Konferencja SEM - Sielpia 2019

Dwusieczna kąta w zadaniach olimpijskich

Na początek sformułuję kilka własności dwusiecznej kąta, a także dwusiecznych kąta w trójkącie, które dalej nazwę „faktami”.

Fakt 1. Punkt leżący w obszarze kąta (niezerowego) leży na dwusiecznej tego kąta wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo odległy od ramion tego kąta.

Fakt 2. Dwusieczna kąta zawiera się w osi symetrii tego kąta.

Fakt 3. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Fakt 4. Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta i dwusieczne kątów zewnętrznych przy pozostałych dwóch wierzchołkach przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta.

Fakt 5. Załóżmy, że w trójkącie *ABC* dwusieczna kąta przy wierzchołku *A* przecina bok *BC* w punkcie *D*.

a) Punkt *I*, leżący na odcinku *AD*, jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy kąt wypukły *BIC* ma miarę $90^{\circ}+\frac{\propto}{2}$, gdzie $\alpha=|\sphericalangle BAC|$.

b) Punkt *J*, leżący na dwusiecznej $AD^{\rightarrow}$ na zewnątrz trójkąta *ABC*, jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy kąt wypukły *BJC* ma miarę $90^{\circ}-\frac{\propto}{2}$.

Fakt 6. W trójkącie *ABC* dwusieczna kąta przy wierzchołku *A* i symetralna boku *BC* przechodzą przez środek łuku *BC*, niezawierającym punktu *A*, okręgu opisanego na tym trójkącie.

Fakt 7. (tzw. twierdzenie o „trójliściu”) Jeżeli dwusieczna kąta *BAC* w trójkącie *ABC* przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie *W*, to punkt *I*, leżący na tej dwusiecznej wewnątrz trójkąta *ABC*, jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy *WB* = *WI* = *WC*.

Uwaga. W tym zestawie nie ma zadań, w których stosowane byłoby twierdzenie „o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie”, stosowana byłaby trygonometria, stosowane byłyby własności związane z tzw. potęgą punktu względem okręgu bądź też należałoby liczyć długości odcinków. To są umiejętności na kolejny zestaw zadań związanych z dwusieczną kąta. Natomiast w rozwiązaniach, oprócz podanych „faktów”, mogą być wykorzystywane wiadomości o kątach wpisanych w okrąg, kątach środkowych, czworokątach wpisanych w okrąg.

Wszelkie uwagi dotyczące zadań i szkiców rozwiązań można przesyłać na adres

zbylut1@gazeta.pl

Zadania

1. (LXI OM-II etap) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykaż, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie,

2. W trójkącie ABC punkty M i N są rzutami prostokątnymi wierzchołka A odpowiednio na dwusieczne kątów ABC i ACB. Wykaż, że $MN \parallel BC$.

3. Wykaż, że rzuty prostokątne wierzchołka A trójkąta ABC na dwusieczne kątów wewnętrznych i kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i C leżą na jednej prostej.

4. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CH do przeciwprostokątnej AB. Dwusieczne kątów CAB i BCH przecinają się w punkcie M, a dwusieczne kątów CBA i ACH przecinają się w punkcie N. Wykaż, że $MN \parallel AB$.

5. (VIII OMG – zawody I stopnia) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $AS = BS$.

6. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są jednakowej długości i przecinają się w punkcie O. Punkt P, wewnątrz kąta AOD, jest taki, że $CD \parallel BP$ i $AB \parallel CP$. Wykaż, że punkt P leży na dwusiecznej kąta AOD.

7. Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E, F. Załóżmy, że odcinek EH jest wysokością w trójkącie DEF. Wykaż, że punkt H leży na dwusiecznej kąta BAC.

8. Punkty D i E, leżące odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC, są takie, że $AE = BD$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że punkt Q, symetryczny do punktu P względem środka odcinka AB, leży na dwusiecznej kąta ACB.

9. Punkty P i Q, leżące odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, są takie, że $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się powtórnie w punkcie $S \neq R$. Wykaż, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC.

10. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt K, leżący na półprostej $DC^{\rightarrow}$ jest taki, że $DK = DB$. Punkt M jest środkiem odcinka BK. Wykaż, że $AM^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta BAC.

11. Na okręgu wpisanym w trójkąt ABC, stycznym do boku AC w punkcie S, jest taki punkt P, że środki odcinków AP i CP leżą na tym okręgu. Wykaż, że $PS^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta APC.

12. Wykaż, że jeżeli okrąg, wpisany w odcinek koła o cięciwie AB, jest styczny do łuku tego odcinka w punkcie C, a do cięciwy AB w punkcie D, to $CD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ACB.

13. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości BM i CN. Załóżmy, że dwusieczne kątów BMC i BNC przecinają się w punkcie P. Wykaż, że trójkąt BPC jest prostokątny i równoramienny.

14. W trójkącie ABC środkowa CD i dwusieczna $AE^{\rightarrow}$ $(E \in BC)$ są prostopadłe. Wiadomo, że punkty A, C, D, E leżą na jednym okręgu. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

15. W trójkącie równoramiennym *ABC*, o podstawie *BC*, poprowadzono dwusieczną $\overrightarrow{BD}$ ($D \in AC$). Okazało się, że $BD + DA = BC$. Wyznacz kąty trójkąta *ABC*.

16. (finał LXIX OM) Dany jest trójkąt ostrokątny *ABC*, w którym *AB* < *AC*. Dwusieczna kąta *BAC* przecina bok *BC* w punkcie *D*. Punkt *M* jest środkiem boku *BC*. Wykaż, że prosta, przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach *ABC* i *ADM*, jest równoległa do prostej *AD*.

17. Na boku *BC* kwadratu *ABCD* wybrano punkt *M*, a na boku *CD* punkt *K* tak, że $|\sphericalangle MAK| = 45^\circ$. Wykaż, że odległość punktu *A* od prostej *MK* jest równa długości boku kwadratu.

18. Na bokach *BC* i *CD* kwadratu *ABCD* obrano odpowiednio punkty *M* i *K* tak, że $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle CKM| = 30^\circ$. Wyznacz miarę kąta *AKD*.

19. Długość boku kwadratu *ABCD* jest równa 1. Na bokach *AB* i *AD* wybrano punkty *P* i *Q* tak, że obwód trójkąta *APQ* jest równy 2. Wykaż, że $|\sphericalangle PCQ| = 45^\circ$.

20. W kwadracie *ABCD* na boku *BC* obrano punkt *M*, a na boku *CD* punkt *N* tak, że $|\sphericalangle MAN| = 45^\circ$. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie *AMN* leży na przekątnej *AC*.

21. (finał XIII OMJ) Punkt *M* jest środkiem boku *AB* trójkąta równobocznego *ABC*. Punkty *D* i *E* leżą odpowiednio na bokach *AC* i *BC*, przy czym $|\sphericalangle DME| = 60^\circ$. Wykaż, że $AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB$.

22. W trójkącie *ABC* dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach *A* i *B* przecinają boki *BC* i *AC* odpowiednio w punktach *D* i *E*. Wiedząc, że $AE + BD = AB$ wyznacz miarę kąta *ACB*.

23. W trójkącie równoramiennym *ABC*, o podstawie *BC*, punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wiedząc, że $BC = AB + AI$ wyznacz miarę kąta *BAC*.

24. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczne $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BE}$ ($D \in BC, E \in AC$). Okazało się, że $\overrightarrow{DE}$ jest dwusieczną kąta *ADC*. Wyznacz miarę kąta *BAC*.

25. Dany jest trójkąt równoramienny *ABC*, w którym *AB* = *BC*. Na boku *AB* obrano punkt *M* taki, że *CM* = *AC*, a na boku *BC* obrano punkt *N* taki, że *BN* = *MN*. Dwusieczna kąta *CNM* przecina odcinek *CM* w punkcie *P*. Wykaż, że $BP \perp AC$.

26. W trójkącie *ABC*, w którym $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$, dwusieczne kątów przy wierzchołkach *A, B* i *C* przecinają boki *BC, CA* i *AB* odpowiednio w punktach *D, E, F*. Wykaż, że $|\sphericalangle EDF| = 90^\circ$.

27. W trójkącie *ABC* punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a punkt *J* jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku *BC*. Wykaż, że

$$AI \cdot AJ = AB \cdot AC.$$

28. W trójkącie *ABC* bok *AC* jest najdłuższy. Na przedłużeniach boków *AB* i *CB*, poza punkt *B*, obrano odpowiednio punkty C_1 i A_1 takie, że $AC = AC_1 = CA_1$. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ABA_1 i CBC_1 przecinają się na dwusiecznej kąta *ABC*.

29. W trójkącie *ABC* kąt *BAC* ma miarę 60°. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach *B* i *C* przecinają odpowiednio bok *AC* w punkcie *D* i bok *AB* w punkcie *E*. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu *A* względem prostej *DE* leży na boku *BC*.

30. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*. Wiadomo, że $AI = BC$ i $|\sphericalangle ICA|$=2$\cdot$ $|\sphericalangle IAC|$. Wyznacz miarę kąta *ABC*.

31. (XI OMJ – pierwszy etap) Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg ω. Punkt *X* jest środkiem tego łuku *BC* okręgu ω, który nie zawiera punktu *A*, a punkt *Y* jest środkiem tego łuku *CA* okręgu ω, który nie zawiera punktu *B*. Wykaż, że prosta *XY* jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*.

32. Na trójkącie *ABC* opisano okrąg. Punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia dwusiecznych kątów *ABC* i *ACB* z tym okręgiem. Wiadomo, że odcinek EF jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*. Wyznacz miarę kąta *BAC*.

33. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*, zaś punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta. Wykaż, że środek odcinka IJ leży na okręgu opisanym na trójkącie *ABC*.

34. Czworokąt *ABCD* jest wpisany w okrąg ω. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* i prosta *AI* przecina okrąg ω w punkcie $M \neq A$. Punkt J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ADC* i prosta *AJ* przecina okrąg ω w punkcie $N \neq A$. Wykaż, że jeśli $IM = JN$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC|$.

35. Dwa okręgi przecinają się w punktach *A* i *B*. Środek O jednego z nich leży na drugim okręgu. Na drugim okręgu wybrano punkt S taki, że odcinek *SO* przecina pierwszy okrąg w punkcie *P*. Wykaż, że punkt *P* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABS*.

36. Trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg. Dwusieczna kąta *BAC* przecina ten okrąg w punkcie *D*. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*, punkt K jest środkiem odcinka *BI*, punkt M jest punktem przecięcia się prostych *DK* i *AB*. Wykaż, że $MI \parallel BC$.

37. Na trójkącie *ABC* opisano okrąg. Dwusieczne kątów *BAC* i *BCA* przecinają się w punkcie *I* oraz przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach M i N. Punkt *P* jest środkiem łuku *BAC* tego okręgu. Odcinki *MN* i *BP* przecinają się w punkcie *S*. Wykaż, że $|\sphericalangle AIS|$= 90°.

38. W pięciokącie *ABCDE*, wpisanym w okrąg o środku *I*, prawdziwe są równości $AB = BC$ i $CD = DE$. Odcinki *AD* i *BE* przecinają się w punkcie *P*. Odcinek *BD* przecina odcinki *CA* i *CE* odpowiednio w punktach *Q* i *R*. Wykaż, że trójkąt *PQR* jest równoramienny.

39. W trójkąt *ABC* wpisano okrąg o środku I i promieniu r. Prosta *CI* przecina okrąg o promieniu *R*, opisany na trójkącie *ABC*, w punkcie D. Wykaż, że $CI \cdot DI = 2Rr$.

40. Na trójkącie prostokątnym *ABC*, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, opisano okrąg. Na krótszych łukach *AC* i *BC* tego okręgu odpowiednio obrano ich środki K i L. Odcinek *KL* przecina przyprostokątną *AC* w punkcie N. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*. Wyznacz miarę kąta *NIC*.

41. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*, punkt M jest środkiem boku *AC*, punkt W jest punktem przecięcia prostej *CI* z okręgiem opisanym na trójkącie *ABC*. Okazało się, że $|\sphericalangle AIM| = 90^\circ$. Wyznacz stosunek $\frac{CI}{IW}$.

42. W trójkącie ostrokątnym ABC proste, symetryczne do prostej AB względem prostych AC i BC, przecinają się w punkcie D. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej CD.

43. Wysokości trójkąta ostrokątnego nierównoramiennego ABC przecinają się w punkcie H. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCH. Środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na odcinku OA. Wyznacz miarę kąta BAC.

44. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie BIC wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

45. W czworokącie wypukłym $ABCD$ półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie K. Punkt P, leżący na dwusiecznej kąta AKD, jest taki, że proste BP i CP przechodzą odpowiednio przez środki odcinków AC i BD. Wykaż, że $AB = CD$.

46. Dwusieczne dwóch kątów trójkąta przecinają się pod kątem 60°. Wykaż, że jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 60°.

47. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boku AC w punkcie K. Przez punkt K prowadzimy prostą, prostopadłą do boku BC, która przecina dwusieczną kąta ACB w punkcie D. Wykaż, że $KI = KD$.

48. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykaż, że jeśli $CA + AI = CB$, to $|\sphericalangle CAB| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC|$.

49. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach D, E, F. Wykaż, że $EF \perp AD$.

50. Wykaż, że jeżeli prosta dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach i równych obwodach, to przechodzi przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

51. Wykaż, że jeżeli prosta dzieli wielokąt, w który można wpisać okrąg, na dwa wielokąty o równych polach i równych obwodach, to przechodzi przez środek tego okręgu..

52. W czworokącie wypukłym $ABCD$ półproste $DA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie E, a półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CD^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie F. Wykaż, że jeżeli dwusieczne kątów CED i BFC są prostopadłe, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

53. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ostrokątnego ABC obrano odpowiednio punkty C_1, A_1, B_1 tak, że $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Wykaż, że ortocentrum trójkąta $A_1B_1C_1$ leży na dwusiecznej kąta BAC.

54. Punkt D na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC jest taki, że półokrąg o średnicy AD jest styczny do przyprostokątnej BC w punkcie M. Wykaż, że $AM^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta BAC.

55. Styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC, przechodząca przez punkt B, przecina prostą AC w punkcie P. Okrąg o środku P i promieniu PB przecina bok AC w punkcie Q. Wykaż, że $BQ^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ABC.

56. Czworokąt $ABCD$, wpisany w okrąg, jest taki, że $AD + BC = AB$. Wykaż, że dwusieczne kątów ADC i BCD przecinają się na prostej AB.

57. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach M i N. Prosta MN przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie P. Wykaż, że $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$.

58. Z wierzchołków B i C trójkąta ABC opuszczono prostopadłe BM i CN odpowiednio na dwusieczne kątów ACB i ABC. Wykaż, że prosta MN przecina boki AB i AC w punktach ich styczności z okręgiem wpisanym w trójkąt ABC.

59. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. X i Y są punktami przecięcia prostej DE odpowiednio z dwusiecznymi kątów ACB i ABC. Punkt Z jest środkiem boku BC. Wykaż, że $XZ = YZ$.

60. W trójkącie ABC dwusieczne kątów BAC i ABC przecinają okrąg o średnicy AB odpowiednio w punktach D i E. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach F i G. Wykaż, że punkty D, E, F, G są współliniowe.

Szkice rozwiązań

1. Załóżmy, że półproste $DE^{\rightarrow}$ i $BA^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie F, a półproste $DC^{\rightarrow}$ i $AB^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie *G*. Trójkąty *AFE* i *BGC* są równoramienne, więc punkt przecięcia się symetralnych boków *EA* i *BC* jest też punktem przecięcia się dwusiecznych kątów GFD i *FGD* w trójkącie *DFG*. Dlatego dwusieczna kąta *GDF* (i także kąta *CDE*) przechodzi przez ten punkt.

2. Ponieważ dwusieczna kąta zawiera się w osi symetrii tego kąta, więc punkty M_1 i N_1, symetryczne do punktu *A*, odpowiednio względem dwusiecznych kątów *ABC* i *ACB*, leżą na prostej *BC*, a wtedy odcinek *MN* jest linią środkową w trójkącie AM_1N_1, więc $MN \parallel M_1N_1$ i także $MN \parallel BC$.

3. Załóżmy, że punkty *M* i *N* są rzutami prostokątnymi punktu *A* odpowiednio na dwusieczne kątów wewnętrznych *ABC* i *ACB*, zaś punkty *P* i *Q* są rzutami prostokątnymi punktu *A* odpowiednio na dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach *B* i *C*, leżących po tej stronie prostej *BC* co wierzchołek *A*. Podobnie, jak w rozwiązaniu zadania **2**, stwierdzamy, że $MN \parallel BC$ i $MQ \parallel BC$, więc punkty *M, N* i *Q* leżą na jednej prostej. Analogicznie stwierdzamy, że punkty *M, N* i *P* leżą na jednej prostej.

4. Załóżmy, że $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Wtedy $|\sphericalangle ACH| = \beta$, $|\sphericalangle BCH| = \alpha$, i $|\sphericalangle CAM| + |\sphericalangle ACM| = \frac{\alpha}{2} + \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha + \beta = 90^{\circ}$, więc $|\sphericalangle AMC| = 90^{\circ}$ i punkt *M* jest rzutem prostokątnym wierzchołka *C* na dwusieczną $AM^{\rightarrow}$. Analogicznie punkt *N* jest rzutem prostokątnym wierzchołka *C* na dwusieczną $BN^{\rightarrow}$. Z zadania **2** wynika, że $MN \parallel AB$.

5. Obierzmy na boku *CD* punkt *E* taki, że *CE* = *CB* i *DE* = *DA*. Wtedy trójkąty *BCE* i *ADE* są równoramienne, więc dwusieczne kątów *BCD* i *CDA* zawierają się odpowiednio w symetralnych odcinków *BE* i *AE*. Ponieważ punkt *S* leży na tych symetralnych, więc *SB* = *SE* i *SA* = *SE*. Dlatego *SA* = *SB*.

6. Z równoległości $AB \parallel CP$ wynika, że $[APC] = [BPC]$ (symbolem $[XYZ]$ oznaczam pole trójkąta XYZ). Podobnie $[BPC] = [BPD]$. Stąd $[APC] = [BPD]$, a ponieważ *AC* = *BD*, więc wysokości trójkątów *ACP* i *BDP*, opuszczone odpowiednio na boki *AC* i *BD*, mają tę samą długość i dlatego punkt *P* leży na dwusiecznej kąta *AOD*.

7. Prosty rachunek na kątach pokazuje, że $|\sphericalangle HFE| = |\sphericalangle DFE| = 45^{\circ}$, a ponieważ $|\sphericalangle EHF| = 90^{\circ}$, więc $|\sphericalangle FEH| = 45^{\circ}$ i dlatego *HE* = *HF***.** Ponadto *AE* = *AF*, więc prosta *AH* jest symetralną odcinka *EF* i zawiera dwusieczną kąta *BAC*.

8. Ponieważ punkt *M* jest środkiem odcinków *AB* i *PQ*, więc czworokąt *APBQ* jest równoległobokiem, a czworokąty *AQPE* i *BQPD* są trapezami. Dlatego $[BDQ] = [BPQ] = [APQ] = [AEQ]$, więc wysokości trójkątów *AEQ* i *BDQ*, opuszczone z wierzchołka *Q* odpowiednio na proste *AC* i *BC*, są tej samej długości, co dowodzi, że punkt *Q* leży na dwusiecznej kąta *ACB*.

9. Czworokąty *BPRS* i *CQRS* są wpisane w okrąg, więc $|\sphericalangle PBS| = |\sphericalangle SRC| = |\sphericalangle SQC|$. Podobnie $|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle SPB|$. Ponieważ *BP* = *CQ*, więc trójkąty *BPS* i *SCQ* są przystające i ich wysokości opuszczone odpowiednio na proste *AB* i *AC* są tej samej długości, co dowodzi, że punkt *S* leży na dwusiecznej kąta *BAC*.

10. Trójkąt *BDK* jest równoramienny (*BD* = *DK*), więc $DM \perp BK$ i $DM^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta *BDK*. Ponieważ $|\sphericalangle BMD| = 90^{\circ}$, więc punkt *M* leży na okręgu opisanym na prostokącie *ABCD* i łuki *BM* oraz *CM* są równe. Dlatego $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MAC|$.

11. Załóżmy, że *K* i *L* są odpowiednio środkami odcinków *AP* i *CP*. Wtedy $KL \parallel AC$. Proste równoległe AC i *KL* odcinają na okręgu wpisanym w trójkąt *ABC* równe łuki *KS* i *SL*(wynika to np. z symetrii względem prostej przechodzącej przez *S* i prostopadłej do prostej *AC*), więc $|\sphericalangle SPA| = |\sphericalangle SPK| = |\sphericalangle SPL| = |\sphericalangle SPC|$.

12. Załóżmy, że odcinki *CA* i *CB* przecinają okrąg wpisany w odcinek koła odpowiednio w punktach *K* i *L* oraz, że prosta *l* jest styczna w punkcie *C* do okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. Jest ona też styczna w punkcie *C* do okręgu wpisanego w odcinek koła. Obierzmy na prostej *l* punkt $P \neq C$ taki, że kąt *ACP* nie zawiera trójkąta *ABC*. Wtedy, z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą, otrzymujemy równości $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle ABC|$. Więc $KL \parallel AB$ i, rozumując analogicznie jak w rozwiązaniu zadania **11**, stwierdzamy, że $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$.

13. Okrąg ω, o średnicy *BC*, przechodzi przez punkty *M* i *N*. Dwusieczna kąta *BMC* przechodzi przez środek tego łuku *BC* okręgu ω, który nie zawiera punktu *M*. Analogicznie, dwusieczna kąta *BNC* przechodzi przez ten sam środek łuku *BC*. Zatem punkt *P* jest tym środkiem i *BP* = *PC* oraz $|\sphericalangle BPC| = 90^{\circ}$, bo *BC* jest średnicą okręgu ω.

14. W trójkącie *ACD* wysokość poprowadzona z wierzchołka *A* zawiera się w dwusiecznej $AE^{\rightarrow}$, więc odcinek *AE* jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie *ADEC*, trójkąt *ACD* jest równoramienny i $AC = AD = \frac{1}{2}AB$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle ABC| = 30^{\circ}$, $|\sphericalangle BAC| = 60^{\circ}$, $|\sphericalangle ACB| = 90^{\circ}$.

15. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie *ABD* przecina odcinek *BC* w punkcie *E*. Wtedy *AD* = *DE*. Przyjmijmy, że $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBC| = \alpha$. Wtedy $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle DCE| = 2\alpha$ i *DE* = *EC* = *AD*. Ponadto *BC* = *BD* + *DA* = *BD* + *EC* = *BE* + *EC*, więc *BD* = *BE* i $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle BED| = 4\alpha$. Dlatego w trójkącie *BED* mamy $9\alpha = 180^{\circ}$. Stąd $\alpha = 20^{\circ}$ i wtedy $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = 40^{\circ}$, $|\sphericalangle BAC| = 100^{\circ}$.

16. Wiadomo, że (**Fakt 6**) dwusieczna kąta *BAC* i symetralna boku *BC* przecinają się w środku łuku *BC*, niezawierającym punktu *A*, okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. Niech *W* będzie tym punktem. Załóżmy też, że punkty *O* i *S* są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach *ABC* i *ADM* oraz, że odcinek *WX* jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. Wtedy $|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle WAX| = 90^{\circ}$, a ponieważ także $|\sphericalangle DMX| = 90^{\circ}$, więc na czworokącie *DAXM* można opisać okrąg, który jest też okręgiem opisanym na trójkącie *ADM*. Środek tego okręgu, punkt *S*, jest środkiem odcinka *DX*. A ponieważ punkt *O* jest środkiem odcinka *WX*, więc odcinek *SO* jest linią środkową w trójkącie *DWX* i dlatego $SO \parallel DW$, i także $SO \parallel AD$.

17. Punkt *A* leży na dwusiecznej kąta *KCM* (w Δ*KCM*) i $|\sphericalangle KAM| = 90^{\circ} - \frac{1}{2}|\sphericalangle KCM| = 45^{\circ}$, więc *A* jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta *KCM* (**Fakt 5b**) i dlatego jego odległości od prostych zawierających boki trójkąta *KCM* są sobie równe.

18. $|\sphericalangle BMA| = |\sphericalangle CMK| = |\sphericalangle AMK| = 60^{\circ}$, $CA^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta *KCM* (w trójkącie *KCM*), $MA^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta zewnętrznego w trójkącie *KCM*, więc $KA^{\rightarrow}$ też jest dwusieczną kąta zewnętrznego w trójkącie *KCM*. Wynika stąd, że $|\sphericalangle AKD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DKM| = 75^{\circ}$.

19. $2 = AP + AQ + PQ = AP + AQ + PB + QD$, więc $PQ = PB + QD$. Obierzmy na odcinku PQ punkt S taki, że $PS = PB$. Wtedy $QS = QD$ i punkt S jest punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta APQ z bokiem PQ a środkiem tego okręgu jest punkt C. Zatem $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle PAQ| = 45^\circ$.

20. Tak, jak w rozwiązaniu zadania **17.** stwierdzamy, że punkt A jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta MCN. Załóżmy, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt MCN. Wtedy $|\sphericalangle AMI| = |\sphericalangle ANI| = 90^\circ$, więc punkty M i N leżą na okręgu o średnicy AI i środek okręgu opisanego na trójkącie AMN jest środkiem odcinka AI i dlatego leży na przekątnej AC.

21. $|\sphericalangle DME| = 60^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle DCE|$ i M leży na dwusiecznej kąta ACB. Wynika stąd, że M jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta DCE. Załóżmy, że punkty P, Q, R są rzutami prostokątnymi punktu M odpowiednio na odcinki AC, DE i BC, to $PD = DQ, RE = EQ$ i $PD + RE = DE$. A ponieważ $AP = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BM = BR$, więc

$$AD + BE = AP + BR + PD + RE = \frac{1}{2}AB + DE.$$

22. Obierzmy na boku AB punkt F taki, że $AF = AE$. Wtedy $BF = BD$. Załóżmy, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Trójkąty AEI i AFI są przystające, więc $|\sphericalangle AEI| = |\sphericalangle AFI|$, a z przystawania trójkątów BFI i BDI wynika, że $|\sphericalangle BFI| = |\sphericalangle BDI|$. Z tych równości wynika, że $|\sphericalangle AEI| = |\sphericalangle IDC|$, więc na czworokącie $CEID$ można opisać okrąg, a wtedy $|\sphericalangle EID| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB|$, a ponieważ $|\sphericalangle AIB| = 90^\circ + \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$ (**Fakt 5a**) i $|\sphericalangle EID| = |\sphericalangle AIB|$, więc z równości $180^\circ - |\sphericalangle ACB| = 90^\circ + \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$ otrzymujemy, że $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$.

23. Przedłużmy odcinek CA, poza punkt A, do punktu D tak, by $AD = AI$. Wtedy $CD = CB$. Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ. Jest $|\sphericalangle AIB| = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CBD| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, więc $|\sphericalangle AIB| + |\sphericalangle ADB| = 180^\circ$ i na czworokącie $AIBD$ można opisać okrąg. Dlatego $|\sphericalangle ADI| = |\sphericalangle ABI| = \frac{1}{2}\beta$. Trójkąt ADI jest równoramienny, więc $|\sphericalangle DAI| = 180^\circ - \beta$, $|\sphericalangle CAI| = \beta = \frac{1}{2}\alpha$, zatem $\alpha = 2\beta$, ale $\gamma = \beta$, więc $4\beta = 180^\circ, \beta = 45^\circ,\ \alpha = 90^\circ$.

24. Punkt E jest punktem przecięcia się dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku B i dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku D w trójkącie ABD. Wynika stąd **(Fakt 4)**, że $AE^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku A w trójkącie ABD. Stąd $|\sphericalangle BAC| = 120°$

25. Przy standardowych oznaczeniach (jak w rozwiązaniu zad. **23**) mamy $\alpha = \gamma$, $2\alpha = \beta$, $|\sphericalangle CMN| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \alpha$, więc $MC^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta AMN. Punkt P jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów zewnętrznych przy wierzchołkach M i N w trójkącie AMN, więc leży też na dwusiecznej kąta przy wierzchołku A w tym trójkącie, a także na dwusiecznej kąta przy wierzchołku A w trójkącie ABC. Dlatego $BP \perp AC$.

26. W trójkącie ABD punkt E jest punktem przecięcia się dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku B i dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A. Dlatego $DE^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ADC. Podobnie stwierdzamy, że $DF^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ADB. Wynika stąd, że $|\sphericalangle EDF| = 90^\circ$.

27. $|\sphericalangle AIC| = |\sphericalangle ABJ| = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ (przy standardowych oznaczeniach) i $|\sphericalangle CAI| = |\sphericalangle JAB|$. więc trójkąty *AIC* i *ABJ* są podobne. Zatem $\frac{AB}{AI} = \frac{AJ}{AC}$, $AB \cdot AC = AI \ \cdot AJ$.

28. Wykażemy, że okręgi opisane na trójkątach ABA_1 i CBC_1 przecinają się w punkcie I – środku okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*. Rozpatrzmy okrąg opisany na trójkącie *ABI*. Wtedy $|\sphericalangle AIC| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Ponadto $|\sphericalangle BA_1A| = |\sphericalangle CA_1A| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Wynika stąd, że punkt A_1 też leży na tym okręgu, zatem punkt *I* leży na okręgu opisanym na trójkącie ABA_1. Podobnie stwierdzamy, że punkt *I* leży na okręgu opisanym na trójkącie CBC_1.

29. Załóżmy, że punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*. Wtedy $|\sphericalangle DIE| = |\sphericalangle BIC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 120^\circ$, więc na czworokącie *AEID* można opisać okrąg i $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AID| = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Analogicznie $|\sphericalangle ADE| = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie *BIE* przecina bok *BC* w punkcie *F*. Wtedy $|\sphericalangle IFC| = |\sphericalangle BEI| = 180^\circ - |\sphericalangle AEI| = |\sphericalangle ADI|$ i na czworokącie *IDCF* też można opisać okrąg. Dlatego $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle FEI| + |\sphericalangle IED| = |\sphericalangle FBI| + |\sphericalangle IAD| = \frac{\alpha+\beta}{2} = |\sphericalangle AED|$. Analogicznie $|\sphericalangle FDE| = \frac{\alpha+\gamma}{2} = |\sphericalangle ADE|$. Wynika stąd, że trójkąty *ADE* i *FDE* są przystające i są symetryczne do siebie względem prostej *DE*, więc punkty *A* i *F* też są symetryczne do siebie względem prostej *DE*.

30. Załóżmy, że dwusieczna kąta *ACB* przecina bok *AB* w punkcie *D* oraz, że $|\sphericalangle BAC| = \alpha$. Na przedłużeniu odcinka *CI*, poza punkt *I*, obierzmy punkt *E* taki, że *AI* = *AE*. Wtedy $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$. Jeden z trójkątów *AID, AED* powinien być przystający do trójkąta *CBD* (równa para boków i kąt między jednym z tych boków i prostą zawierającą trzeci bok). To powinien być trójkąt *AED* (dlaczego? – zadanie dla czytelnika). Wynika stąd, że $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AIE| = \frac{3}{2}\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 3\alpha = |\sphericalangle AEC| = \frac{3}{2}\alpha$. Stąd $\alpha = 40^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 80^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.

31. Z założenia wynika, że półproste $AX^{\rightarrow}$ i $BY^{\rightarrow}$ są odpowiednio dwusiecznymi kątów *BAC* i *ABC*. Jeżeli punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*, to z twierdzenia o „trójliściu” wynika, że $XB = XI = XC$ i $YA = YI = YC$. Ponadto $|\sphericalangle AYI| = |\sphericalangle BXI| = 60^\circ$, więc $AI = YI$ oraz $BI = XI$. Wynika stąd, że trójkąty *AIB* oraz *YIX* są przystające, więc odległości punktu *I* od prostych *AB* i *XY* są takie same, a stąd wynika teza zadania.

32. $|\sphericalangle IBC| = |\sphericalangle IFE|$ i $|\sphericalangle ICB| = |\sphericalangle IEF|$, więc trójkąty *IBC* oraz *IFE* są podobne, Z założenia wynika, że wysokości tych trójkątów, opuszczone z wierzchołka *I*, są równe, więc trójkąty te są przystające i $IB = IF$ oraz $IC = IE$. Zatem trójkąty *IBF* i *ICE* są równoboczne i $|\sphericalangle BAC| = 60.^\circ$

33. Załóżmy, że punkt *J* jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta *ABC* i stycznego do boku *BC*. Na czworokącie *BICJ* można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt *M* – środek odcinka *IJ* , gdyż kąty przy wierzchołkach *B* i *C* w tym czworokącie są proste. Okrąg ten jest też opisany na trójkącie *BIC*, więc z twierdzenia o „trójliściu” i z własności środkowej w trójkącie prostokątnym poprowadzonej z wierzchołka prostego wynika, że *M* leży też na okręgu opisanym na trójkącie *ABC*.

34. Z twierdzenia o „trójliściu” zastosowanego do trójkątów *ABC* i *ACD* wynika, że $MB = MI = MC$ i $NC = NI = ND$. Jeśli *IM* = *JN*, to $BM = MC = CN = ND$ i $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle CAN| = |\sphericalangle NAD|$, więc także $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|$.

35. Ponieważ $OA = OB$., więc $|\sphericalangle ASO| = |\sphericalangle OSB|$ i $SO^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ASB. Punkt P na tej dwusiecznej jest taki, że $OP = OA = OB$., więc z twierdzenia o „trójliściu" wynika, że P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABS.

36. Z twierdzenia o „trójliściu" mamy $DB = DI$, a ponieważ punkt K jest środkiem odcinka BI, więc $DK \perp BI$ i prosta DK jest symetralną odcinka BI. Zatem $BM = MI$ i $|\sphericalangle MIB| = |\sphericalangle MBI| = |\sphericalangle IBC|$. Stąd wynika, że $MI \parallel BC$.

37. Z twierdzenia o „trójliściu" wynika, że $MB = MI$. Ponadto $NB = NA$, bo N jest środkiem łuku AB (bez punktu C). Zatem $|\sphericalangle BMN| = |\sphericalangle NMA|$ i trójkąty SBM oraz SIM są przystające, a ponieważ $|\sphericalangle SBM| = |\sphericalangle PBM| = 90^{\circ}$, bo odcinek PM jest średnicą, więc także $|\sphericalangle SIM| = 90^{\circ}$.

38. W trójkącie ACE punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, więc z twierdzenia o „trójliściu" wynika, że $DP = DC = DE$ i $BP = BC = BA$. Wynika stąd, że prosta BD jest symetralną odcinka CP, a ponieważ $|\sphericalangle CQR| = |\sphericalangle QBC| + |\sphericalangle QCB| = |\sphericalangle RCD| + |\sphericalangle RDC| = |\sphericalangle CRQ|$, więc $CQ = CR$. Punkty C i P są symetryczne do siebie względem prostej BD, więc także $PQ = PR$.

39. Załóżmy, że punkt E jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AC oraz, że odcinek DF jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Wtedy $|\sphericalangle DBF| = 90^{\circ}$, $|\sphericalangle DFB| = |\sphericalangle ACD|$, więc trójkąty CEI oraz FBD są podobne, a ponieważ $DB = DI$ („trójliść"), więc otrzymujemy stąd równości $\frac{IE}{CI} = \frac{DB}{DF} = \frac{DI}{DF}$, $\frac{r}{CI} = \frac{DI}{2R}$, $CI \cdot DI = 2Rr$.

40. Z twierdzenia o „trójliściu" mamy $KC = KI$ i $LC = LI$, więc prosta KL jest symetralną odcinka CI, a ponieważ $N \in KL$, więc $NC = NI$ i $|\sphericalangle NIC| = |\sphericalangle NCI| = 45^{\circ}$.

41. Załóżmy, że punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC i stycznego do boku AB. Ponieważ $AJ \perp AI$, więc $IM \parallel AJ$ i IM jest linią środkową w trójkącie ACJ. Z twierdzenia o „trójliściu" i rozwiązania zadania **33.** wiemy, że punkt W jest środkiem odcinka IJ, więc $CI = IJ = 2 \cdot IW$, zatem $\frac{CI}{IW} = 2$.

42. Półproste $AC^{\rightarrow}$ i $BC^{\rightarrow}$ są dwusiecznymi kątów zewnętrznych w trójkącie ABD, więc punkt C jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta. Jeśli punkt O jest punktem przecięcia się odcinka DC i okręgu opisanego na trójkącie ABD, to z tego, że $DC^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ADB i z własności okręgu dopisanego wynika równość $OA = OB = OC$.

43. Z założenia ($I \in OA$) wynika, że O leży na dwusiecznej kąta BAC i na symetralnej boku BC, więc jest środkiem łuku BC (bez punktu A) okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wynika stąd, że $OB = OC = OH$, ale też $OB = OC = OI$ (z twierdzenia o „trójliściu"), więc punkt I też leży na okręgu opisanym na trójkącie BCH i $|\sphericalangle BHC| = |\sphericalangle BIC|$. Ale $|\sphericalangle BHC| = 180^{\circ} - |\sphericalangle BAC|$, $|\sphericalangle BIC| = 90^{\circ} + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$, więc $180^{\circ} - |\sphericalangle BAC| = 90^{\circ} + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$ i $|\sphericalangle BAC| = 60^{\circ}$.

44. Środkiem okręgu opisanego na trójkącie BIC jest punkt M przecięcia się dwusiecznej $AI^{\rightarrow}$ i okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt M leży na prostej AI, więc z symetrii względem prostej AI wynika równość cięciw.

45. Proste BP i CP zawierają środkowe trójkątów ABC i BCD odpowiednio, więc punkty A i C są jednakowo oddalone od prostej BP, a punkty B i D są jednakowo oddalone od prostej CP. Wynika z tego, że $[PAB] = [PBC] = [PCD]$, a ponieważ wysokości trójkątów PAB i PCD, poprowadzone z wierzchołka P, są tej samej długości (bo punkt P leży na dwusiecznej kąta AKD), więc $AB = CD$.

46. Załóżmy, że w trójkącie ABC dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie I pod kątem 60° oraz, że dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D. Wiadomo z poprzednich zadań, że $|\sphericalangle AIB| = 90^\circ + \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| > 90^\circ$, więc $|\sphericalangle BID| = 60^\circ$. Ale $|\sphericalangle AIB| = 120^\circ$, więc $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$.

47. W trójkącie CKI: $|\sphericalangle CIK| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$. Załóżmy, że prosta KD przecina bok BC w punkcie L. Wtedy w trójkącie CLD: $|\sphericalangle CDL| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$. Stąd $|\sphericalangle CIK| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDI|$,więc $KI = KD$.

48. Na przedłużeniu odcinka CA, poza punkt A, obierzmy punkt D tak, by $AD = AI$, Wtedy $CD = CB$ i trójkąty DIC oraz BIC są przystające (są symetryczne względem prostej CI). Zatem $|\sphericalangle CDI| = |\sphericalangle CBI|$ i $|\sphericalangle CAB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAI| = 4 \cdot |\sphericalangle CDI| = 4 \cdot |\sphericalangle CBI| = 2 \cdot |\sphericalangle CBA|$.

49. Z twierdzenia o „trójliściu” wynika, że $EA = EI$ i $FA = FI$, więc prosta EF jest symetralną odcinka AI i dlatego $EF \perp AI$, co dowodzi, że także $EF \perp AD$.

50. Patrz rozwiązanie zadania **51**.

51. Załóżmy, że punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt oraz, że prosta PQ (P i Q leżą na brzegu wielokąta) dzieli wielokąt na dwie figury o równych obwodach. Wtedy odcinki OP i OQ dzielą ten wielokąt na dwie części o równych polach (wystarczy połączyć punkt O z wierzchołkami wielokąta i zauważyć, że otrzymane trójkąty z wierzchołkiem O mają taką samą wysokość opuszczoną z tego wierzchołka, o długości równej długości promienia okręgu wpisanego). Jeśli ponadto prosta PQ dzieli też pole danego wielokąta na połowy, to punkt O musi leżeć na odcinku PQ.

52. Załóżmy, że dwusieczne kątów CED i BFC są prostopadłe oraz, że dwusieczna kąta BFC przecina boki AD i BC odpowiednio w punktach K i L. Wtedy trójkąt KEL jest równoramienny. Przyjmijmy, że $|\sphericalangle BFL| = |\sphericalangle LFC| = \alpha$ i $|\sphericalangle LKE| = |\sphericalangle KLE| = \beta$. Wtedy $|\sphericalangle CDA| = \alpha + \beta$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBL| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ i $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$, co dowodzi, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

53. Trójkąty BC_1A_1 i A_1B_1C są równoramienne, więc $|\sphericalangle C_1A_1B| = |\sphericalangle ABC|$, $|\sphericalangle B_1A_1C| = |\sphericalangle ACB|$. Wtedy $|\sphericalangle C_1A_1B_1| = |\sphericalangle BAC|$. Załóżmy, że punkt H jest ortocentrum trójkąta $A_1B_1C_1$. Wtedy $|\sphericalangle B_1HC_1| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$ i na czworokącie AC_1HB_1 można opisać okrąg. Ponadto $HB_1 = HC_1$, bo prosta A_1H jest symetralną odcinka B_1C_1, więc $|\sphericalangle C_1AH| = |\sphericalangle HAB_1|$, gdyż są to kąty wpisane, oparte na równych cięciwach.

54. Jeżeli punkt O jest środkiem półokręgu, to $OM = OA$ i $OM \perp BC$, więc $OM \parallel AC$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle MAO| = |\sphericalangle OMA| = |\sphericalangle MAC|$.

55. Z założenia wynika, że $AB \neq BC$. Załóżmy, że $AB < BC$. Trójkąt *PBQ* jest równoramienny i $|\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle PQB|$. Ponadto $|\sphericalangle BQA| = |\sphericalangle CBQ| + |\sphericalangle BCQ|$, więc
$|\sphericalangle CBQ| = |\sphericalangle BQA| - |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle QBP| - |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ABQ|$.

56. Załóżmy, że punkt *E* na odcinku *AB* jest taki, że *AE* = *AD* i *BE* = *BC* oraz, że okrąg opisany na trójkącie *CDE* przecina bok *AB* w punkcie *F*. Wtedy $|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle EDC|$. Ponadto $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - |\sphericalangle EBC| = 2 \cdot |\sphericalangle BCE| = 2 \cdot |\sphericalangle BCD| - 2 \cdot |\sphericalangle ECD| = 360^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle FAD| - 2 \cdot |\sphericalangle AFD| = 2 \cdot |\sphericalangle ADF|$. Podobnie $|\sphericalangle BCD| = 2 \cdot |\sphericalangle BCF|$. Wynika stąd, że *F* jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów *ADC* i *BCD*.

57. Załóżmy, że punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* oraz, że punkt *P* leży na zewnątrz tego trójkąta. Wtedy, przy standardowych oznaczeniach, $|\sphericalangle BIC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CIP| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Także $|\sphericalangle CNP| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, więc na czworokącie *INPC* można opisać okrąg, a ponieważ $|\sphericalangle INC| = 90^\circ$, więc także $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle IPC| = 90^\circ$. Jeżeli punkt *P* leży wewnątrz trójkąta *ABC,* to wtedy $|\sphericalangle CNP| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ i $|\sphericalangle CIP| + |\sphericalangle CNP| = 180^\circ$, więc na czworokącie *IPNC* można opisać okrąg i dalej rozumujemy jak poprzednio. Jeżeli *P* leży na boku *AC,* to *P* = *N* i teza jest oczywista.

58. Załóżmy, że *I* jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* oraz, że prosta *MN* przecina bok *AC* w punkcie *P*. Punkty *M* i *N* leżą na okręgu o średnicy *BC,* więc $|\sphericalangle MNB| = |\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle ACI|$, a wtedy punkty *C, I, P, N* leżą na jednym okręgu i $|\sphericalangle CPI| = |\sphericalangle CNI| = 90^\circ$. Wynika stąd, że punkt *P* jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* z bokiem *AC*.

59. Z zadania **57**. wynika, że trójkąty *BXC* i *BYĆ* są trójkątami prostokątnymi z przeciwprostokątną *BC*, więc *XZ* = *YZ* = $\frac{1}{2}BC$.

60. Załóżmy, że punkt *D* leży na zewnątrz trójkąta *ABC* oraz, że punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wtedy $|\sphericalangle BDI| = |\sphericalangle BFI| = 90^\circ$ i na czworokącie *BIFD* można opisać okrąg. Zatem $|\sphericalangle FDI| = |\sphericalangle FBI| = |\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle EDA|$, więc punkty *E, F, D* są współliniowe. Jeśli D leży wewnątrz okręgu, Jeśli *D* leży wewnątrz trójkąta *ABC*, to na czworokącie *BIDF* można opisać okrąg i wtedy $|\sphericalangle FDI| = 180^\circ - |\sphericalangle FBI| = 180^\circ - |\sphericalangle EBA| = 180^\circ - |\sphericalangle EDA|$. Wynika stąd, że $|\sphericalangle FDI| + |\sphericalangle IDE| = 180^\circ$, więc i w tym przypadku punkty *E, D, F* są współliniowe. Analogicznie pokazujemy, że punkty *G, D, E* są współliniowe.