

# W kilku słowach o plakacie SEM

**RENATA JURASIŃSKA**

**„Elementarne, ale niebanalne”**

**Sielpia, 25–27 października 2019**

**Konferencja organizowana przez  
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej**

---

**Jeden obraz  
wart więcej**

**niż tysiąc słów...**

Przysłowie chińskie

---

**Martin Gardner**, zmarły 22 maja 2010 roku amerykański dziennikarz i popularyzator nauki, specjalizujący się w matematyce rekreacyjnej, redagował w czasopiśmie *Scientific American* kolumnę „Mathematical Games”.

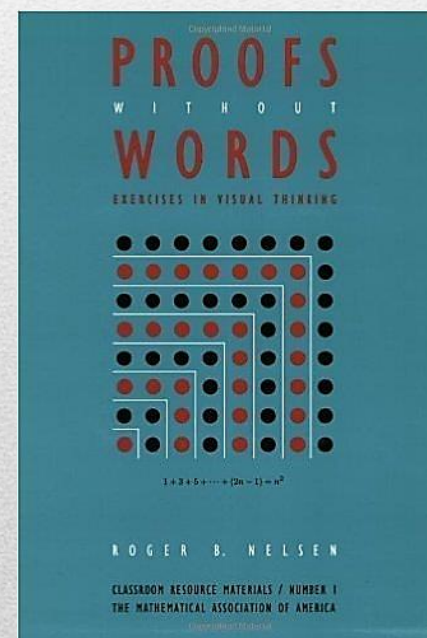
W jednym z artykułów, w październiku 1973 roku napisał, że „...w wielu przypadkach ścisły dowód może być uzupełniony rysunkiem tak prostym i pięknym, że prawdziwość twierdzenia widać na pierwszy rzut oka...”.

Takie „rysunkowe” dowody nazywał  
**„look-see” diagrams.**

---

W roku 1980 redakcja czasopisma *The College Mathematics Journal* zaprosiła na swoje łamy oprócz „zwykłych” artykułów również „...**proofs without words**, mathematical poetry, quotes...”.

W roku 1993 została wydana przez The Mathematical Association of America w serii *Classroom Resource Materials* książka „**Proofs Without Words. Exercises in visual thinking**” autorstwa Rogera. B. Nelsena.



# **DOWODY BEZ SŁÓW (PWWs)**

nie są współczesnym wymysłem, mają bardzo długą historię, znane były już w starożytnych Chinach, klasycznej Grecji i dwunastowiecznych Indiach.

---



**DOWODY BEZ SŁÓW** nie są tak  
naprawdę dowodami...

Czym więc są?

---

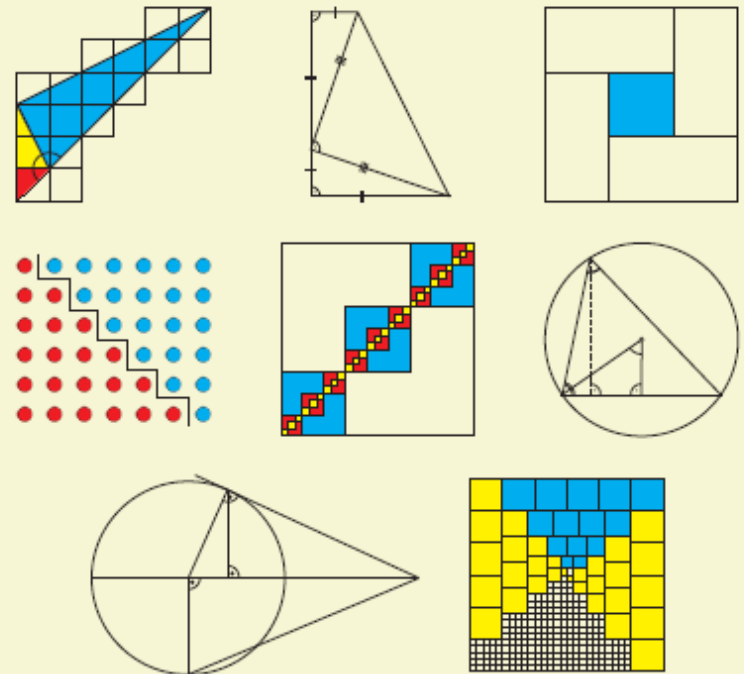
Są to rysunki lub schematy, które pomagają obserwatorowi zrozumieć **DLACZEGO** dane wyrażenie (równość, nierówność itp.) jest prawdziwe oraz **W JAKI SPOSÓB** można zacząć ścisły dowód jego poprawności.

Przy niektórych rysunkach mogą pojawić się „naprowadzające” równości lub nierówności, ale generalnie **DOWODY BEZ SŁÓW** mają za zadanie dostarczać wskazówek wizualnych i stymulować myślenie matematyczne.

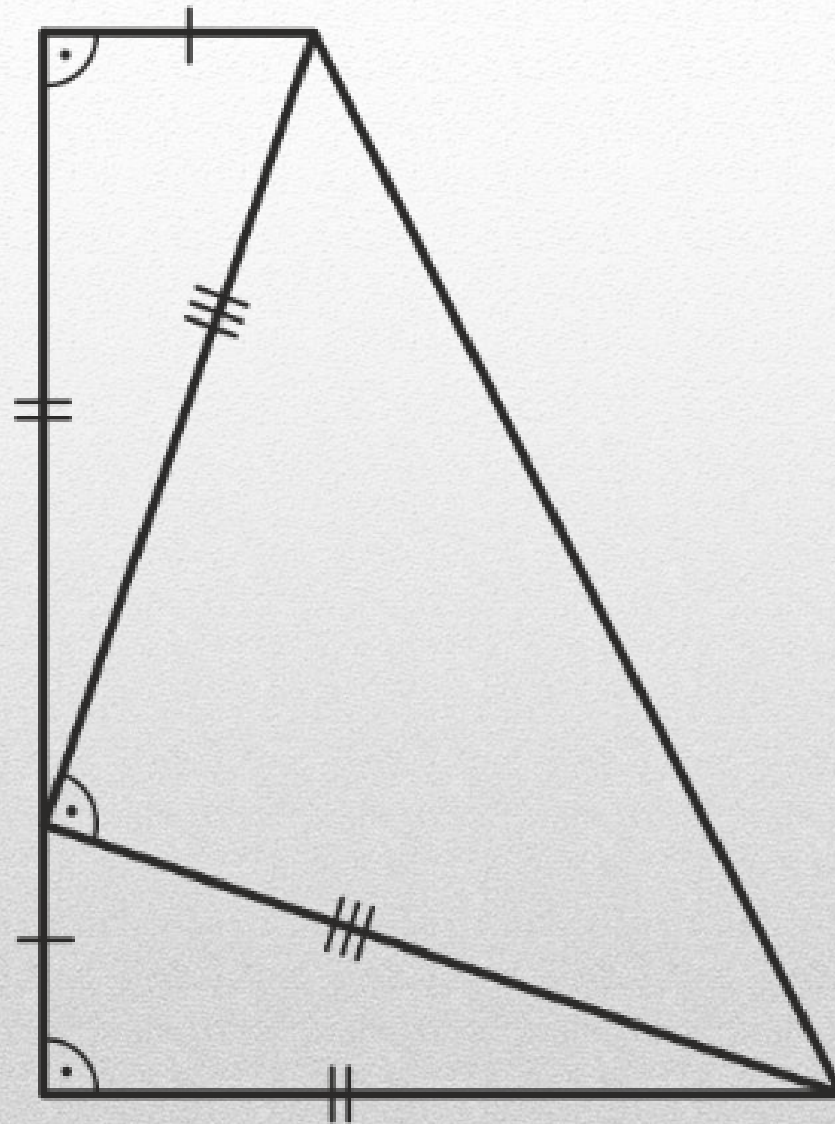
---

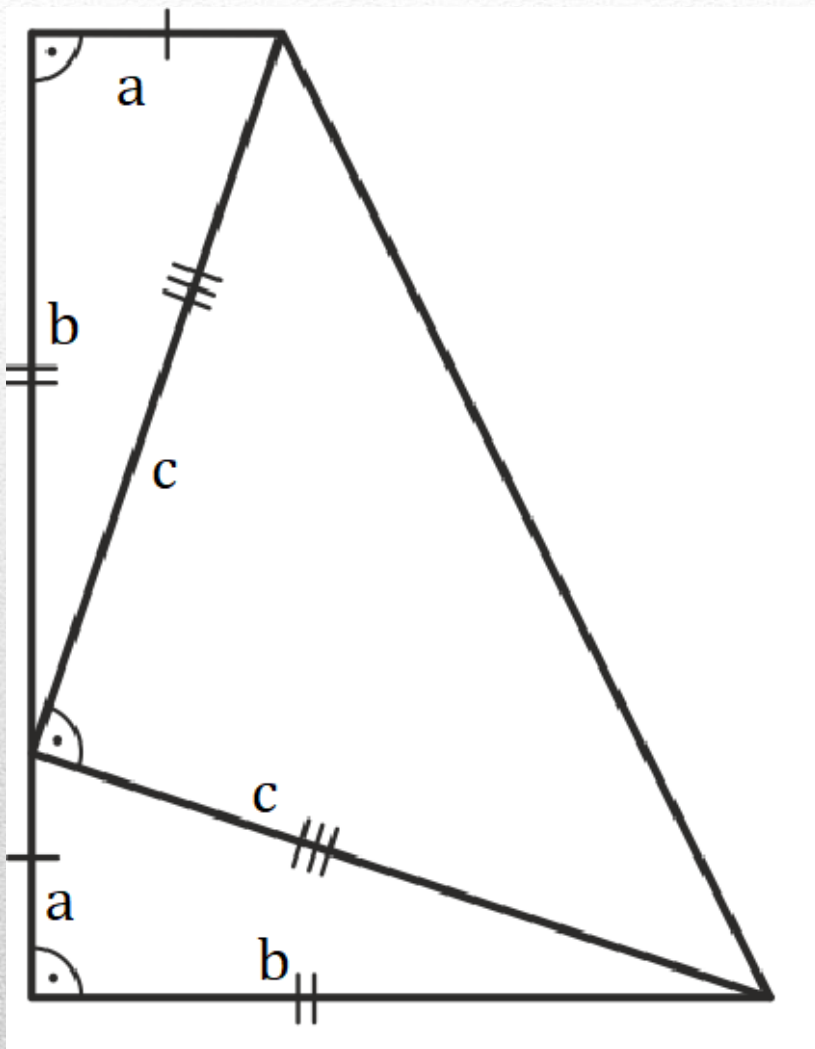
# Najnowszy plakat SEM poświęcony jest właśnie dowodom bez słów

Jeden obraz wart więcej niż tysiąc słów...



$\sin^2 1 + \sin^2 2 + \sin^2 3 = \dots$	$a^2 + b^2 = c^2$	$x + \frac{1}{x} \geq 2$ dla $x > 0$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}(n(n+1))^2$
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ dla $a, b > 0$
$\sqrt{a^2} \geq \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$ dla $a, b > 0$	$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_n^2$ dla $n \geq 3$	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ dla $x > 0, y > 0, x+y < \pi$	





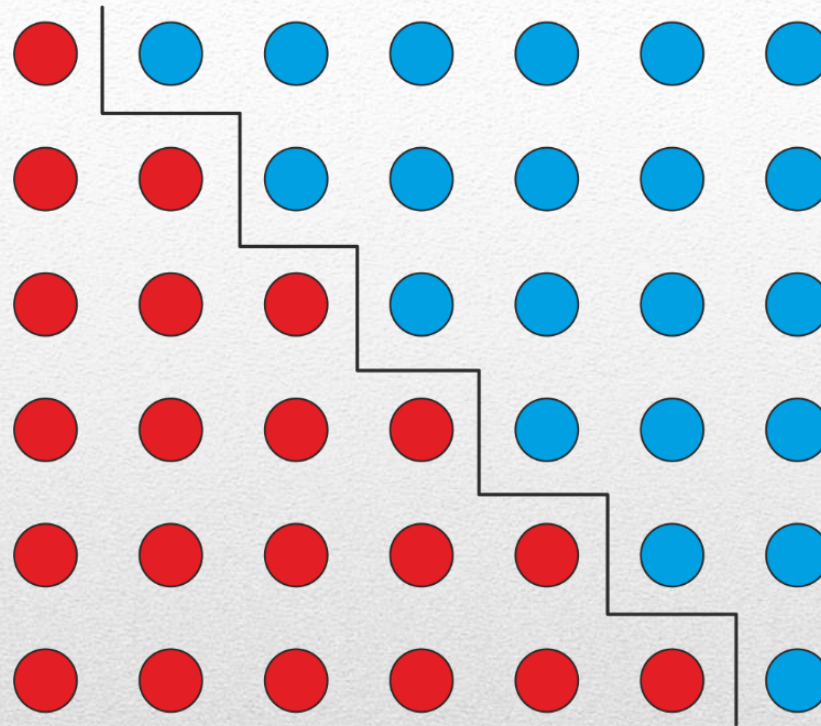
$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} (a + b)^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

---

(James A. Garfield, 20. prezydent USA, 1876)

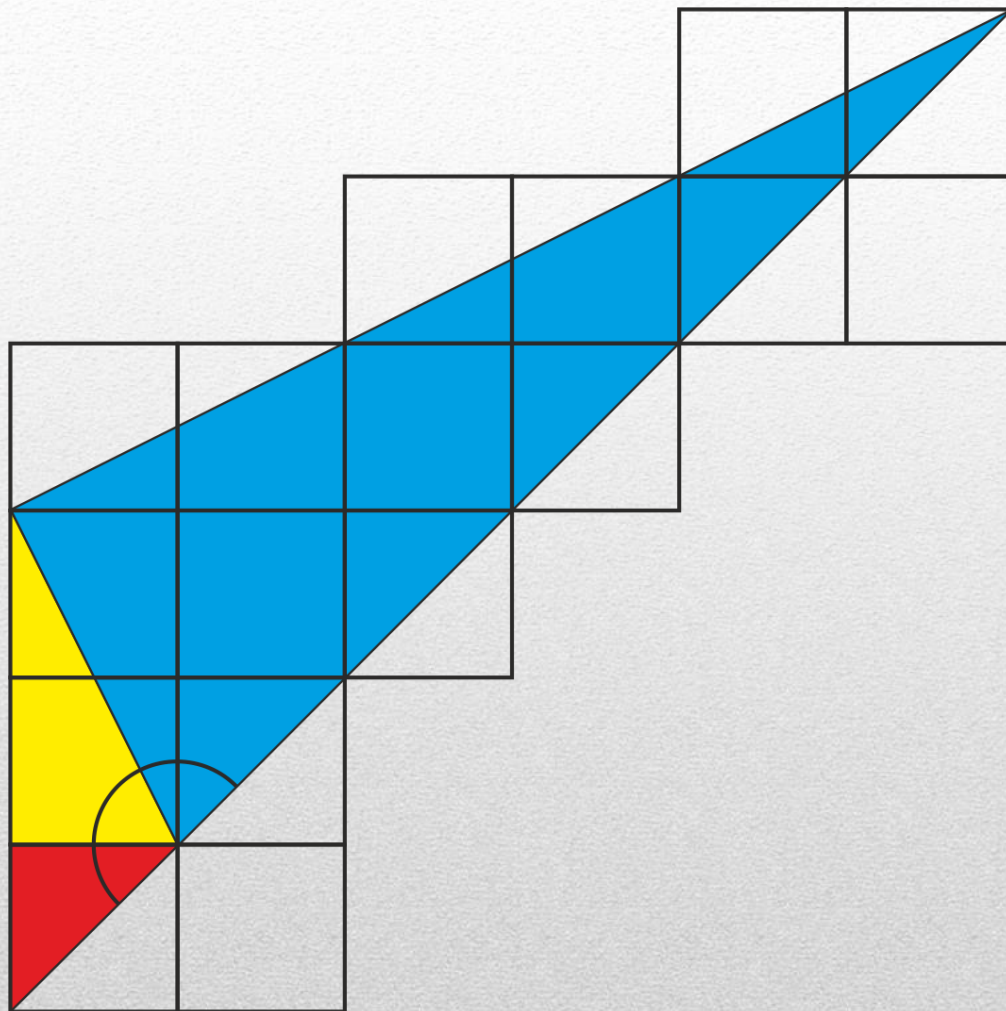


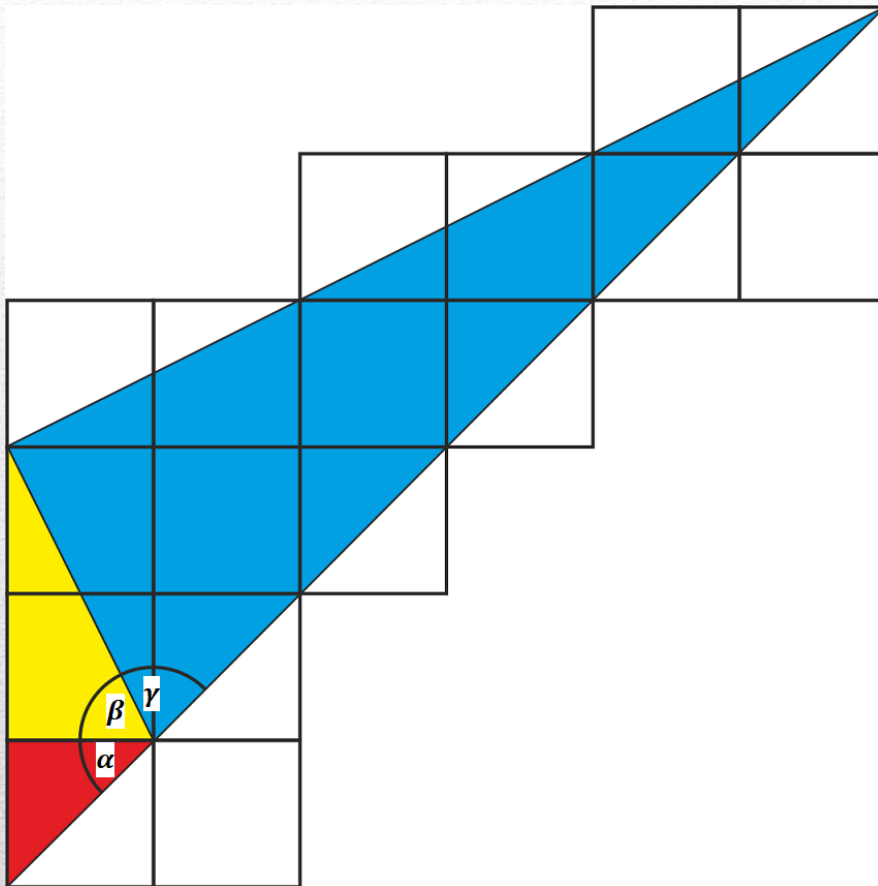


$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

---

(Starożytni Grecy)





$$\text{tg } \alpha = 1, \text{tg } \beta = 2, \text{tg } \gamma = 3$$

$$\alpha = \text{arctg}1$$

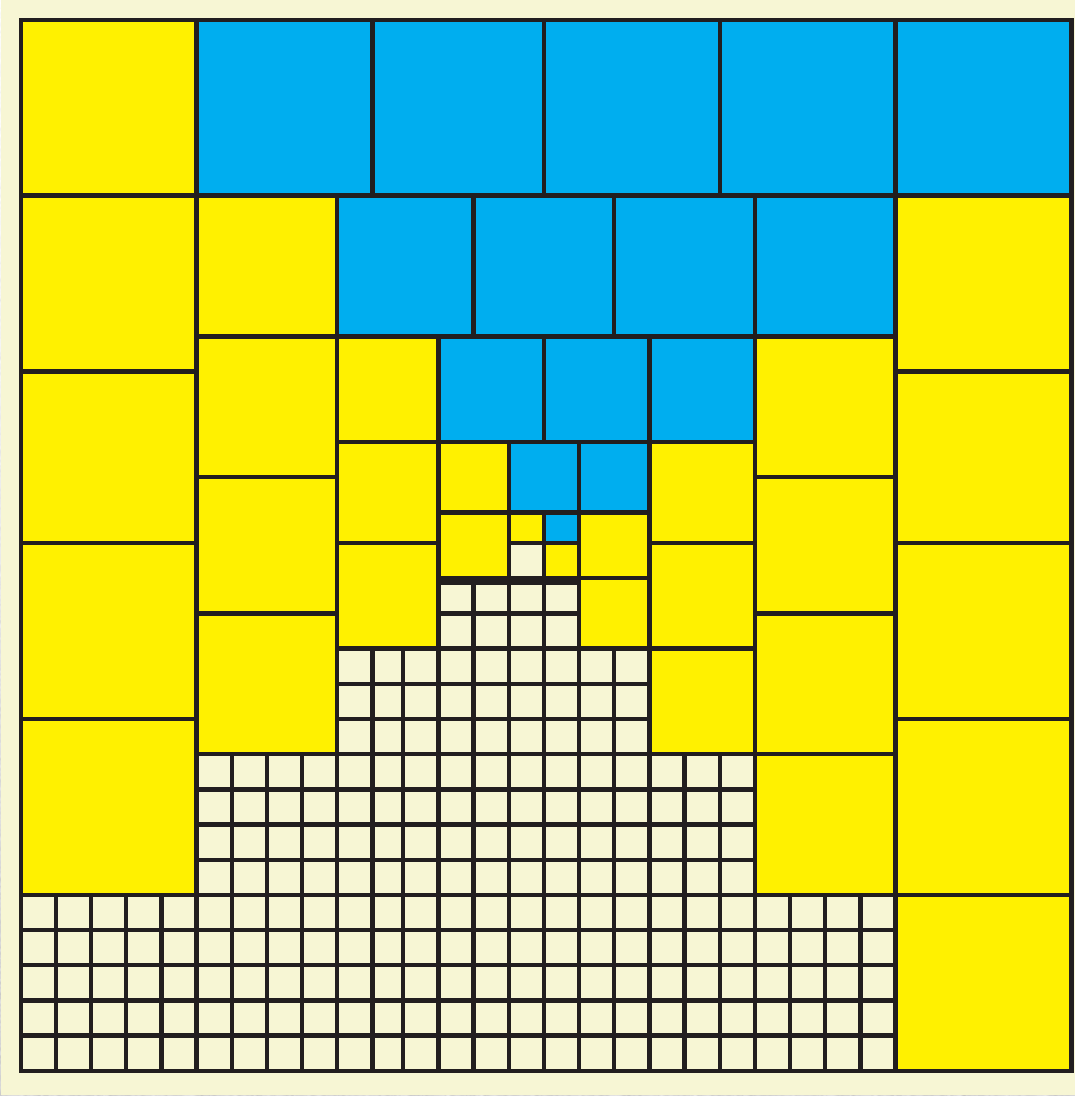
$$\beta = \text{arctg}2$$

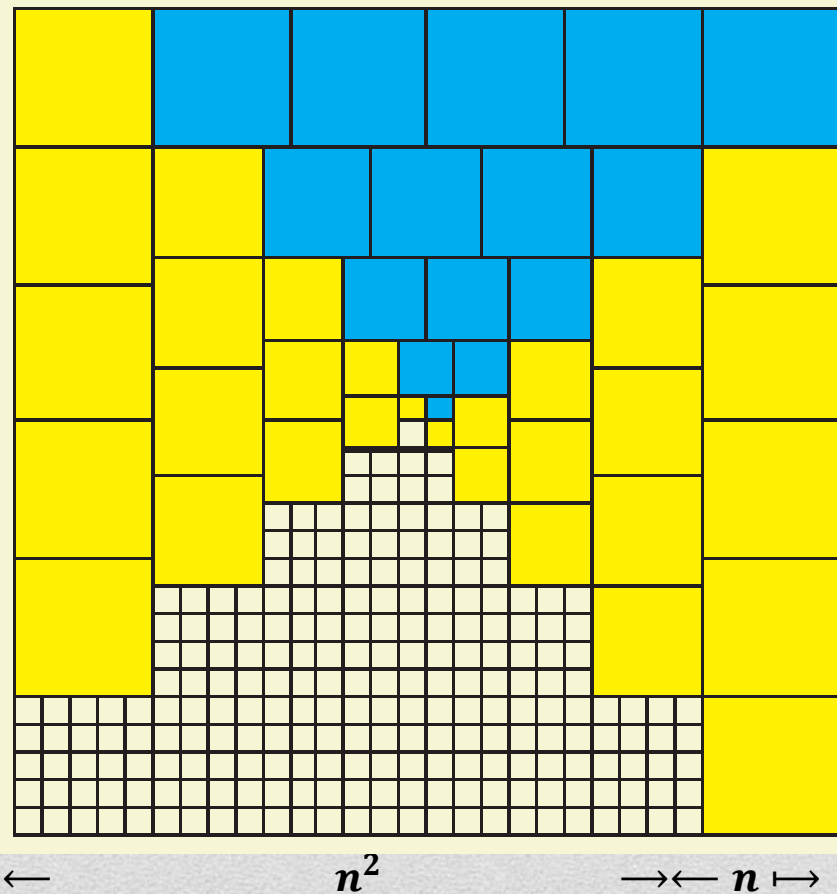
$$\gamma = \text{arctg}3$$

$$\text{arctg}1 + \text{arctg}2 + \text{arctg}3 = \pi$$

---

(Edward M. Harris)

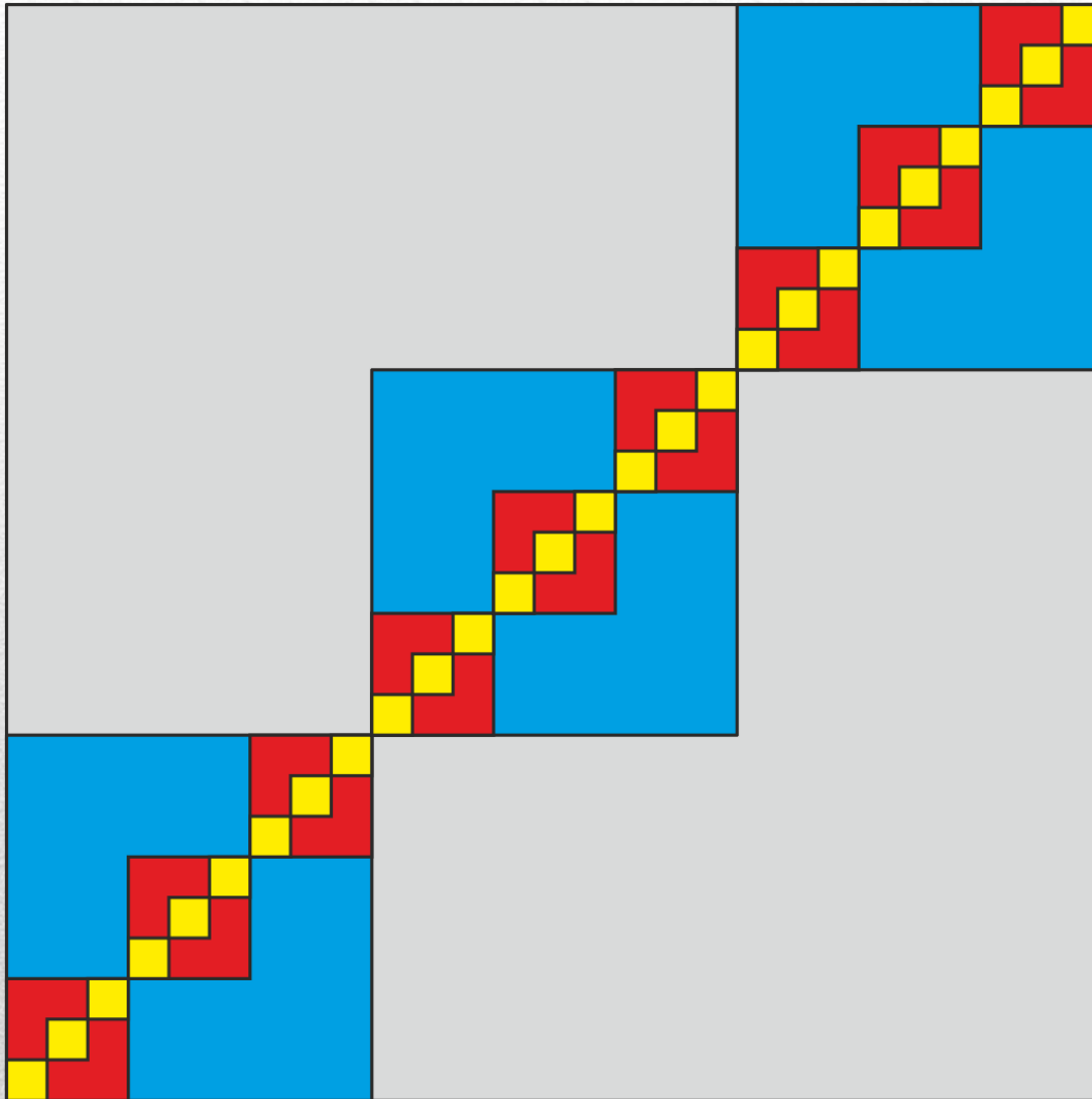


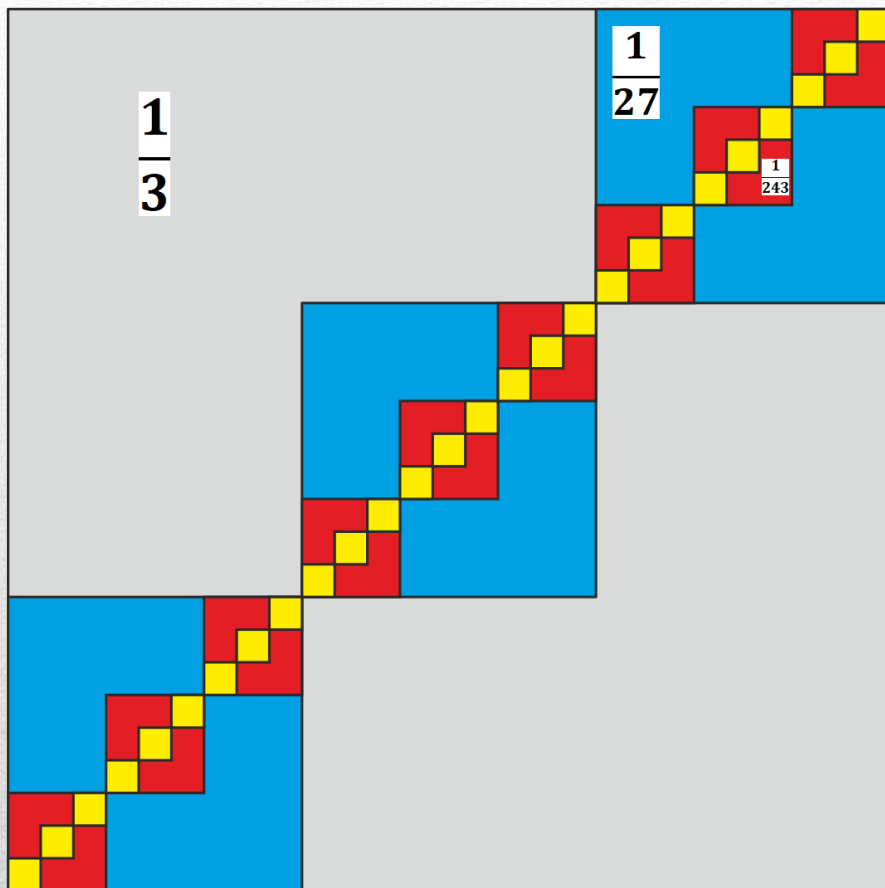


$$4 \cdot (1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot n^2) = (n^2 + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} [n(n + 1)]^2$$

(Antonella Cupillari, Warren Lushbaugh - niezależnie)





$$2 \left( \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 9 \cdot \frac{1}{243} + \dots \right) = 1$$

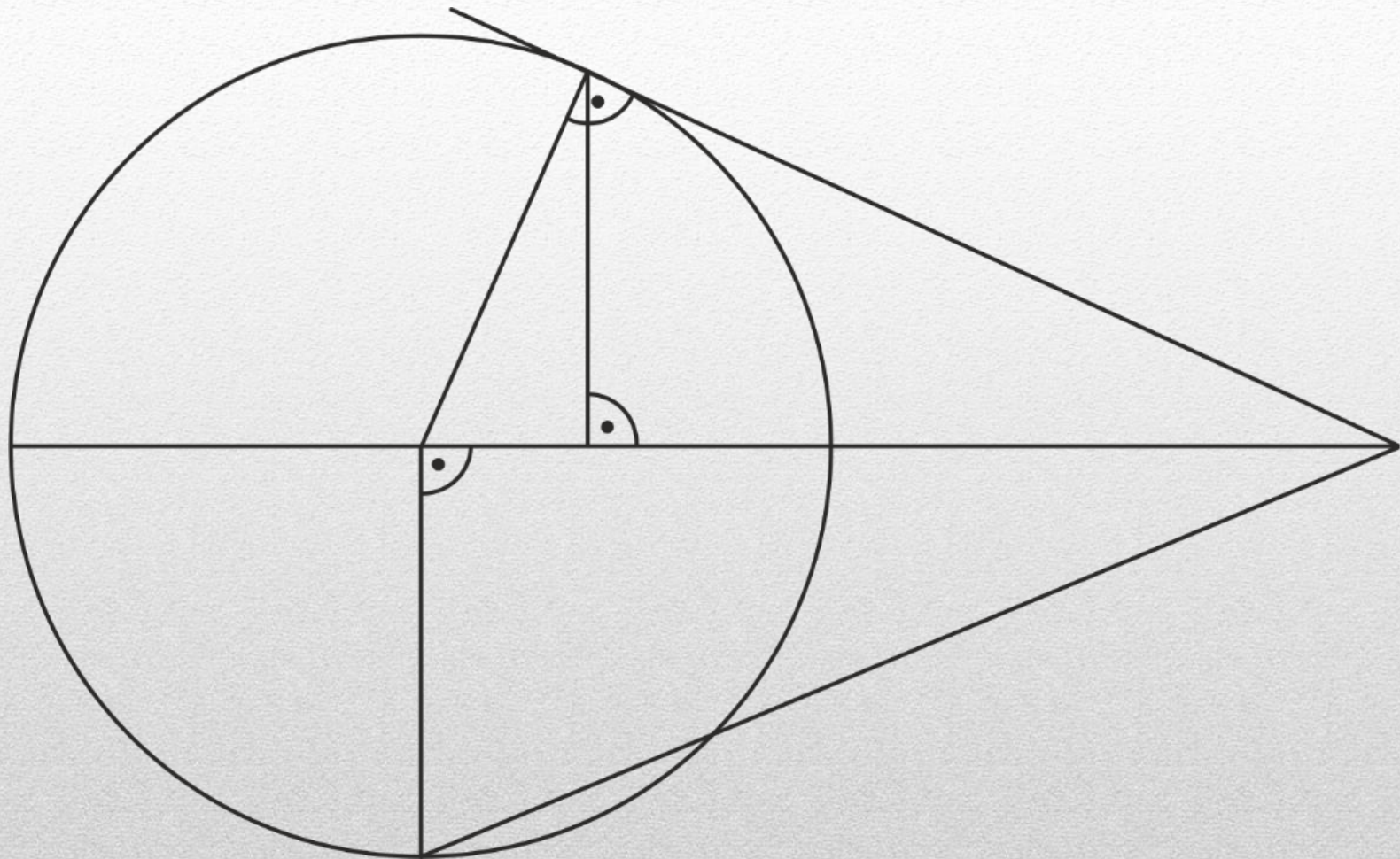
$$2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right) = 1$$

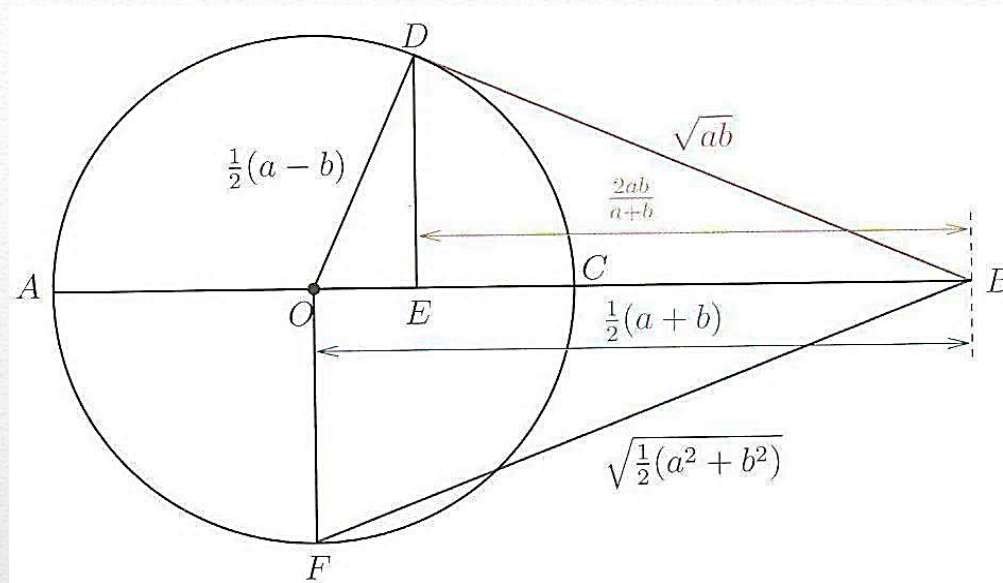
$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

---

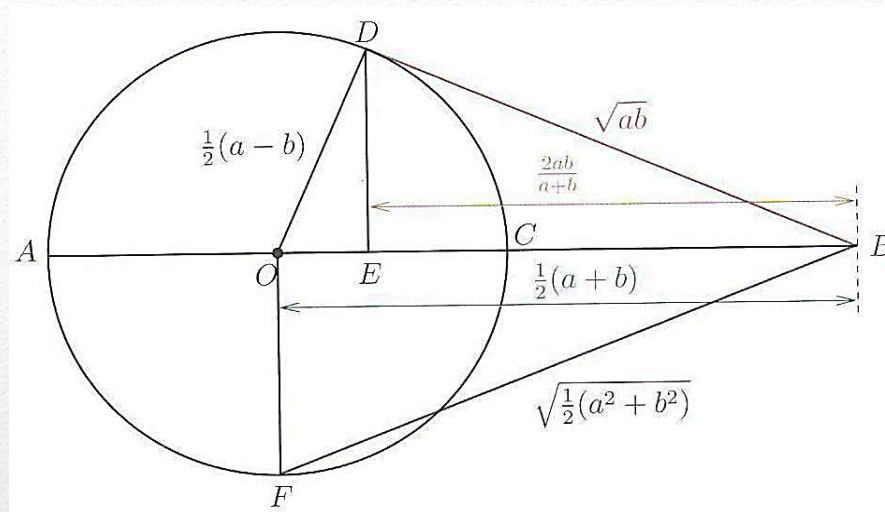
(Elizabeth M. Markham)





Niech  $a$  i  $b$  będą liczbami dodatnimi i niech  $a > b$ . Na odcinku  $AB$  o długości  $a$  obieramy taki punkt  $C$ , że  $|BC| = b$ . Kreślimy okrąg o średnicy  $AC$  i jego środek oznaczamy przez  $O$ . Z punktu  $B$  prowadzimy styczną do górnego półokręgu i oznaczamy przez  $D$  punkt styczności. Przez  $E$  oznaczamy rzut prostokątny punktu  $D$  na odcinek  $AB$ , zaś przez  $F$  – punkt wspólny okręgu i odcinka o początku w punkcie  $O$ , prostopadłego do odcinka  $AB$ . Można wykazać, że

$$|OB| = \frac{a + b}{2}, |BD| = \sqrt{ab}, |EB| = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, |FB| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



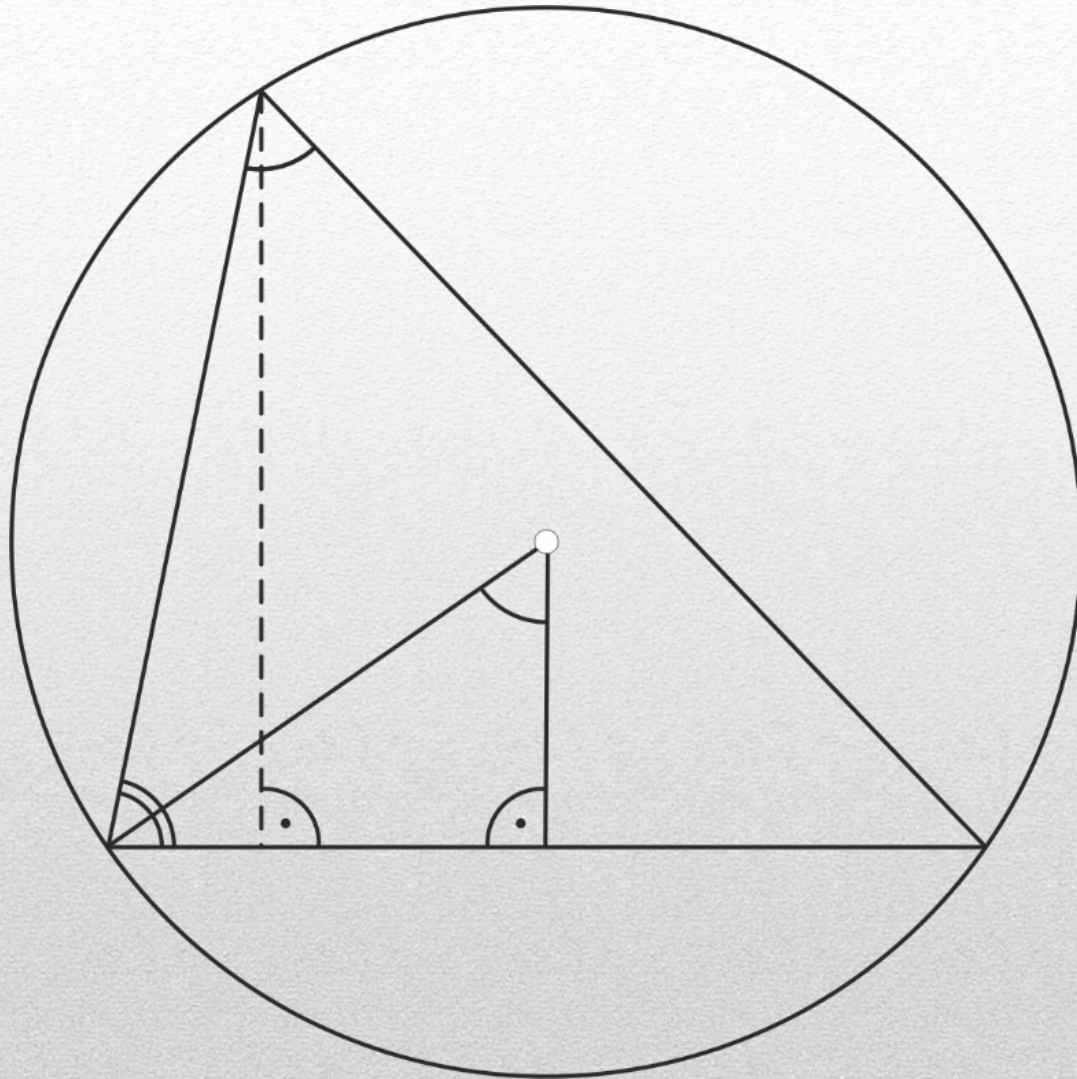
Korzystając w trójkątach prostokątnych  $EBD$ ,  $OBD$  i  $OFB$  z tego, że przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej, otrzymujemy nierówności

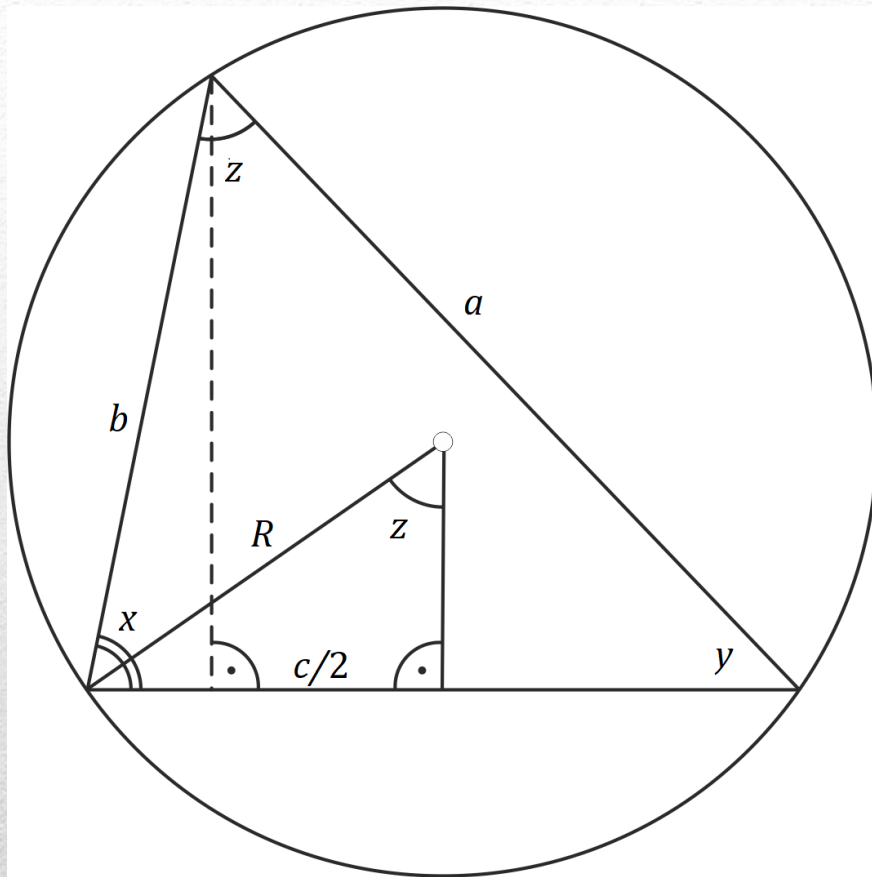
$$|FB| > |OB| > |DB| > |EB|,$$

a stąd

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} > \frac{a + b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

(Roger B. Nelsen)





$$c = a \cdot \cos y + b \cdot \cos x$$

$$\sin z = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R}$$

Analogicznie

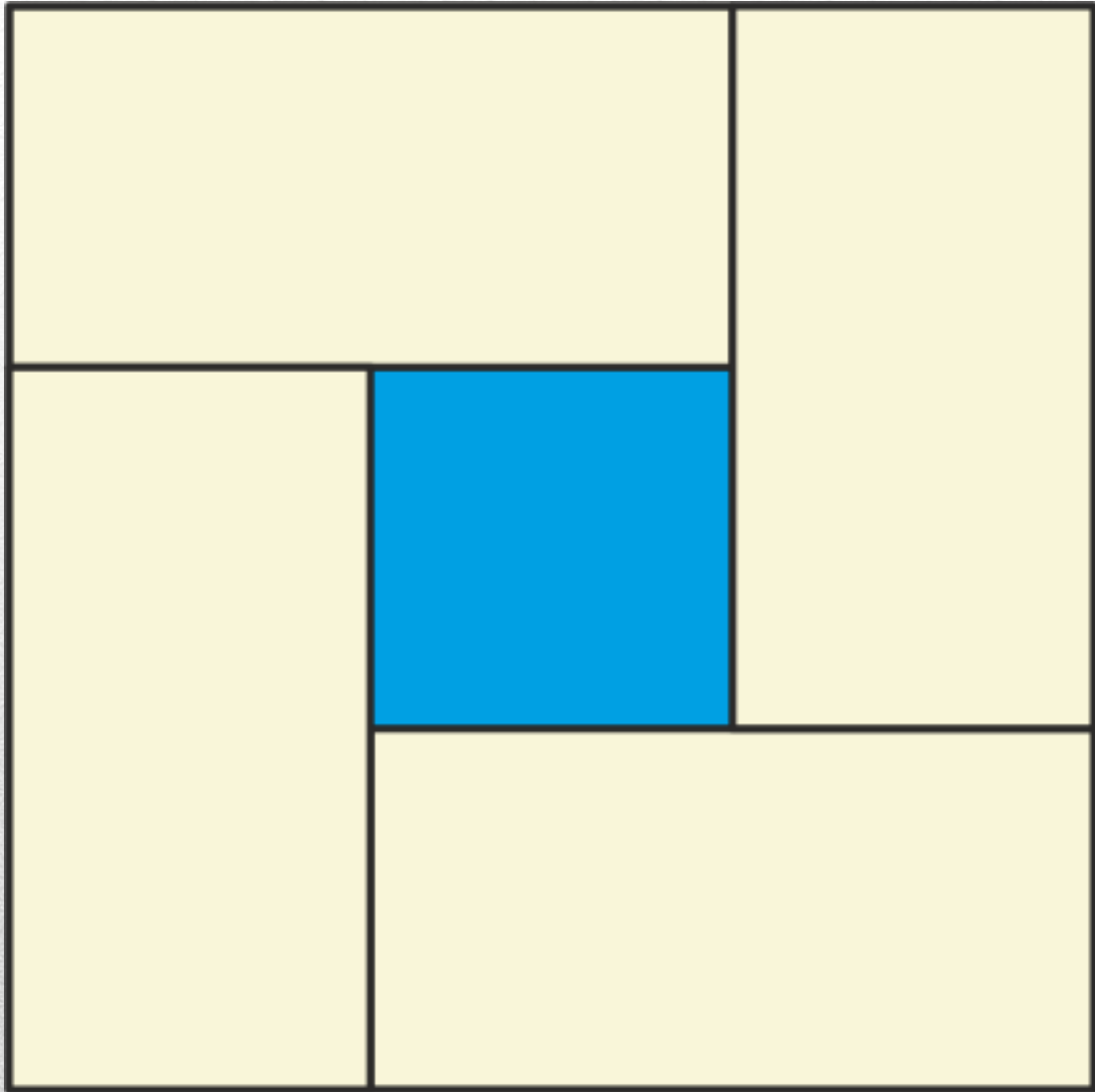
$$\sin x = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}, \sin y = \frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{b}{2R}$$

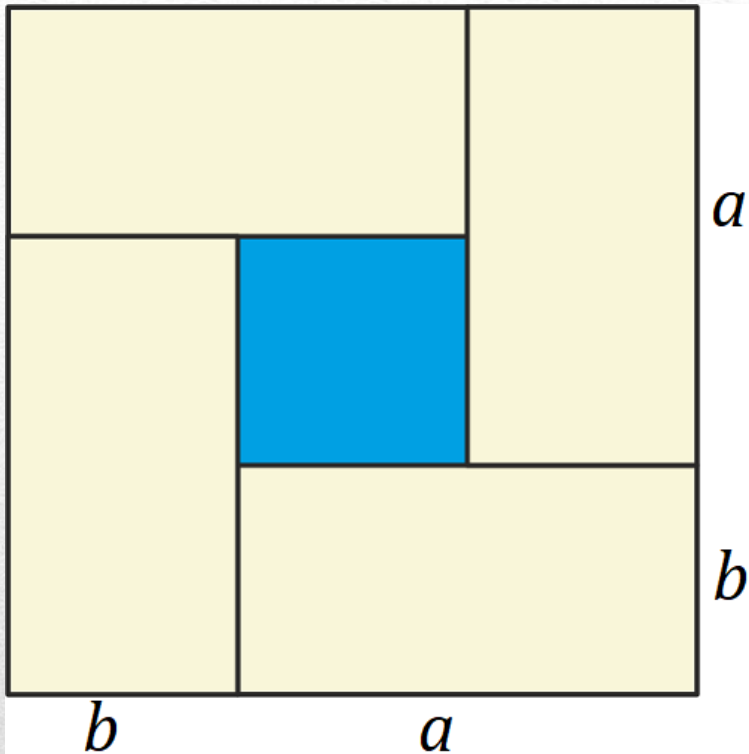
Przyjmując  $R = \frac{1}{2}$  mamy

$$\sin x = a \sin y = b, \sin z = c$$

$$\sin(x + y) = \sin(\pi - (x + y)) = \sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

(Sidney H. Kung)





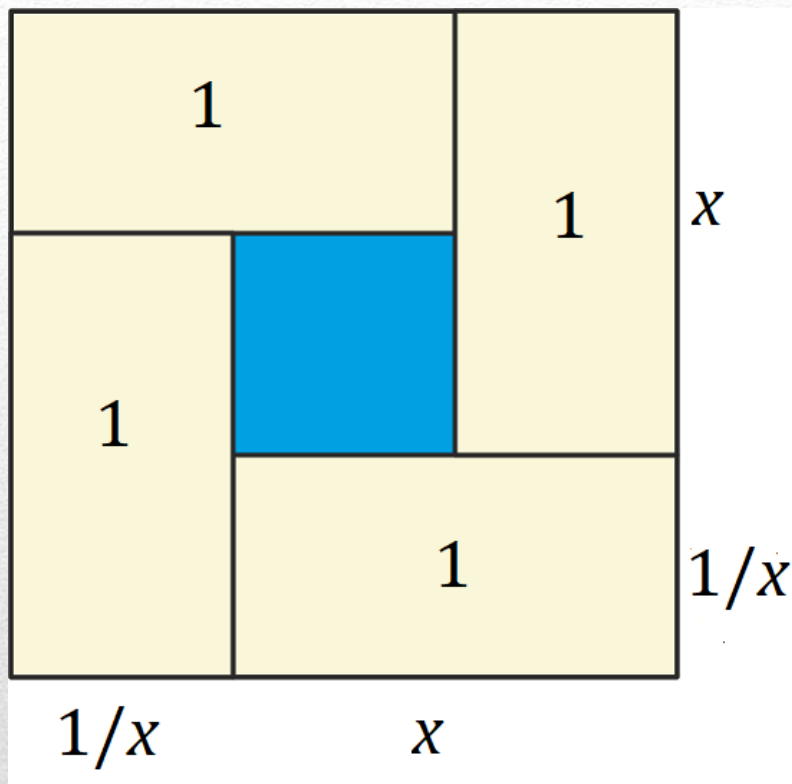
$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{dla } a, b > 0$$

---

(Doris Schattschnieder)

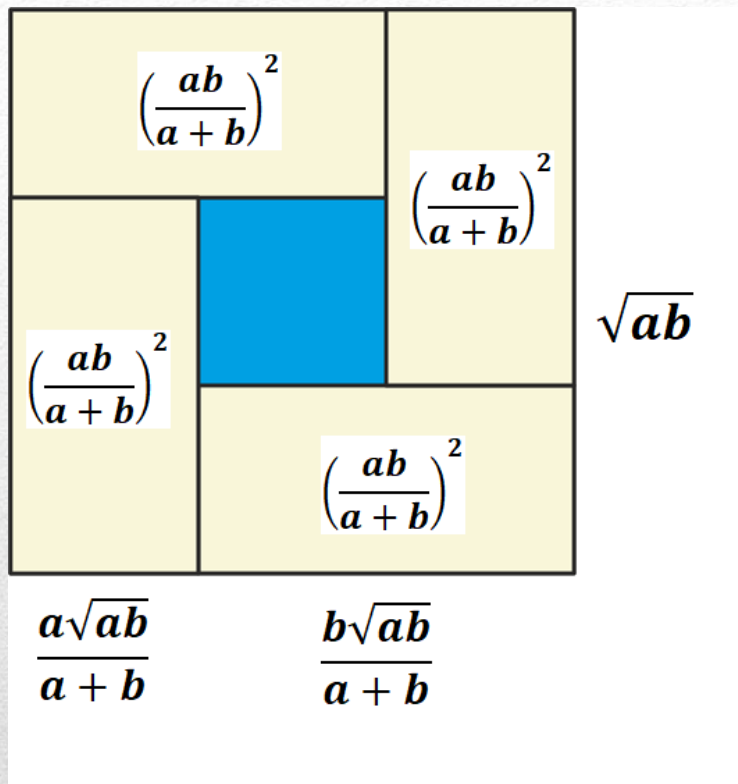


$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{dla } x > 0$$

---

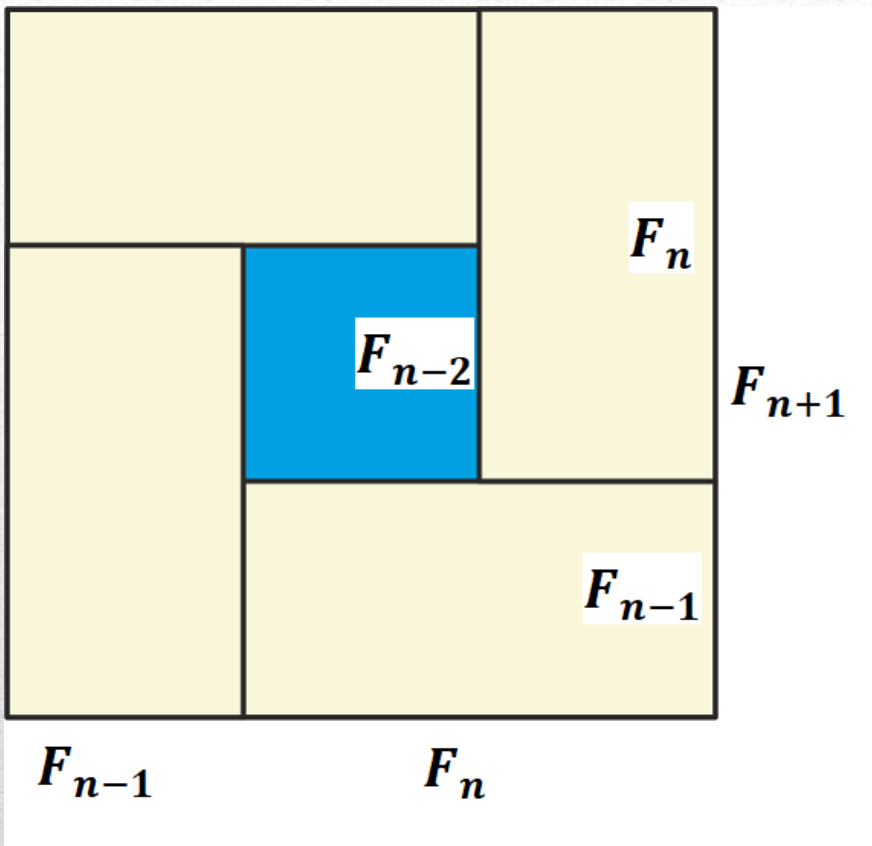
(Roger B. Nelsen)



$$(\sqrt{ab})^2 \geq 4 \left( \frac{ab}{a+b} \right)^2$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad \text{dla } a, b > 0$$



## Liczby Fibonacciego

$$F_1 = F_2 = 1,$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \quad \text{dla } n \geq 3$$


---



**Cóż to czytasz, mości książę?  
Słowa, słowa, słowa... HAMLET**

What do you read, my lord?  
Words, words, words...

---

**Theorem.** *Hamlet was not a mathematician.*

**Proof.** Suppose that Hamlet was a mathematician.  
Then he would simplify

$$2B \quad \text{or} \quad -2B$$

and he would say

$$2|B|.$$

But he did not. This is a contradiction.



# Dziękuję za uwagę

