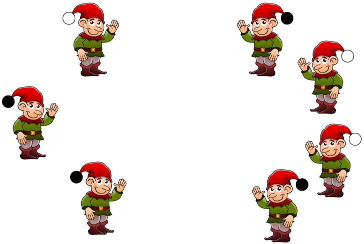
Od 0 i 1 do rzeczy niebanalnych

Andrzej Komisarski

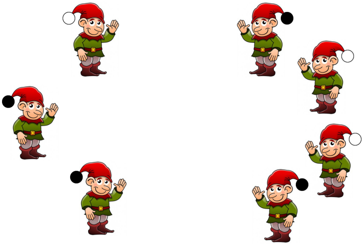
andrzej.komisarski@wmii.uni.lodz.pl

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki
KO OM w Łodzi, KO OLM w Łodzi

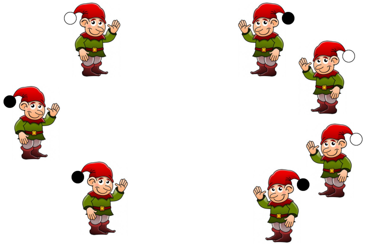
Konferencja SEM „*Elementarne, ale niebanalne*"
26 października 2019 r.
Sielpia



Bardzo zła i brzydka czarownica zakłada krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami.

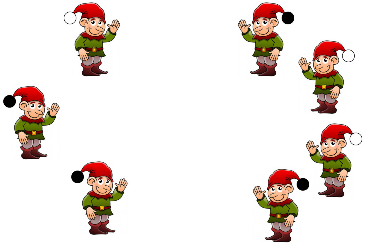


Bardzo zła i brzydka czarownica zakłada krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami.
Robi to losowo ($P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie). Każdy krasnoludek widzi kolory pomponów wszystkich czapek oprócz swojej.



- ☐ Mam czarny pompon ●
- ☐ Mam biały pompon ○
- ☐ Nie wiem jaki mam pompon

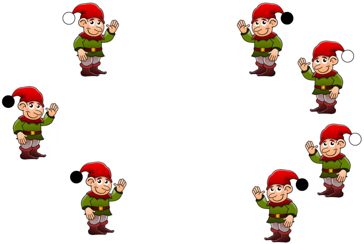
Bardzo zła i brzydka czarownica zakłada krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami.
Robi to losowo ($P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie). Każdy krasnoludek widzi kolory pomponów wszystkich czapek oprócz swojej.
Każdy krasnoludek ma odgadnąć kolor swojego pompona wypełniając ankietę.



- ☐ Mam czarny pompon ●
- ☐ Mam biały pompon ○
- ☐ Nie wiem jaki mam pompon

Bardzo zła i brzydka czarownica zakłada krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami.
Robi to losowo ($P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie). Każdy krasnoludek widzi kolory pomponów wszystkich czapek oprócz swojej.
Każdy krasnoludek ma odgadnąć kolor swojego pompona wypełniając ankietę.

Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem” to wszystkie zostaną ugotowane i zjedzone przez czarownicę.



☐ Mam czarny pompon ●

☐ Mam biały pompon ○

☐ Nie wiem jaki mam pompon

Bardzo zła i brzydka czarownica zakłada krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami.
Robi to losowo ($P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie). Każdy krasnoludek widzi kolory pomponów wszystkich czapek oprócz swojej.
Każdy krasnoludek ma odgadnąć kolor swojego pompona wypełniając ankietę.

Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną ugotowane i zjedzone przez czarownicę.

Pomóżmy krasnoludkom! Wymyślmy taką strategię, by z możliwie dużym prawdopodobieństwem uratowały się.

n krasnoludków z losowymi pomponami

$P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie

Każdy widzi wszystkie pompony oprócz swojego

☐ Mam $\bullet$
☐ Mam $\bigcirc$
☐ Nie wiem

Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną zjedzone.

Chcemy zmaksymalizować prawdopodobieństwo niezjedzenia.

- [ ] Mam ●
- [ ] Mam ○
- [ ] Nie wiem

n krasnoludków z losowymi pomponami
$P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie
Każdy widzi wszystkie pompony oprócz swojego
Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną zjedzone.
Chcemy zmaksymalizować prawdopodobieństwo niezjedzenia.

Zdrowy rozsądek podpowiada, że nie da się uzyskać prawdopodobieństwa niezjedzenia większego niż $\frac{1}{2}$.

- ☐ Mam $\bullet$
- ☐ Mam $\bigcirc$
- ☐ Nie wiem

n krasnoludków z losowymi pomponami
$P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie
Każdy widzi wszystkie pompony oprócz swojego
Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną zjedzone.
Chcemy zmaksymalizować prawdopodobieństwo niezjedzenia.

Zdrowy rozsądek podpowiada, że nie da się uzyskać prawdopodobieństwa niezjedzenia większego niż $\frac{1}{2}$.

Okazuje się jednak, że można uzyskać więcej niż $\frac{1}{2}$: Pokażę, że gdy liczba krasnoludków jest postaci $n = 2^k - 1$, to mądre krasnoludki uratują się z prawdopodobieństwem $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$.

☐	Mam ●
☐	Mam ○
☐	Nie wiem

n krasnoludków z losowymi pomponami
$P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie
Każdy widzi wszystkie pompony oprócz swojego
Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną zjedzone.
Chcemy zmaksymalizować prawdopodobieństwo niezjedzenia.

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numerujemy krasnoludki (a właściwie pompony) liczbami od 1 do $n = 2^k - 1$. Każdy krasnoludek widząc inne pompony odpowiada:

Mam ●	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam ○	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0,1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0,1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0, 1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0, 1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0, 1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0, 1\}$

$$0 \oplus 0 = 0$$
$$0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1$$
$$1 \oplus 1 = 0$$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0, 1\}$

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0,1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0,1\}$

$$0 \oplus 0 = 0$$
$$0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1$$
$$1 \oplus 1 = 0$$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0,1\}$

$a \oplus b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 2

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0,1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0,1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0,1\}$

$a \oplus b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 2

Działanie $\oplus$ jest łączne i przemienne
$(\{0,1\}, \oplus)$ to grupa przemienna (ozn. $\mathbb{Z}_2$)

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0,1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0,1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0,1\}$

$a \oplus b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 2

Działanie $\oplus$ jest łączne i przemienne
$(\{0,1\}, \oplus)$ to grupa przemienna (ozn. $\mathbb{Z}_2$) NIEELEMENTARNE?

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0,1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0,1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0,1\}$

$a \oplus b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 2

Działanie $\oplus$ jest łączne i przemienne
$(\{0,1\}, \oplus)$ to grupa przemienna (ozn. $\mathbb{Z}_2$) NIEELEMENTARNE?

Ponadto $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0$

XOR, czyli $\oplus$ jako działanie w $\{0, 1\}$

XOR, czyli $\oplus$, to następujące działanie w zbiorze $\{0, 1\}$

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a = b \\ 1 & \text{gdy } a \neq b \end{cases}$$

dla $a, b \in \{0, 1\}$

$a \oplus b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 2

Działanie $\oplus$ jest łączne i przemienne
$(\{0, 1\}, \oplus)$ to grupa przemienna (ozn. $\mathbb{Z}_2$) NIEELEMENTARNE?

Ponadto $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0$

Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$, to $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n =$
$=$ reszta z dzielenia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ przez $2 =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{gdy wśród } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ jest parzyście wiele jedynek} \\ 1 & \text{gdy wśród } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ jest nieparzyście wiele jedynek} \end{cases}$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\ldots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$.

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$. Na przykład

$$77 \oplus 25 =$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$. Na przykład

$$77 \oplus 25 = 1001101_2 \oplus 0011001_2 =$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$. Na przykład

$$77 \oplus 25 = 1001101_2 \oplus 0011001_2 = 1010100_2 =$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k=4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$. Na przykład

$$77 \oplus 25 = 1001101_2 \oplus 0011001_2 = 1010100_2 = 84$$

XOR, czyli $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ oraz w $\{0,1,2,3,\dots\}$

W zbiorze ciągów długości k o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (czyli w $\{0,1\}^k$) działanie $\oplus$ określamy po współrzędnych. Na przykład dla $k = 4$ mamy

$$0101 \oplus 1001 = 1100$$

Działanie $\oplus$ w $\{0,1\}^k$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \{0,1\}^k$ zachodzi $a \oplus 0...0 = 0...0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0...0$.

Wykorzystując zapis binarny liczb całkowitych określamy $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$. Na przykład

$$77 \oplus 25 = 1001101_2 \oplus 0011001_2 = 1010100_2 = 84$$

Działanie $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ jest łączne, przemienne i dla każdego $a \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ oraz $a \oplus a = 0$.

n krasnoludków z losowymi pomponami
$P(\bigcirc) = P(\bullet) = \frac{1}{2}$; niezależnie
Każdy widzi wszystkie pompony oprócz swojego

☐ Mam $\bullet$
☐ Mam $\bigcirc$
☐ Nie wiem

Jeśli choć jeden krasnoludek poda błędny kolor lub wszystkie odpowiedzą „Nie wiem" to wszystkie zostaną zjedzone.
Chcemy zmaksymalizować prawdopodobieństwo niezjedzenia.

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numerujemy krasnoludki (a właściwie pompony) liczbami od 1 do $n = 2^k - 1$. Każdy krasnoludek widząc inne pompony odpowiada:

Mam $\bullet$	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam $\bigcirc$	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numery pomponów: $1, 2, \ldots, n$. Każdy krasnoludek odpowiada:

Mam ●	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam ○	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

Dlaczego to działa?

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numery pomponów: $1, 2, \ldots, n$. Każdy krasnoludek odpowiada:

Mam ●	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam ○	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

Niech w = XOR numerów wszystkich czarnych pomponów.
Przypadek I: $w \neq 0$. Rozważmy krasnoludka i.

Jeśli $i \neq w$, to niezależnie od koloru własnego pompona krasnoludek i odpowie „Nie wiem" (bo $w, w \oplus i \notin \{0, i\}$)

Jeśli $i = w$ i krasnoludek i ma biały pompon, to odpowie on „Mam ○" (bo $w = i$)

Jeśli $i = w$ i krasnoludek i ma czarny pompon, to odpowie on „Mam ●" (bo $w \oplus i = 0$)

Krasnoludki są uratowane! ☺

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numery pomponów: $1, 2, \ldots, n$. Każdy krasnoludek odpowiada:

Mam ●	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam ○	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

Niech w = XOR numerów wszystkich czarnych pomponów.
Przypadek II: $w = 0$. Rozważmy krasnoludka i.

Jeśli krasnoludek i ma biały pompon, to odpowie on „Mam ●" (bo $w = 0$)

Jeśli krasnoludek i ma czarny pompon, to odpowie on „Mam ○" (bo $w \oplus i = 0 \oplus i = i$)

Krasnoludki zostaną zjedzone! ☹

Strategia (dla $n = 2^k - 1$; dająca $P(\text{niezjedzenie}) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^k}$)

Numery pomponów: $1, 2, \ldots, n$. Każdy krasnoludek odpowiada:

Mam ●	gdy XOR numerów czarnych pomponów to 0
Mam ○	gdy XOR numerów czarnych pomponów to mój numer
Nie wiem	w pozostałych przypadkach

Niech w = XOR numerów wszystkich czarnych pomponów.

Podsumowując:

Krasnoludki uratują się wtedy i tylko wtedy, gdy $w \neq 0$.
Prawdopodobieństwo, że $w \neq 0$ wynosi $1 - \frac{1}{2^k} = \frac{n}{n+1}$

Strategię krasnoludków można też opisać wykorzystując kody Hamminga (dokładniej kody Hamminga $[2^k - 1, 2^k - k - 1, 3]_2$; są one wykorzystywane do wykrywania i korekcji błędów przy przesyłaniu danych).
Więcej o tym podejściu można przeczytać w artykule
Andrzej Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki*, Delta 7/2005

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
0								
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
0								
	0	1	2	3	4	5	6	7

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
0	0							
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4								
3								
2								
1	1							
0	0	1						
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4								
3								
2	2							
1	1	0						
0	0	1	2					
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4								
3	3							
2	2	3						
1	1	0	3					
0	0	1	2	3				
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5								
4	4							
3	3	2						
2	2	3	0					
1	1	0	3	2				
0	0	1	2	3	4			
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6								
5	5							
4	4	5						
3	3	2	1					
2	2	3	0	1				
1	1	0	3	2	5			
0	0	1	2	3	4	5		
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7								
6	6							
5	5	4						
4	4	5	6					
3	3	2	1	0				
2	2	3	0	1	6			
1	1	0	3	2	5	4		
0	0	1	2	3	4	5	6	
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

7	7							
6	6	7						
5	5	4	7					
4	4	5	6	7				
3	3	2	1	0	7			
2	2	3	0	1	6	7		
1	1	0	3	2	5	4	7	
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

Okazuje się, że w polu o współrzędnych (i, j) wpisana zostanie liczba $i \oplus j$.

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

XOR, czyli $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ bez systemu dwójkowego

Tak naprawdę $\oplus$ w $\mathbb{Z}_+$ ma mniej wspólnego z zapisem binarnym, niż się wydaje.

Rozważmy następującą tablicę:

W każde pole wpisujemy najmniejszą liczbę z $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, która nie jest wpisana w żadne pole poniżej, ani w żadne pole na lewo od danego pola.

Okazuje się, że w polu o współrzędnych (i, j) wpisana zostanie liczba $i \oplus j$.

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Jeśli $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ spełnia

$$\mathrm{f(i,j)} = \min(\mathbb{Z}_+ \setminus (\{\mathrm{f(i,k):k<j}\} \cup \{\mathrm{f(l,j):l<i}\})),$$

to $f(i, j) = i \oplus j$.

Dlaczego? DIY

Oto zadanie 11 z I stopnia LXVII Olimpiady Matematycznej (2015/16):

Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny. Udowodnić, że jeśli na przecięciu m-tego wiersza z n-tą kolumną znajduje się liczba r, to na przecięciu m-tego wiersza z r-tą kolumną znajduje się liczba n.

Zadanie 11/I/LXVII OM

Oto zadanie 11 z I stopnia LXVII Olimpiady Matematycznej (2015/16):

Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny. Udowodnić, że jeśli na przecięciu m-tego wiersza z n-tą kolumną znajduje się liczba r, to na przecięciu m-tego wiersza z r-tą kolumną znajduje się liczba n.

Rozwiązanie:
Skoro $m \oplus n = r$, to $m \oplus r = m \oplus m \oplus n = n$.

Zadanie 18 z drugiego dnia finału XVI GMiL

Oto zadanie 18 z drugiego dnia finału XVI Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych (2019):

W kwadratową tablicę o wymiarach 2019 na 2019 pól wpisano liczby całkowite dodatnie w taki sposób, że w każdym polu wpisana jest najmniejsza liczba nie występująca ani w polach znajdujących się w tym samym wierszu na lewo, ani w tej samej kolumnie w dół od danego pola. Jaka liczba zostanie wpisana w pole leżące w górnym wierszu i środkowej kolumnie?

Zadanie 18 z drugiego dnia finału XVI GMiL

Oto zadanie 18 z drugiego dnia finału XVI Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych (2019):

W kwadratową tablicę o wymiarach 2019 na 2019 pól wpisano liczby całkowite dodatnie w taki sposób, że w każdym polu wpisana jest najmniejsza liczba nie występująca ani w polach znajdujących się w tym samym wierszu na lewo, ani w tej samej kolumnie w dół od danego pola. Jaka liczba zostanie wpisana w pole leżące w górnym wierszu i środkowej kolumnie?

Rozwiązanie:
Zamiast zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$ użyty został zbiór $\{1, 2, \dots\}$. Zatem na przecięciu m-tego wiersza i n-tej kolumny znajdzie się liczba $((m-1) \oplus (n-1)) + 1$. Nas interesuje liczba wpisana na przecięciu wiersza 2019 wierszu i kolumny 1010. Ta liczba to $(2018 \oplus 1009) + 1 = 11111100010_2 \oplus 1111110001_2 + 1 = 10000010011_2 + 1 = 1044$.

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Asystent prosi publiczność, by wybrała liczbę x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Asystent prosi publiczność, by wybrała liczbę x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Następnie asystent odwraca dokładnie jedną, wybraną przez siebie monetę.

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Asystent prosi publiczność, by wybrała liczbę x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Następnie asystent odwraca dokładnie jedną, wybraną przez siebie monetę.

Magik wraca, patrzy na monety i podaje liczbę x.

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Asystent prosi publiczność, by wybrała liczbę x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Następnie asystent odwraca dokładnie jedną, wybraną przez siebie monetę.

Magik wraca, patrzy na monety i podaje liczbę x.

Gdy na początku wszystkie monety są odwrócone tą samą stroną ku górze, to strategia magika i jego asystenta jest prosta.
Co zrobić, gdy początkowy układ monet jest losowy lub wybrany złośliwie przez publiczność?

Magik i sztuczka z monetami

Rozważmy następującą sztuczkę, w której uczestniczy magik, jego asystent i publiczność.

Na początku magik wychodzi z pomieszczenia, a jego asystent wykłada przed publicznością n monet.

Asystent prosi publiczność, by wybrała liczbę x ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Następnie asystent odwraca dokładnie jedną, wybraną przez siebie monetę.

Magik wraca, patrzy na monety i podaje liczbę x.

Gdy na początku wszystkie monety są odwrócone tą samą stroną ku górze, to strategia magika i jego asystenta jest prosta.
Co zrobić, gdy początkowy układ monet jest losowy lub wybrany złośliwie przez publiczność?
Okazuje się, że gdy $n = 2^k$, to sztuczkę nadal można wykonać.

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n - 1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \dots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.
Jak to zrobić?

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n-1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Jak to zrobić? Wysłać potajemnie SMSa!!!

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n - 1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
Jak to zrobić? ~~Wysłać potajemnie SMSa!!!~~
Jedyne co możemy to odwrócić dokładnie jedną monetę. Którą?

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n - 1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
Jak to zrobić? ~~Wysłać potajemnie SMSa!!!~~
Jedyne co możemy to odwrócić dokładnie jedną monetę. Którą?

Odwróćmy monetę o numerze $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x$.

A co ma zrobić Magik?

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n-1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Jak to zrobić? ~~Wysłać potajemnie SMSa!!!~~
Jedyne co możemy to odwrócić dokładnie jedną monetę. Którą?

Odwróćmy monetę o numerze $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x$.

A co ma zrobić Magik?
Ma zXORować numery wszystkich monet, na których widzi orła.

Dlaczego to działa?

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n - 1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
Jak to zrobić? ~~Wysłać potajemnie SMSa!!!~~
Jedyne co możemy to odwrócić dokładnie jedną monetę. Którą?

Odwróćmy monetę o numerze $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x$.

A co ma zrobić Magik?
Ma zXORować numery wszystkich monet, na których widzi orła.

Dlaczego to działa? Dlatego, że

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x) =$$

$$= (a_1 \oplus a_1) \oplus (a_2 \oplus a_2) \oplus \cdots \oplus (a_j \oplus a_j) \oplus x = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus x = x$$

Magik i sztuczka z monetami

Mamy $n = 2^k$ monet.
Numerujemy je kolejnymi liczbami od 0 do $n-1$.
Niektóre z nich $(a_1, a_2, \ldots, a_j)$ odwrócone są orłem do góry.
Mamy przekazać jakoś Magikowi liczbę $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Jak to zrobić? ~~Wysłać potajemnie SMSa!!!~~
Jedyne co możemy to odwrócić dokładnie jedną monetę. Którą?

Odwróćmy monetę o numerze $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x$.

A co ma zrobić Magik?
Ma zXORować numery wszystkich monet, na których widzi orła.

Dlaczego to działa? Dlatego, że

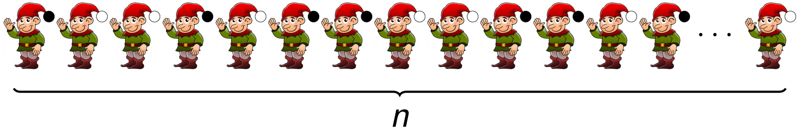
$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_j \oplus x) =$$

$$= (a_1 \oplus a_1) \oplus (a_2 \oplus a_2) \oplus \cdots \oplus (a_j \oplus a_j) \oplus x = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus x = x$$

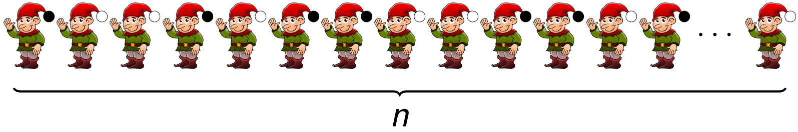
Ta metoda nie zadziała, gdy n nie jest potęgą dwójki. Nie zadziała też żadna inna. Dlaczego? DIY

Ratujmy krasnoludki! II

Δ^{5}_{06} (JJ)

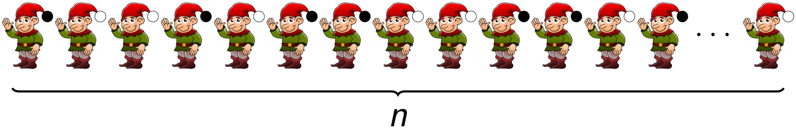


Bardzo zła i brzydka czarownica założyła krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami. Każdy krasnoludek widzi tylko kolory pomponów czapek wszystkich krasnoludków, którzy stoją w szeregu przed nim.



Bardzo zła i brzydka czarownica założyła krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami. Każdy krasnoludek widzi tylko kolory pomponów czapek wszystkich krasnoludków, którzy stoją w szeregu przed nim.

Począwszy od końca szeregu każdy krasnoludek ma podać jeden z dwóch kolorów (biały lub czarny). Wszystkie krasnoludki słyszą wszystkie odpowiedzi.

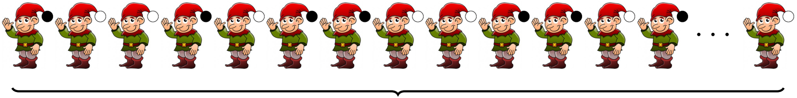


Bardzo zła i brzydka czarownica założyła krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami. Każdy krasnoludek widzi tylko kolory pomponów czapek wszystkich krasnoludków, którzy stoją w szeregu przed nim.

Począwszy od końca szeregu każdy krasnoludek ma podać jeden z dwóch kolorów (biały lub czarny). Wszystkie krasnoludki słyszą wszystkie odpowiedzi.

Te krasnoludki, które podały kolor inny, niż kolor swego pompona zostaną ugotowane i zjedzone przez złą (i bardzo brzydką) czarownicę.

Ratujmy krasnoludki! II



n

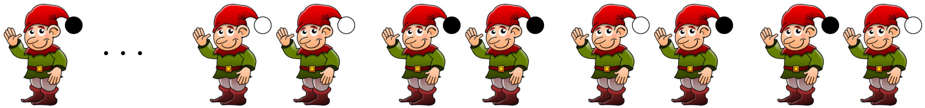
Bardzo zła i brzydka czarownica założyła krasnoludkom czapki z białymi lub czarnymi pomponami. Każdy krasnoludek widzi tylko kolory pomponów czapek wszystkich krasnoludków, którzy stoją w szeregu przed nim.

Począwszy od końca szeregu każdy krasnoludek ma podać jeden z dwóch kolorów (biały lub czarny). Wszystkie krasnoludki słyszą wszystkie odpowiedzi.

Te krasnoludki, które podały kolor inny, niż kolor swego pompona zostaną ugotowane i zjedzone przez złą (i bardzo brzydką) czarownicę.

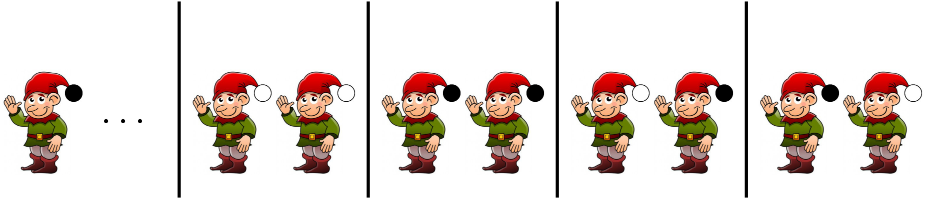
Pomóżmy krasnoludkom! Wymyślmy taką strategię, by możliwie wielu z nich uratowało się (nawet w pesymistycznym przypadku).

Strategia I



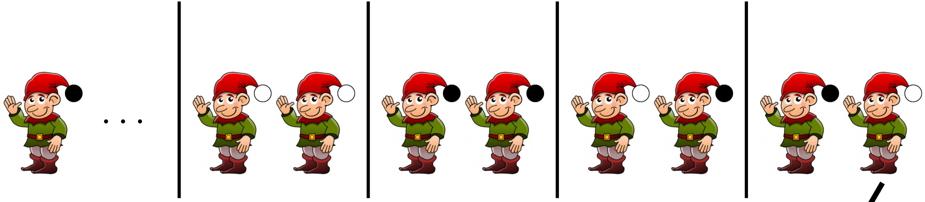
Strategia I

Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Strategia I

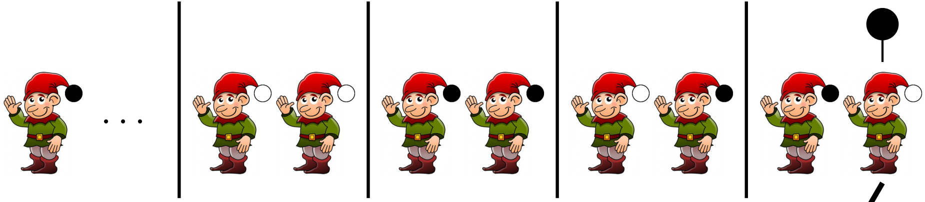
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

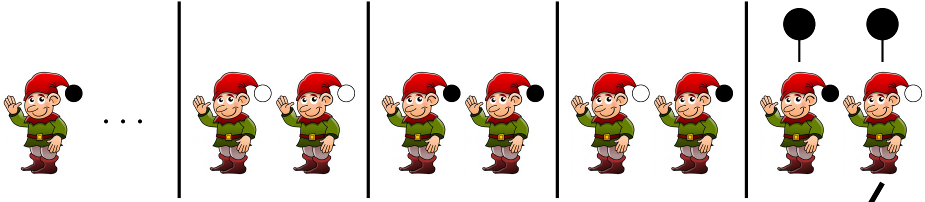
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

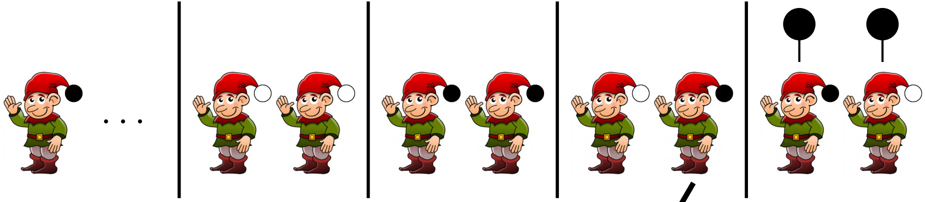
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

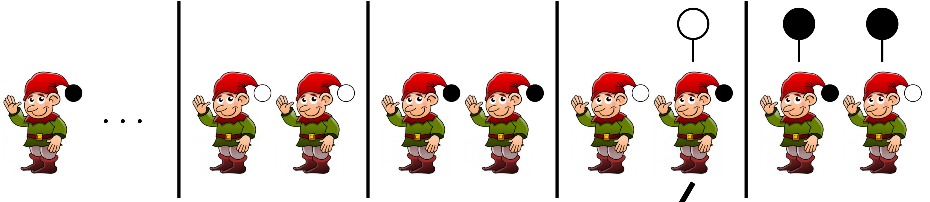
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

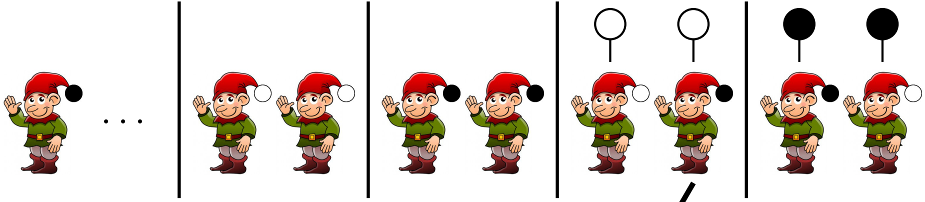
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

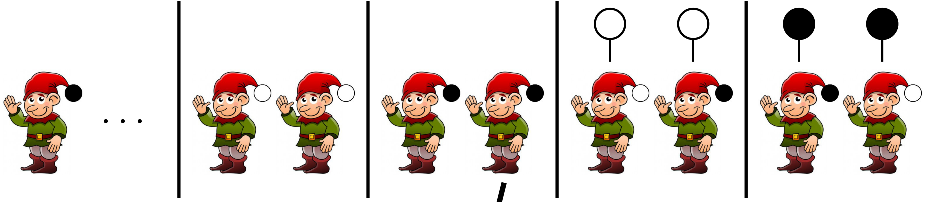
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

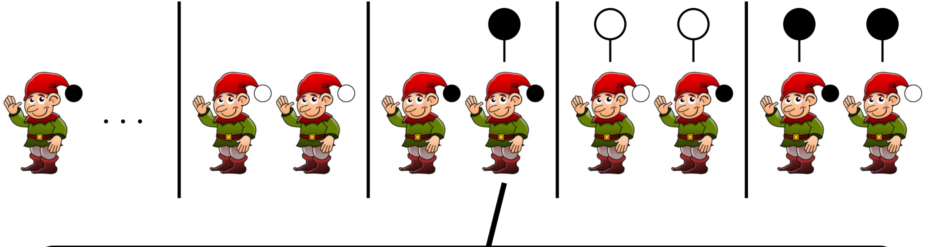
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

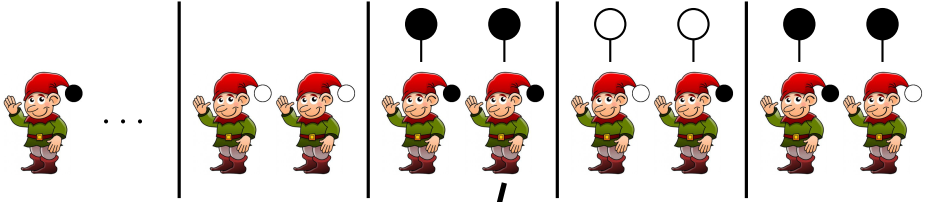
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

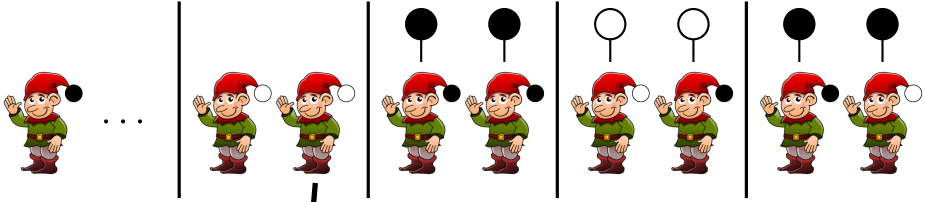
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

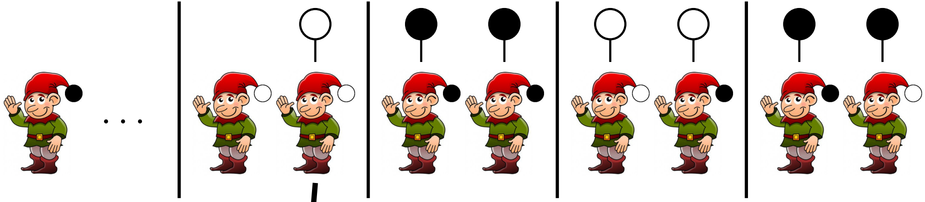
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

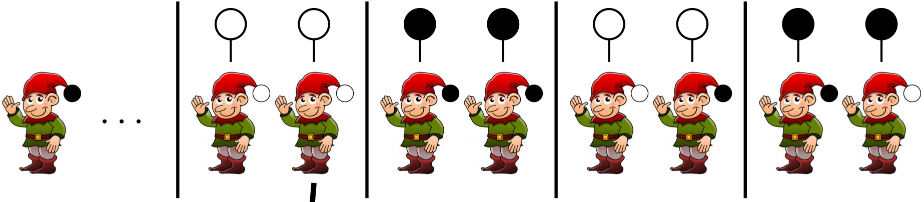
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

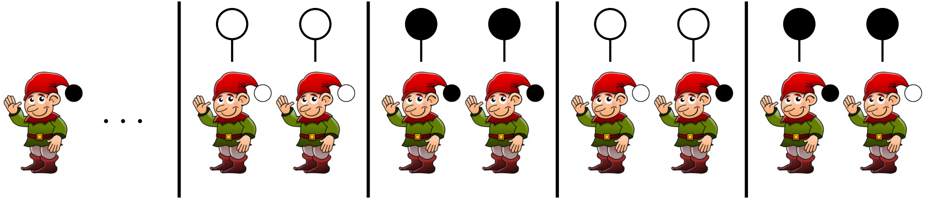
Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

Strategia I

Podzielmy krasnoludki na grupy dwukrasnoludkowe (od końca szeregu)



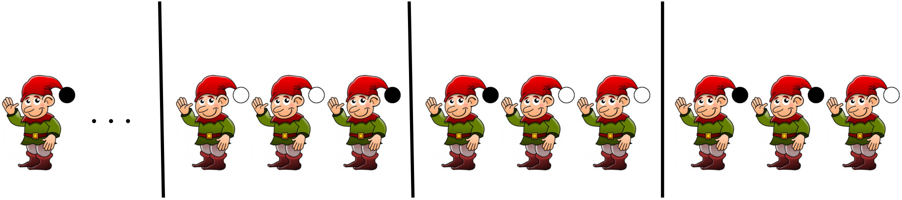
Podpowiem mojemu poprzednikowi kolor jego pompona

W ten sposób uratuje się co najmniej $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ krasnoludków.
(W przypadku pesymistycznym uratuje się tylko $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ krasnoludków.)

Strategia II

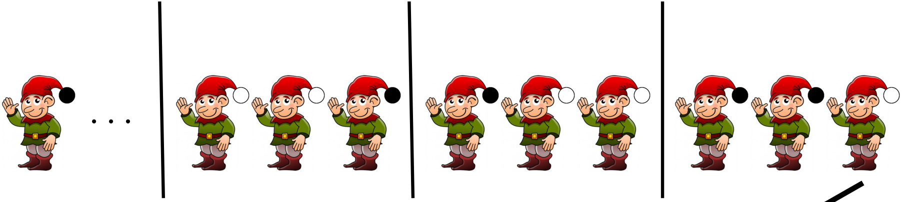
Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



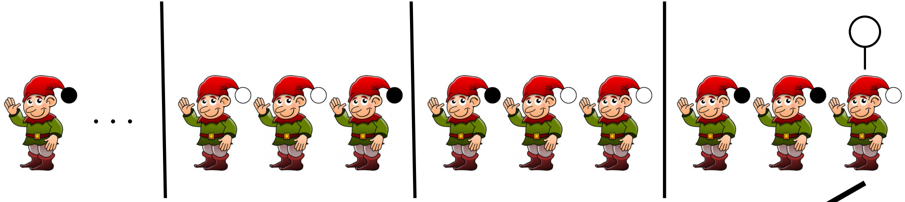
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



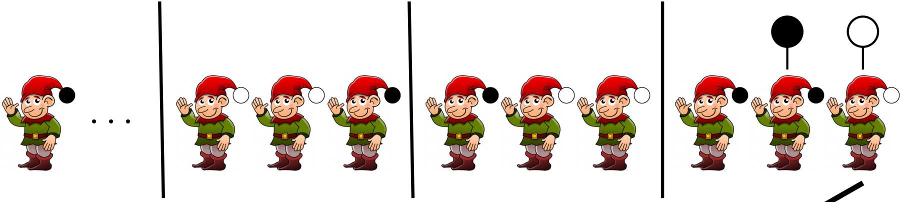
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



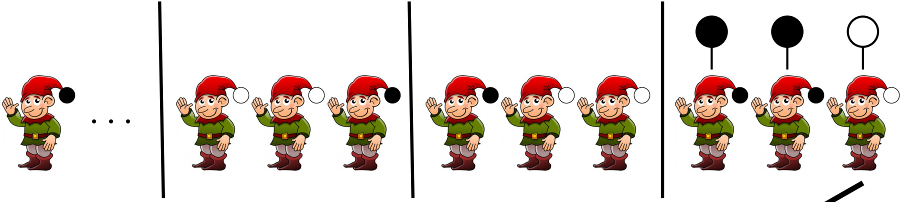
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



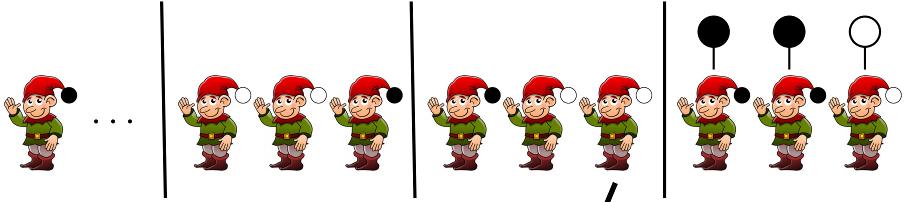
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

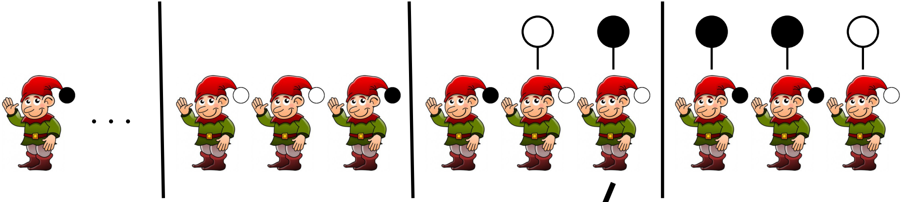
● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



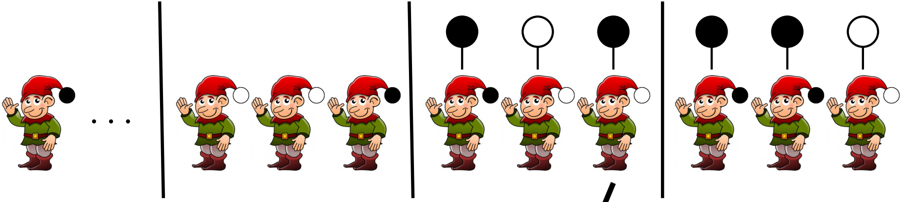
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



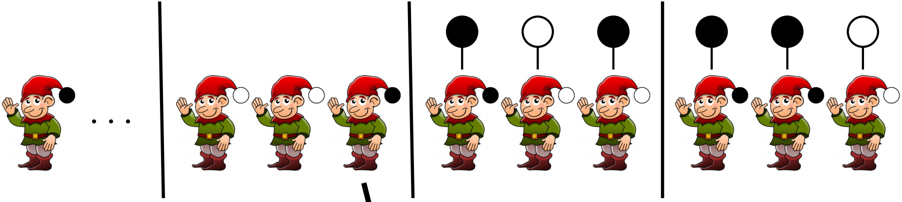
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



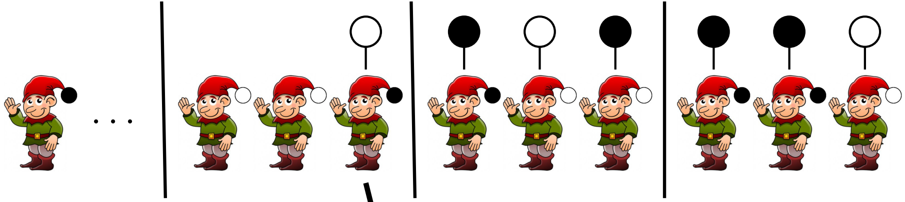
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



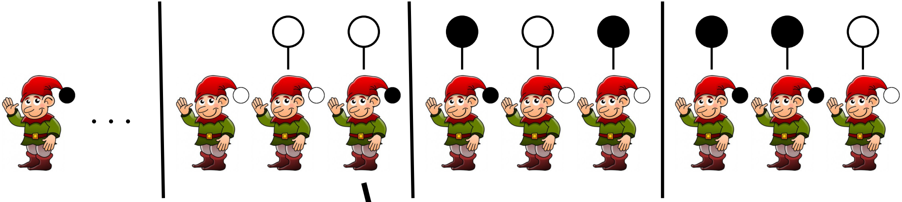
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



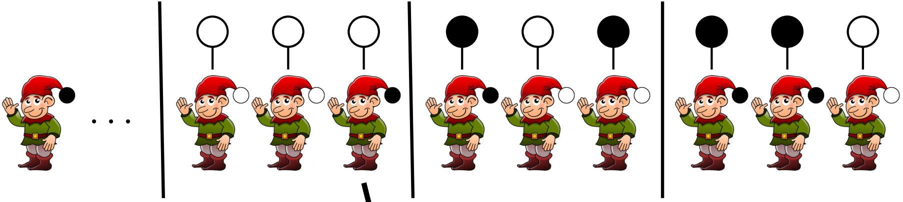
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



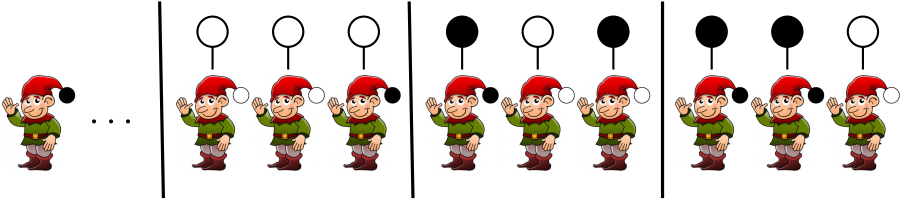
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

Strategia II

Podzielmy krasnoludki na grupy trójkrasnoludkowe (od końca szeregu)



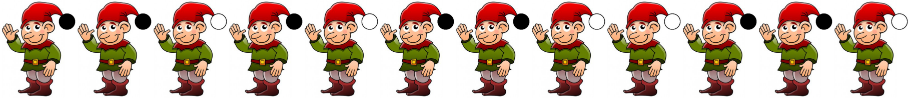
Podpowiem moim dwóm poprzednikom, czy mają pompony tego samego koloru:

○ – ten sam kolor

● – różne kolory

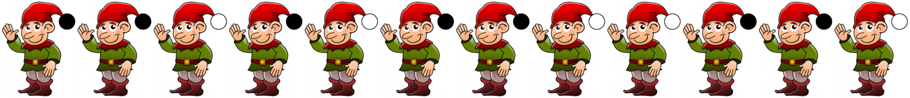
W ten sposób można uratować $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor$ krasnoludków.
(Lepiej, niż $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.)

Strategia III



Strategia III

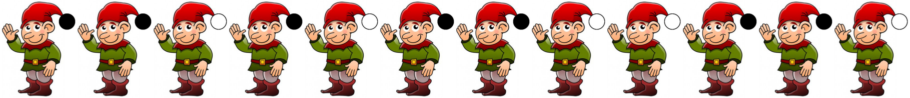
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



Strategia III

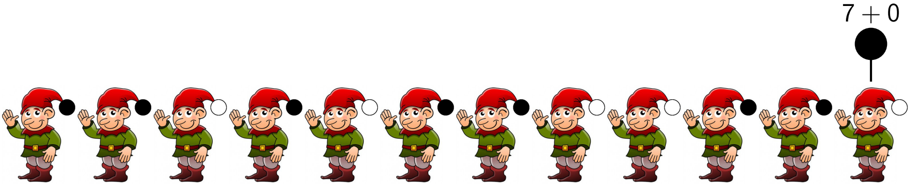
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta

$7 + 0$



Strategia III

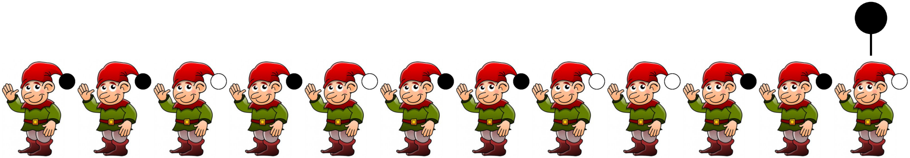
Krasnoludek mówi „czarny", jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych" czarnych pomponów jest nieparzysta



Strategia III

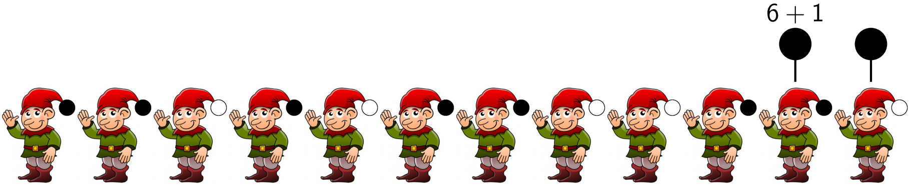
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta

$6 + 1$



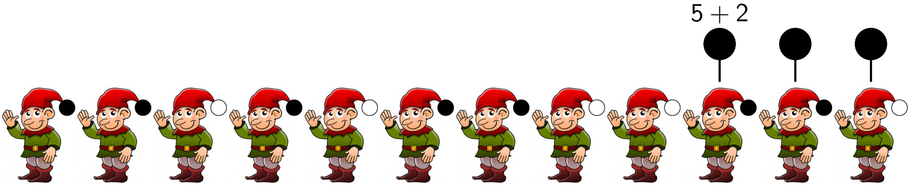
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny", jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych" czarnych pomponów jest nieparzysta



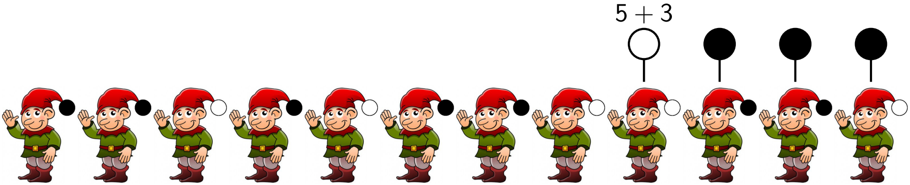
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



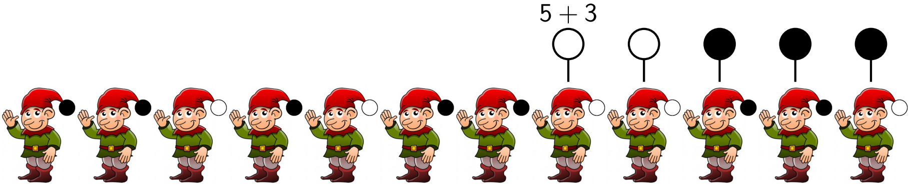
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



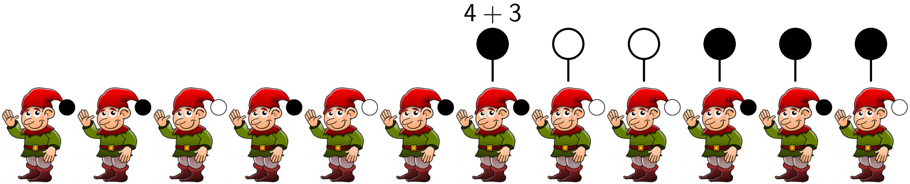
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny", jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych" czarnych pomponów jest nieparzysta



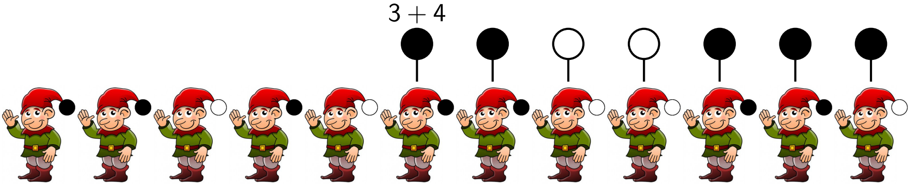
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



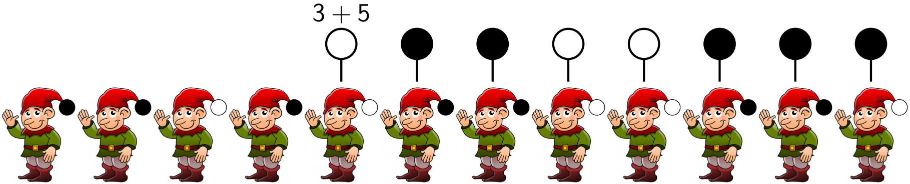
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



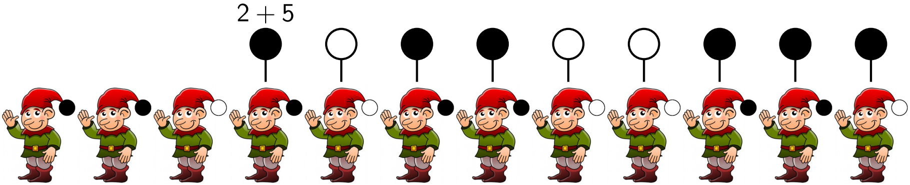
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



Strategia III

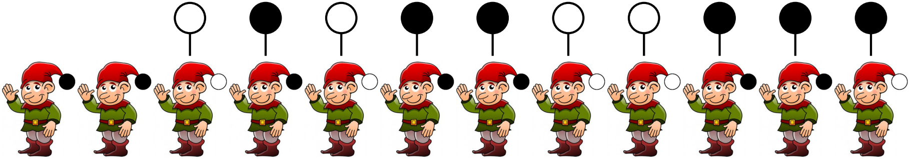
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



Strategia III

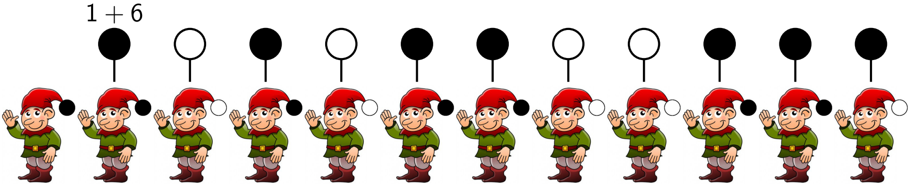
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta

$2 + 6$



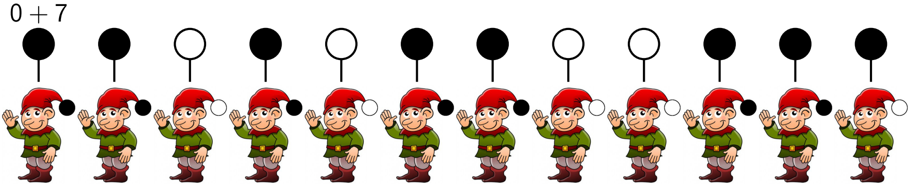
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



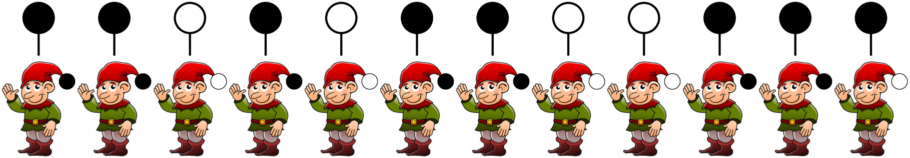
Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



Strategia III

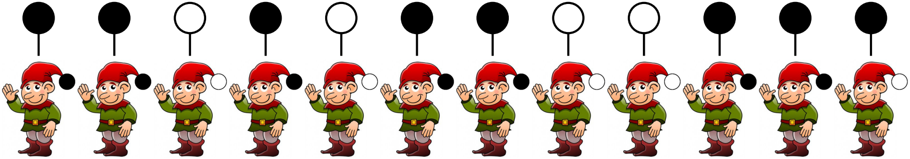
Krasnoludek mówi „czarny”, jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych” czarnych pomponów jest nieparzysta



W ten sposób można uratować aż $n-1$ krasnoludków!
(Wszystkich oprócz ewentualnie tego na końcu szeregu.)

Strategia III

Krasnoludek mówi „czarny", jeśli łączna liczba widzianych i „usłyszanych" czarnych pomponów jest nieparzysta



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

W ten sposób można uratować **aż $n - 1$ krasnoludków!**
(Wszystkich oprócz ewentualnie tego na końcu szeregu.)

Niech ○ $= 0$ oraz ● $= 1$

a_i – kolor pompona krasnoludka i

b_i – kolor wypowiedziany przez krasnoludka i

Wówczas $$b_k = \bigoplus_{i<k} a_i \oplus \bigoplus_{j>k} b_j =$$

$$= a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_{k-1} \oplus b_{k+1} \oplus b_{k+2} \oplus \cdots \oplus b_n$$

Zadanie: Na okręgu umieszczono $n \geqslant 3$ zgaszonych żarówek. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu trzech dowolnie wybranych sąsiednich żarówek (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich n wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Różne zadania, które wiążą się z 0, 1 i $\oplus$

Zadanie: Na okręgu umieszczono $n \geqslant 3$ zgaszonych żarówek. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu trzech dowolnie wybranych sąsiednich żarówek (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich n wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W poprzednim zadaniu zastąpmy 3 przez dowolną liczbę naturalną k.

Różne zadania, które wiążą się z 0, 1 i $\oplus$

Zadanie: Na okręgu umieszczono $n \geqslant 3$ zgaszonych żarówek. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu trzech dowolnie wybranych sąsiednich żarówek (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich n wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W poprzednim zadaniu zastąpmy 3 przez dowolną liczbę naturalną k.

Zadanie: W poprzednich dwóch zadaniach opisać wszystkie stany układu żarówek możliwe do osiągnięcia po wykonaniu skończonej liczby ruchów.

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranych sąsiednich k żarówek leżących w jednym wierszu lub w jednej kolumnie (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich k, n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranych sąsiednich k żarówek leżących w jednym wierszu lub w jednej kolumnie (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich k, n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W poprzednim zadaniu dopuśćmy również zmianę stanu żarówek leżących na linii ukośnej (równoległej do przekątnej pola).

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranych sąsiednich k żarówek leżących w jednym wierszu lub w jednej kolumnie (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich k, n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W poprzednim zadaniu dopuśćmy również zmianę stanu żarówek leżących na linii ukośnej (równoległej do przekątnej pola).

Zadanie: A jeśli w poprzednim zadaniu dopuścimy zmianę stanu k sąsiednich żarówek leżących na linii ukośnej równoległej tylko do jednej przekątnej.

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranych sąsiednich k żarówek leżących w jednym wierszu lub w jednej kolumnie (zapaloną żarówkę gasimy, a zgaszoną zapalamy). Dla jakich k, n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W poprzednim zadaniu dopuśćmy również zmianę stanu żarówek leżących na linii ukośnej (równoległej do przekątnej pola).

Zadanie: A jeśli w poprzednim zadaniu dopuścimy zmianę stanu k sąsiednich żarówek leżących na linii ukośnej równoległej tylko do jednej przekątnej.

Zadanie: A co się stanie jeśli dla linii pionowych, poziomych i ukośnych ustalimy inną liczbę sąsiednich żarówek, których stan zmieniamy w pojedynczym ruchu?

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranej żarówki i wszystkich, które leżą w polach sąsiadujących z nią. Dla jakich n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: W każdym polu prostokąta składającego się z $n \times m$ pól umieszczona jest zgaszona żarówka. Kolejno wykonujemy ruchy, z których każdy polega na zmianie stanu dowolnie wybranej żarówki i wszystkich, które leżą w polach sąsiadujących z nią. Dla jakich n, m wykonując powyższe ruchy możemy doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żarówki zostaną zapalone?

Zadanie: A gdyby to wszystko działo się nie w prostokącie, lecz na torusie?

Możliwości jest wiele.