a+d=c+f$, to opisana wzorami (1) szóstka (t,u,w,x,y,z) spełnia zależność $t+u+x+y=z$. Ponadto, wyznaczając wielkości a, b, c, d, e, f ze związków (1), otrzymujemy poniższe równości (2). Odwróceniem twierdzenia 1 jest zatem następujące

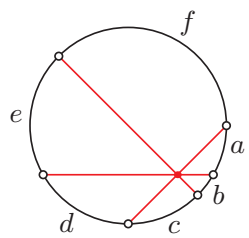
Twierdzenie 2.

Załóżmy, że szóstka (t,u,w,x,y,z) wyznacza współpękowe cięciwy, przy czym $t+u+x+y=z$ (rys. 6). Wówczas szóstka (a,b,c,d,e,f), gdzie

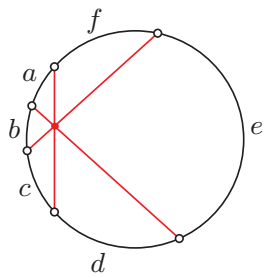
$$a=t,\quad b=u,\quad c=\frac{w}{2},\quad d=\frac{w}{2}+x,\quad e=2y+u,\quad f=t+x \tag{2}$$

także wyznacza współpękowe cięciwy (rys. 5).

Dowód twierdzenia 2 polega na prostym odwróceniu rozumowania z dowodu twierdzenia 1. W związku z tym wykażemy jedynie twierdzenie 1.

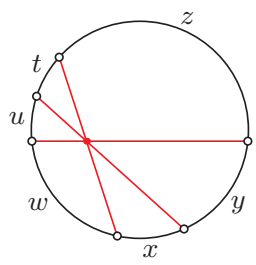


rys. 4



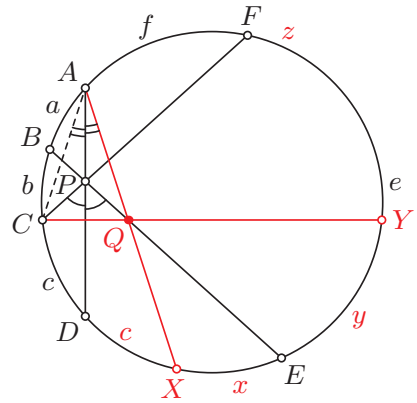
$a+d=c+f$

rys. 5



$z=x+y+t+u$

rys. 6



rys. 7

Dowód twierdzenia 1.

Gdy K i L są punktami leżącymi na pewnym okręgu, to pisząc *łuk* KL będziemy mieli na myśli tę część okręgu, którą otrzymamy poruszając się od punktu K do punktu L w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Oznaczmy punkty wyznaczające dane łuki kolejno przez A, B, C, D, E, F, jak na rysunku 7. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia cięciw AD, BE i CF.

Na łuku DE obierzmy taki punkt X, aby długość łuku DX była równa c. Następnie oznaczmy przez Q punkt przecięcia odcinków BE i AX. Wreszcie przyjmijmy, że prosta CQ przecina łuk EF w punkcie Y.

Długości łuków AB, BC, CX i XE wynoszą odpowiednio $t=a$, $u=b$, $w=2c$, $x=d-c$. Ponadto punkt Q jest punktem wspólnym cięciw AX, BE i CY. Dowód twierdzenia będzie więc zakończony, jeśli wykażemy, że długości y i z odpowiednio łuków EY i YA wynoszą kolejno $\frac{1}{2}(e-b)$ oraz $\frac{1}{2}(e+b)+f$.

Długości łuków CD i DX są równe, a zatem $\sphericalangle PAC=\sphericalangle PAQ$. Z kolei z równości $a+d=c+f$ uzyskujemy $\sphericalangle CPD=\sphericalangle QPD$. Wobec tego trójkąty APC i APQ są przystające (cecha kąt–bok–kąt), więc punkty C i Q są symetryczne względem prostej AD. Stąd otrzymujemy $\sphericalangle PCQ=\sphericalangle PQC$. Równość ta pociąga za sobą $z-f=y+b$.

Ponadto oczywiście $y+z=e+f$. Rozwiązując układ złożony z dwóch ostatnich równań (z niewiadomymi y i z), otrzymujemy $y=\frac{1}{2}(e-b)$ oraz $z=\frac{1}{2}(e+b)+f$. W szczególności, skoro $y>0$, więc $e>b$. Dowód twierdzenia jest zakończony.

Zauważmy, że jeśli szóstka (a,b,c,d,e,f) spełnia założenia twierdzenia 1, to także szóstka (c,b,a,f,e,d) spełnia założenia tego twierdzenia. Wobec tego mając daną konfigurację współpękowych cięciw, która spełnia założenia twierdzenia 1, możemy twierdzenie to stosować na 2 sposoby. Ta sama uwaga ma miejsce w przypadku twierdzenia 2: jeśli szóstka (t,u,w,x,y,z) spełnia założenia tego twierdzenia, to także szóstka (y,x,w,u,t,z) je spełnia.

Przykład 2.

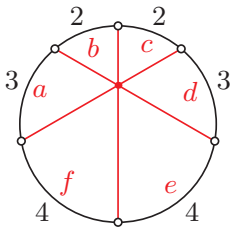
Na okręgu o długości 18 odłóżmy kolejno łuki o długościach 3, 2, 2, 3, 4, 4 (rys. 8). Wówczas szóstka $(3,2,2,3,4,4)$ wyznacza *trywialną* konfigurację współpękowych cięciw: jedna z cięciw jest średnicą okręgu, a dwie pozostałe są położone symetrycznie względem tej średnicy. Ponadto $2+4=3+3$, a więc twierdzenie 1 możemy zastosować dla każdej z dwóch szóstek (rys. 8, 10):

$$(a,b,c,d,e,f)=(3,2,2,3,4,4)\,,\quad (a,b,c,d,e,f)=(2,2,3,4,4,3)\,.$$

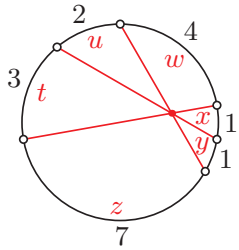
Otrzymujemy wówczas odpowiednio następujące szóstki, które w myśl twierdzenia 1 wyznaczają współpękowe cięciwy (rys. 9, 11):

$$(t,u,w,x,y,z)=(3,2,4,1,1,7)\,,\quad (t,u,w,x,y,z)=(2,2,6,1,1,6)\,.$$

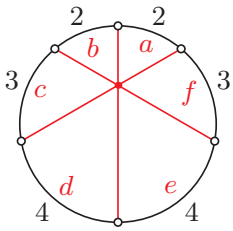
Pierwsza z tych konfiguracji daje ciekawy, nietrywialny wynik; druga jest znów konfiguracją trywialną (dwie cięciwy symetryczne względem średnicy).



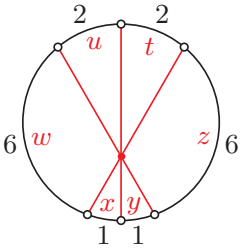
rys. 8



rys. 9



rys. 10



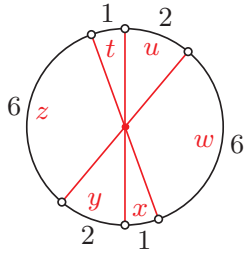
rys. 11

Przykład 3.

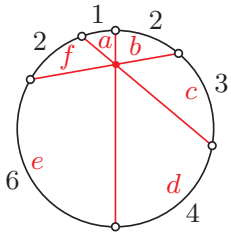
Na okręgu o długości 18 odłóżmy łuki, których długości wynoszą kolejno 1, 2, 6, 1, 2, 6 (rys. 12). Wówczas szóstka $(1,2,6,1,2,6)$ wyznacza współpękowe cięciwy: każda z cięciw jest średnicą okręgu. Ponadto $1+2+2+1=6$, więc możemy stosować twierdzenie 2 zarówno dla szóstki $(t,u,w,x,y,z)=(1,2,6,1,2,6)$ (rys. 12), jak i dla szóstki $(t,u,w,x,y,z)=(2,1,6,2,1,6)$ (rys. 14). W efekcie uzyskujemy następujące szóstki wyznaczające, w myśl twierdzenia 2, współpękowe cięciwy (rys. 13, 15):

$$(a,b,c,d,e,f)=(1,2,3,4,6,2)\,,\quad (a,b,c,d,e,f)=(2,1,3,5,3,4)\,.$$

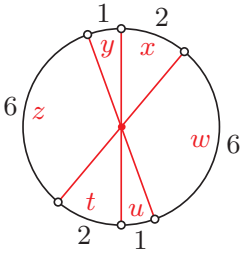
Dostaliśmy tym razem dwie nietrywialne konfiguracje.



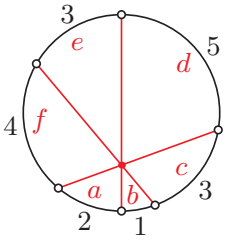
rys. 12



rys. 13



rys. 14



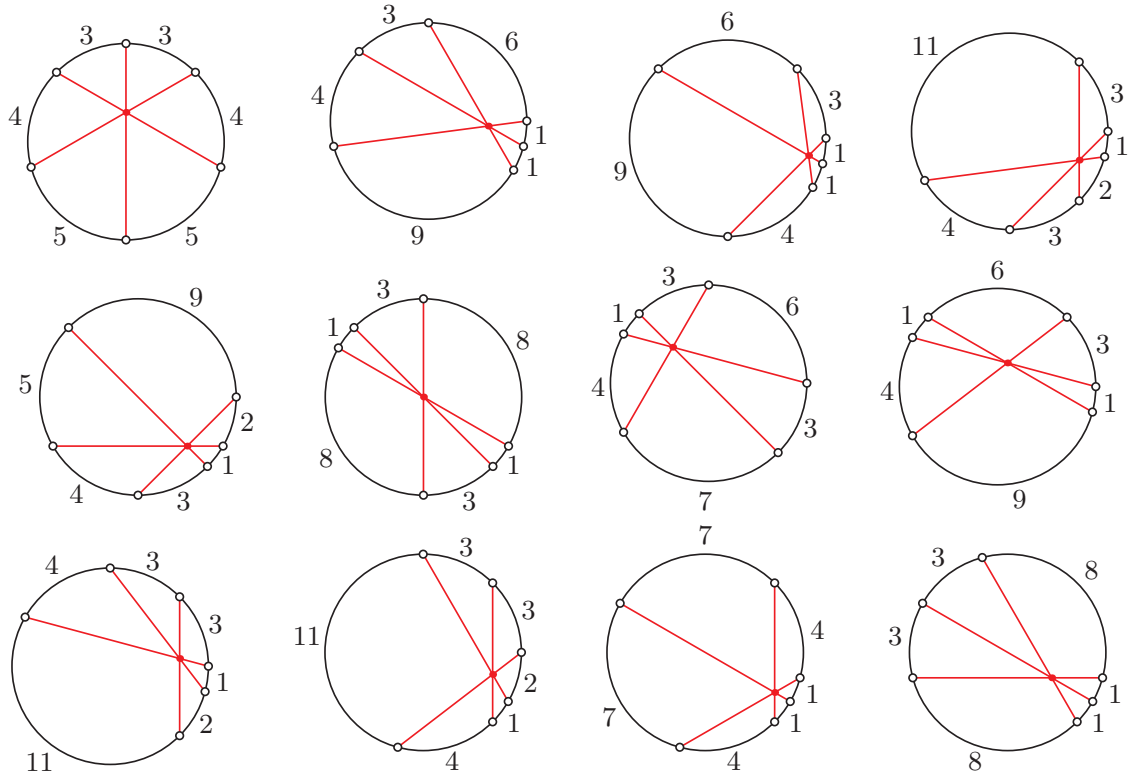
rys. 15

Inne ciekawe konfiguracje możemy otrzymać iterując kolejno twierdzenia 1 i 2 w następujący sposób. Wystartujmy od szóstki (a,b,c,d,e,f) wyznaczającej współpękowe cięciwy i spełniającej założenia twierdzenia 1. Po zastosowaniu twierdzenia 1, uzyskamy szóstkę (t,u,w,x,y,z) wyznaczającą współpękowe cięciwy i spełniającą założenia twierdzenia 2. Twierdzenie 2 możemy teraz zastosować na dwa sposoby: jeden sposób da nam poprzednią, znaną już wcześniej szóstkę (a,b,c,d,e,f), natomiast drugi sposób da kolejną, nową szóstkę, która spełnia założenia twierdzenia 1. Postępowanie to możemy kontynuować.

Przykład 4.

Rozpatrzmy tym razem okrąg o długości 24, a na nim łuki kolejno o długościach: 4, 3, 3, 4, 5, 5. Szóstka $(4,3,3,4,5,5)$ wyznacza współpękowe cięciwy — jest to znowu trywialna konfiguracja złożona z dwóch cięciw symetrycznych względem trzeciej, będącej średnicą. Ponadto $4+4=3+5$ oraz $3<4$, więc możemy zastosować twierdzenie 1 do szóstki $(a,b,c,d,e,f)=(4,3,3,4,5,5)$. W efekcie uzyskamy szóstkę $(t,u,w,x,y,z)=(4,3,6,1,1,9)$, która, zgodnie z twierdzeniem 1, wyznacza współpękowe cięciwy.

Zamieńmy miejscami t z y oraz u z x. Dostajemy wtedy szóstkę $(t,u,w,x,y,z)=(1,1,6,3,4,9)$, która spełnia założenia twierdzenia 2. Po zastosowaniu tego twierdzenia uzyskujemy szóstkę $(a,b,c,d,e,f)=(1,1,3,6,9,4)$ wyznaczającą współpękowe cięciwy.

Zamieńmy z kolei w ostatniej szóstce a z c oraz d z f. Uzyskamy wtedy szóstkę, która spełnia założenia twierdzenia 1: $(a,b,c,d,e,f)=(3,1,1,4,9,6)$. Stosując zatem twierdzenie 1, otrzymujemy kolejną szóstkę $(t,u,w,x,y,z)=(3,1,2,3,4,11)$, która wyznacza współpękowe cięciwy.

Postępowanie to możemy kontynuować. Zauważamy, że po 12 krokach powracamy do wyjściowej konfiguracji. Poniższe rysunki przedstawiają kolejne kroki uzyskane w wyniku tego postępowania.