Środkowa w trójkącie prostokątnym

Konferencja „Elementarne, ale niebanalne?” — Łukasz Bożyk — Sielpia, 26.10.2019

W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB. Wówczas

$$AB = 2\cdot CM \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Punkty K i L są spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktów A i B, a punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że jeżeli $3\cdot AB = 2\cdot CM$, to środkowe trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i B są prostopadłe.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt D leży na boku AC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok AB. Wykaż, że punkty C, E oraz środki odcinków AD i BD leżą na jednym okręgu.

4. Okręgi o_1, o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie C oraz styczne do pewnej prostej ℓ odpowiednio w punktach $A \neq B$. Wykaż, że $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

5. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Na prostej AB, na zewnątrz odcinka AB, znajdują się takie punkty P i Q, że $AP = AK$ oraz $BQ = BL$. Wykaż, że proste PK i QL przecinają się na okręgu ω.

6. Punkty I oraz J są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i dopisanego naprzeciw wierzchołka C w trójkącie ABC. Punkt M jest środkiem odcinka IJ. Wykaż, że $AM = BM$.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów A i B odpowiednio na proste BC i CA. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Wykaż, że $PE = DQ$.

8. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2\cdot BD$.

9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = 90^\circ$. Udowodnij, że obwód czworokąta $ABDE$ jest nie mniejszy od $2\cdot CF$.

10. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku CD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, to $AD + BC \geqslant AB$.

11. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu nie przekracza sumy długości ramion tego trapezu.

12. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt K jest środkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Prosta BK przecina prostą prostopadłą do prostej AB przechodzącej przez punkt A w punkcie L. Wykaż, że $AL = LC$.

13. Kąt rozwarcia stożka jest równy 60°. Odcinek KL jest średnicą podstawy stożka, a punkt M — środkiem pewnej tworzącej. Wyznacz miarę kąta KML.

14. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = 5$, $CD = 3$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Wykaż, że odległość między prostymi AB i CD jest nie większa od 2.

Uwaga. Odległość między prostymi w przestrzeni to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste.

15. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $AC = CD = DB$. Wykaż, że zachodzi nierówność $AB < 2\cdot CD$.

16. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE. Proste BM i CN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

17. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 3\cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Wskazówki do zadań

Własność *środkowej w trójkącie prostokątnym* oznaczmy przez $(*)$.

1. Korzystając z $(*)$ zauważ, że $MK = ML$. Wykaż ponadto, że $\sphericalangle KML = 60°$.

2. Zauważ, że w trójkącie środkowe przecinają się w stosunku $2:1$ i wykorzystaj $(*)$.

3. Oznacz środki odcinków AD, BD odpowiednio przez M, N i korzystając z $(*)$ wykaż, że

$$\sphericalangle MED = \sphericalangle MDE, \quad \sphericalangle NED = \sphericalangle NDE, \quad \sphericalangle NCD = \sphericalangle NDC.$$

Wywnioskuj stąd, że $\sphericalangle MEN + \sphericalangle MCN = 180°$.

4. Poprowadź wspólną styczną okręgów w punkcie C, wykorzystaj *twierdzenie o odcinkach stycznych* i użyj $(*)$.

5. Oznacz punkt styczności ω i AB przez M, a przez N — taki punkt ω, że MN jest jego średnicą. Korzystając z *twierdzenia o odcinkach stycznych* oraz $(*)$ wykaż, że $\sphericalangle MKP = \sphericalangle MLQ = 90°$ i wywnioskuj stąd, że N jest szukanym punktem przecięcia.

6. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe i skorzystaj z $(*)$.

7. Oznacz przez M środek odcinka AB i korzystając z $(*)$ wykaż, że $MD = ME$. Zauważ ponadto, że M leży na symetralnej odcinka PQ i wywnioskuj stąd przystawanie trójkątów DQM oraz EPM.

8. Dorysuj środki M, N odpowiednio odcinków AC, CE i wykorzystując *twierdzenie o linii środkowej* i $(*)$ zauważ, że

$$AC + CE + EA = 2 \cdot (BM + MN + ND) \geqslant 2 \cdot BD$$

powołując się na *uogólnioną nierówność trójkąta*.

9. Oznacz przez M, N odpowiednio środki odcinków AE, BD. Zauważ, korzystając z *uogólnionej nierówności trójkąta* i $(*)$, że

$$2 \cdot CF \leqslant 2 \cdot FM + 2 \cdot MN + 2 \cdot NC = AE + 2 \cdot MN + BD.$$

Następnie skorzystaj z nierówności $2 \cdot MN \leqslant AB + DE$, którą można udowodnić następująco. Oznacz przez K środek odcinka AD i wykorzystaj *twierdzenie o linii środkowej* dla trójkątów ABD, ADE oraz *nierówność trójkąta* dla KMN.

10. Oznacz przez N środek boku AB, a następnie skorzystaj z $(*)$ oraz szacowania z zadania poprzedniego.

11. Oznacz trapez przez $ABCD$ w taki sposób, aby AB i CD były jego podstawami, przez M i N odpowiednio środki ramion AD i BC, a przez P — punkt przecięcia przekątnych trapezu. Skorzystaj z *nierówności trójkąta* dla MNP, równości $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$ oraz z własności $(*)$.

12. Oznacz przez D punkt przecięcia prostych AL i BC, powołując się na *twierdzenie Talesa* uzasadnij, że L jest środkiem odcinka AD i ostatecznie skorzystaj z $(*)$.

13. Oznacz środek podstawy stożka przez O, zauważ, że $OK = OM = OL$ i wykorzystaj $(*)$.

14. Zauważ, że wskazując jakikolwiek odcinek długości 2 łączący krawędzie AB i CD otrzymasz tezę. W tym celu oznacz ich środki odpowiednio przez M i N, i wykorzystując *twierdzenie Pitagorasa* oraz $(*)$ uzasadnij, że $MN = 2$.

15. Oznacz przez M środek krawędzi AB i korzystając z $(*)$ zauważ, że trójkąty równoramienne AMC, CMD, DMB są przystające. Następnie korzystając z *nierówności trójkąta dla kąta trójściennego* wykaż, że kąt między ramionami w każdym z tych trójkątów jest większy od $60°$. W końcu skorzystaj z tego, że w trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok.

16. Oznacz przez K i L punkty styczności okręgu dopisanego odpowiednio z prostymi AB i AC. Zauważ, że do rozwiązania zadania wystarczy dowieść równości $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MCL$. W tym celu wykaż, że trójkąty KDM oraz ENL są przystające (np. zauważając przystawanie trójkątów ADJ i AEJ i stosując $(*)$). Następnie korzystając *z twierdzenia o odcinkach stycznych* udowodnij, że $DB = LC$ i zauważ, że równość ta wraz z przystawaniem trójkątów KDM i ENL implikuje przystawanie trójkątów BDM i CLN.

17. Oznacz przez N środek odcinka AB i zauważ, że jest on również środkiem odcinka PQ. Korzystając z własności *linii środkowej w trójkącie* zauważ, że $2 \cdot MN = PQ$ i użyj $(*)$.

Kontakt: `lukaszbozyk@gmail.com`

Materiał opracowany wspólnie z T. Przybyłowskim