Wzór Picka

Czym jest i skąd się wziął?

Łukasz Bożyk

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

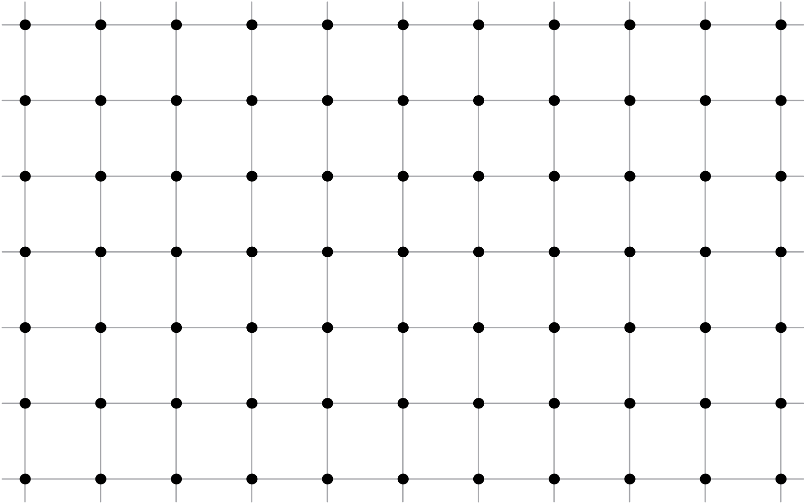
27 października 2019

Część I

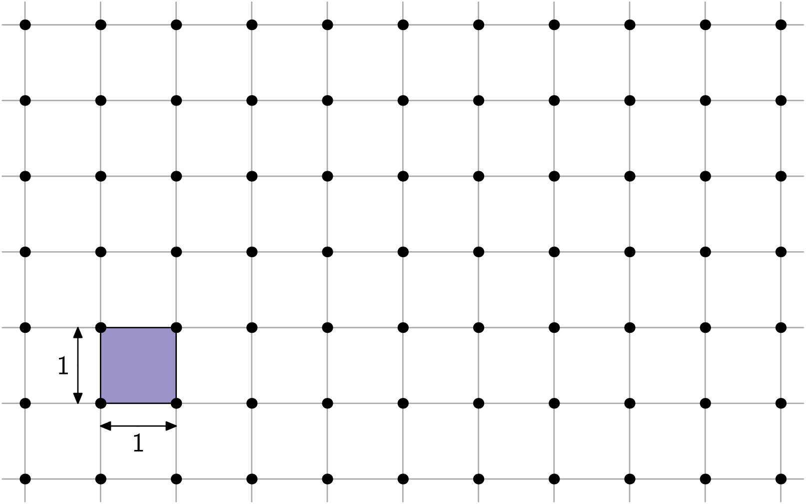
Co ciekawego kryje kartka w kratkę?

Co to jest punkt kratowy?

Co to jest punkt kratowy?



Co to jest punkt kratowy?



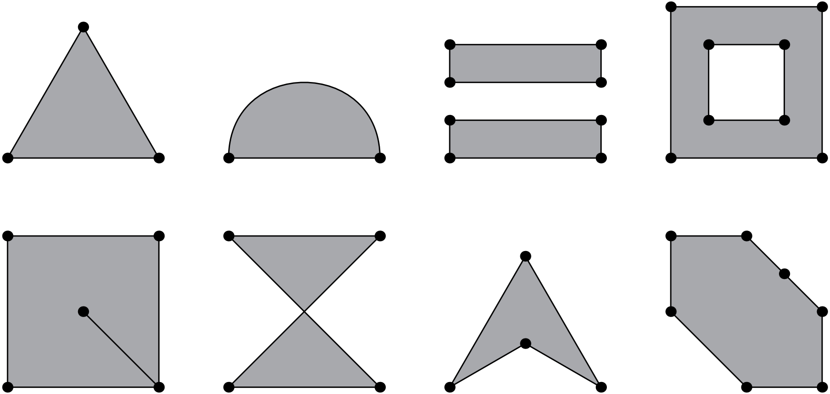
Co to jest wielokąt?

Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).

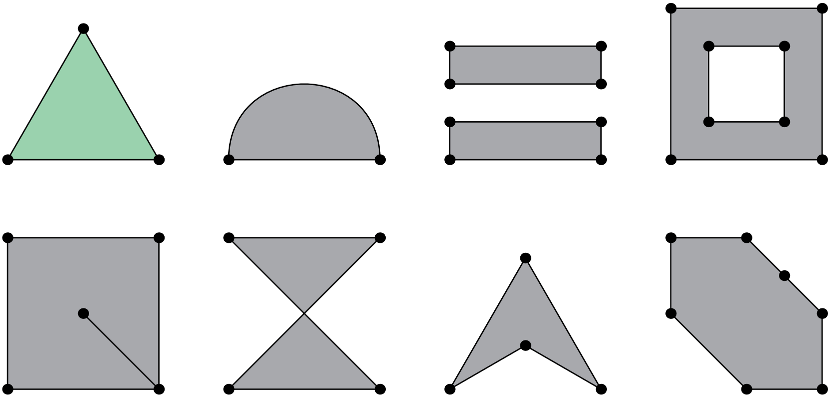
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



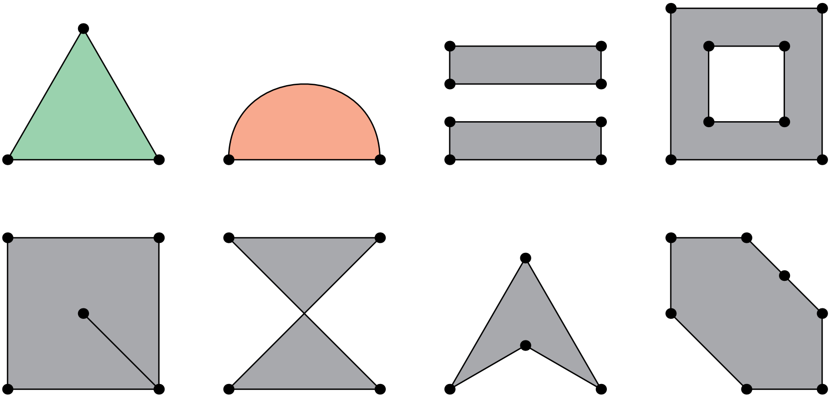
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



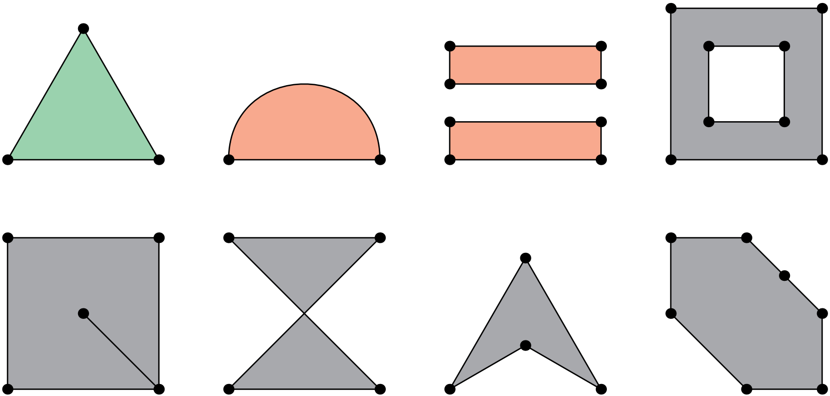
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



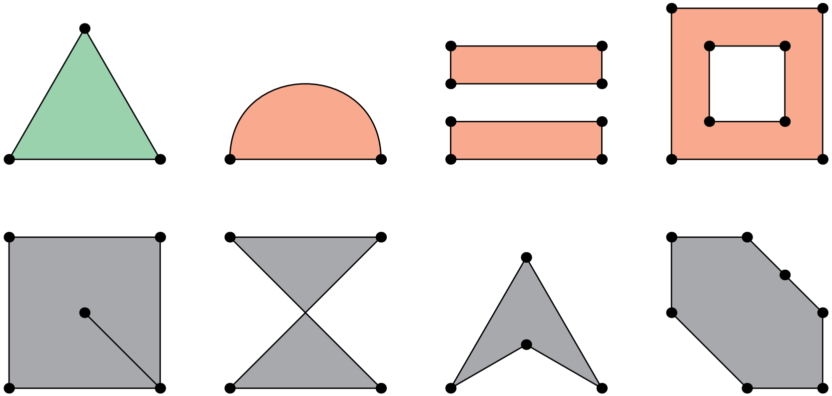
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



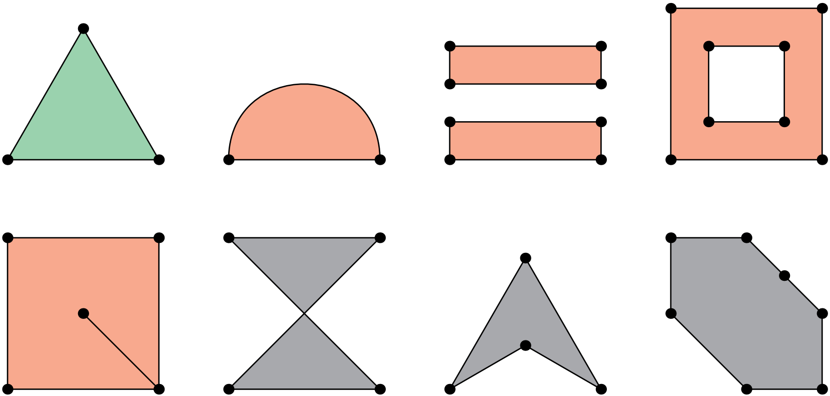
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



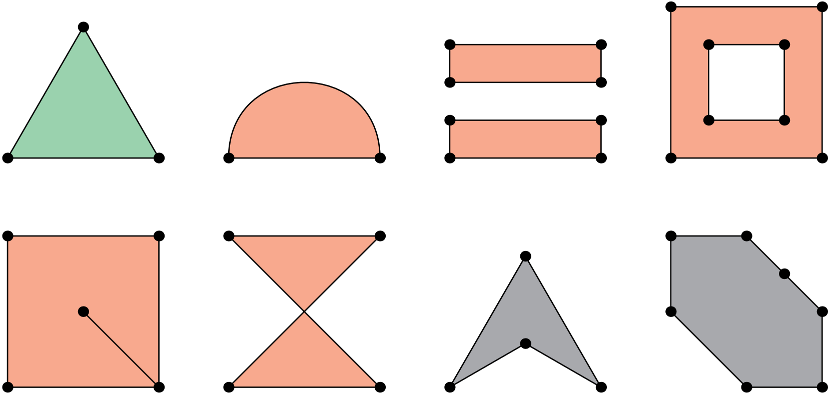
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



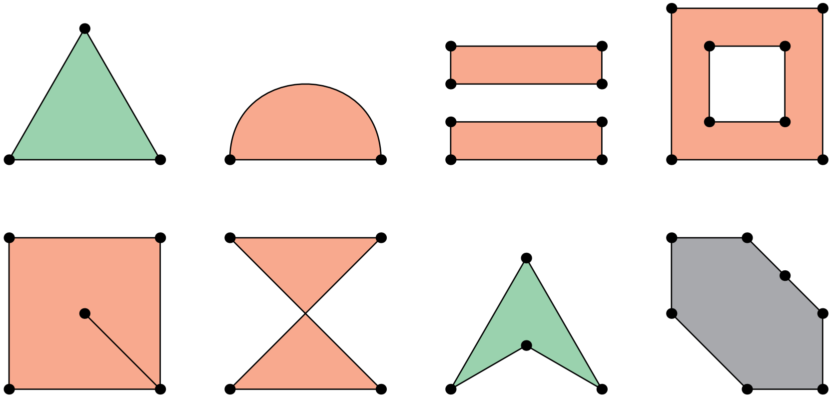
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



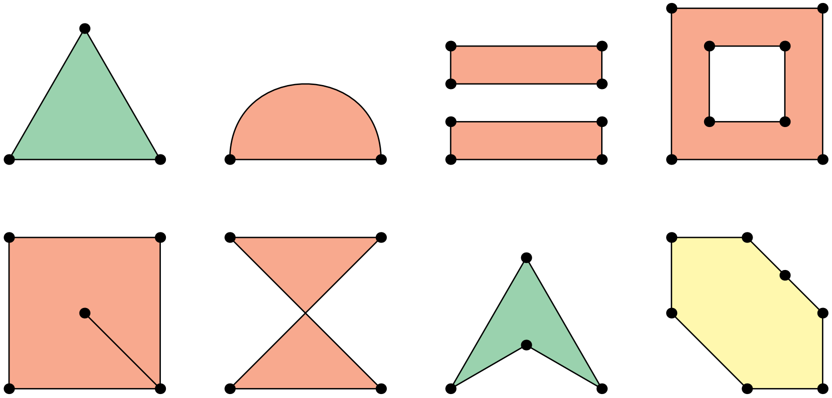
Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



Co to jest wielokąt?

Wielokąt to figura, której wnętrze jest w jednym kawałku, nie ma dziur, a jej boki są odcinkami (które się nie przecinają).



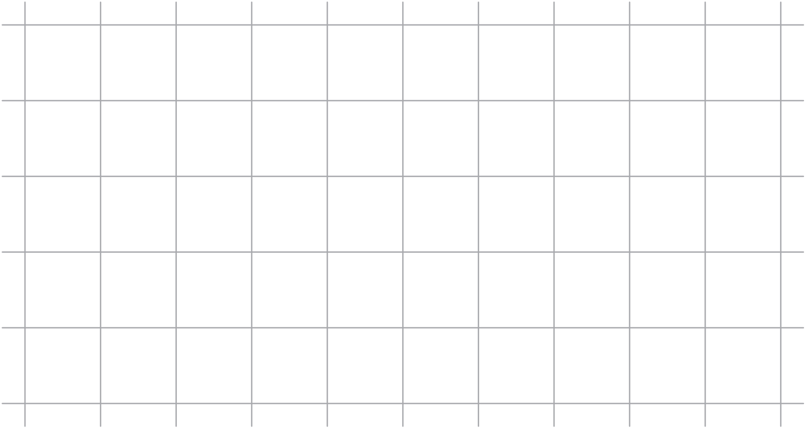
Co to jest wielokąt kratowy?

Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.

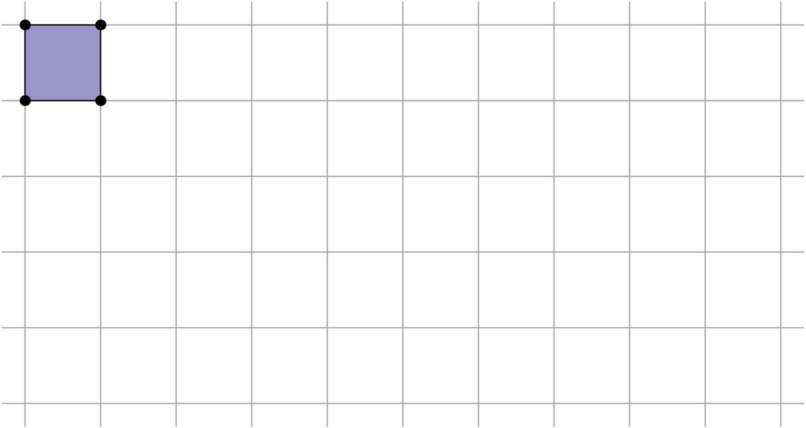
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



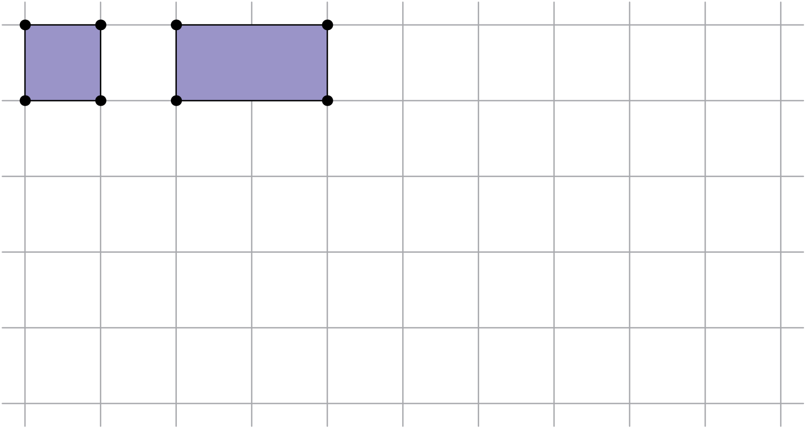
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



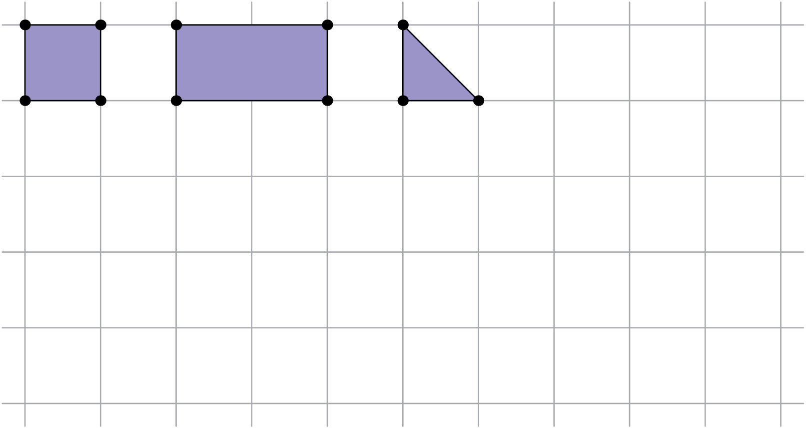
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



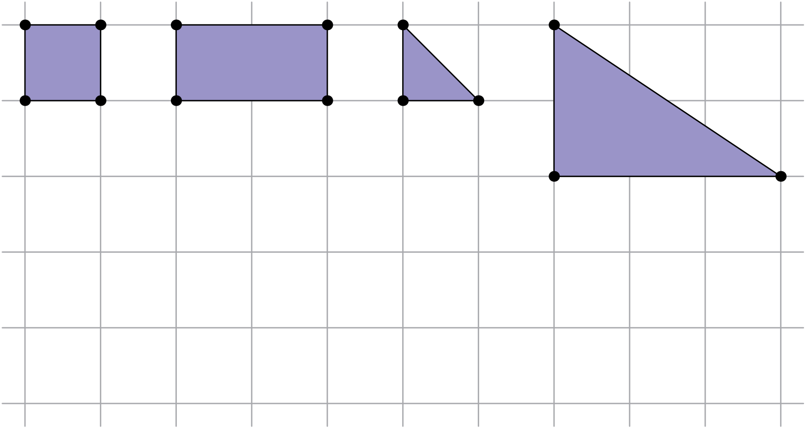
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



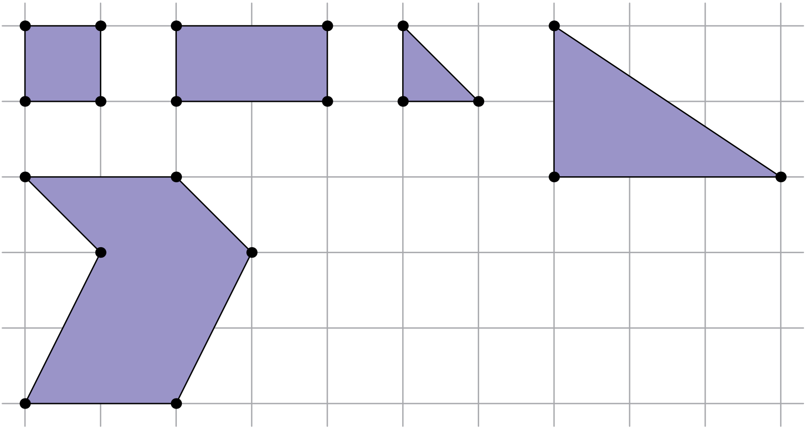
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



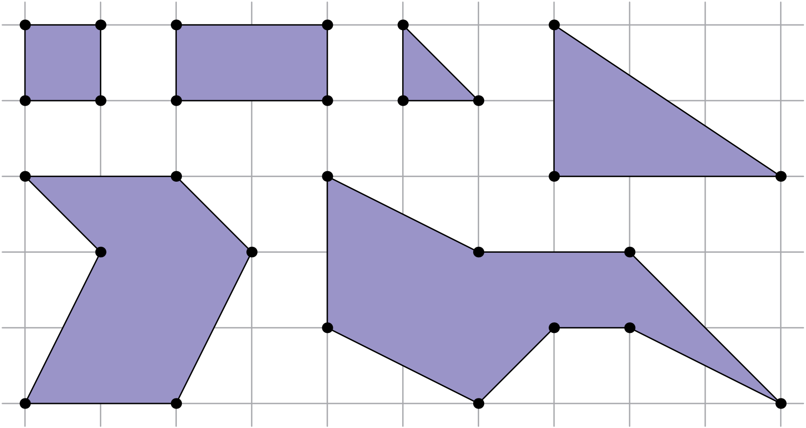
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



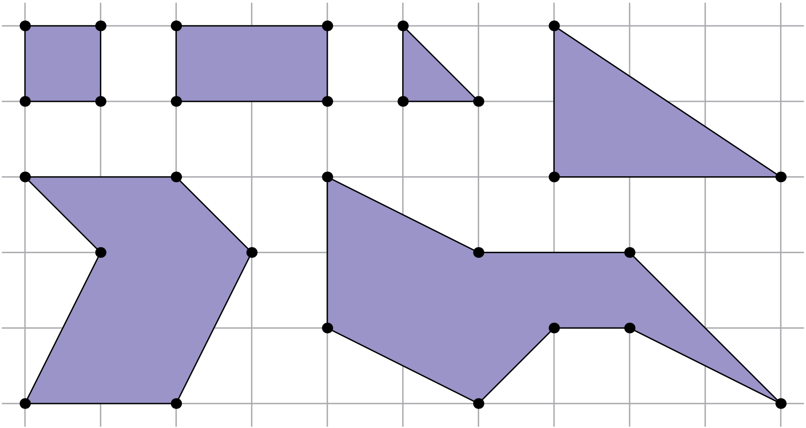
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym.



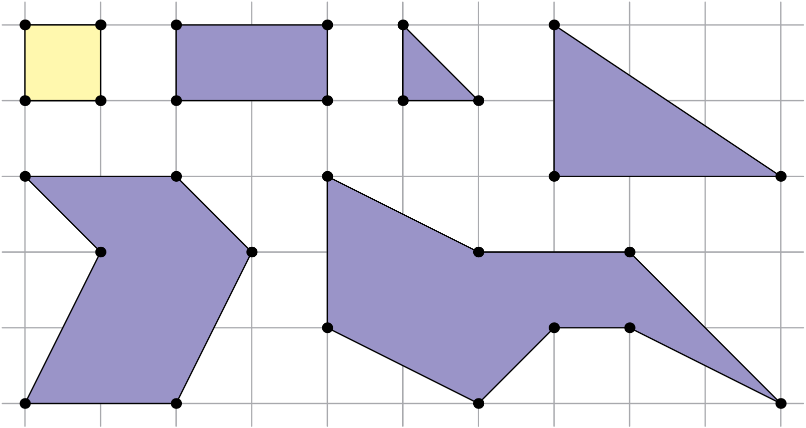
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



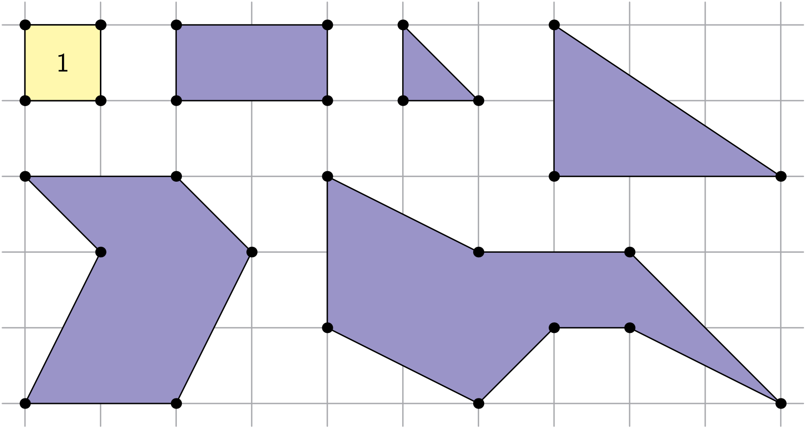
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



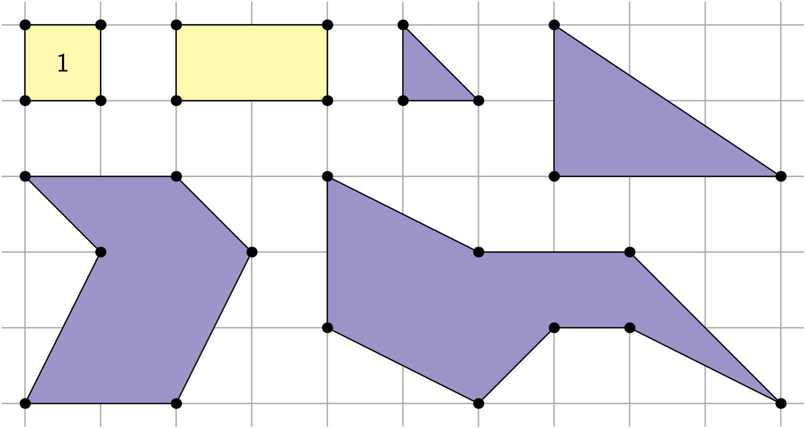
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



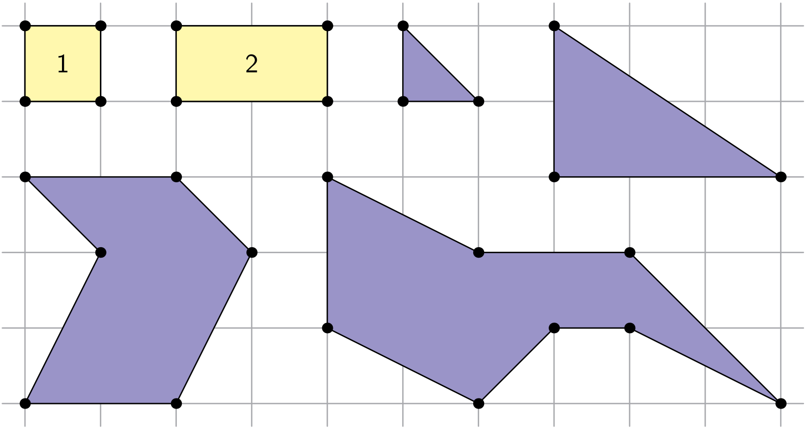
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



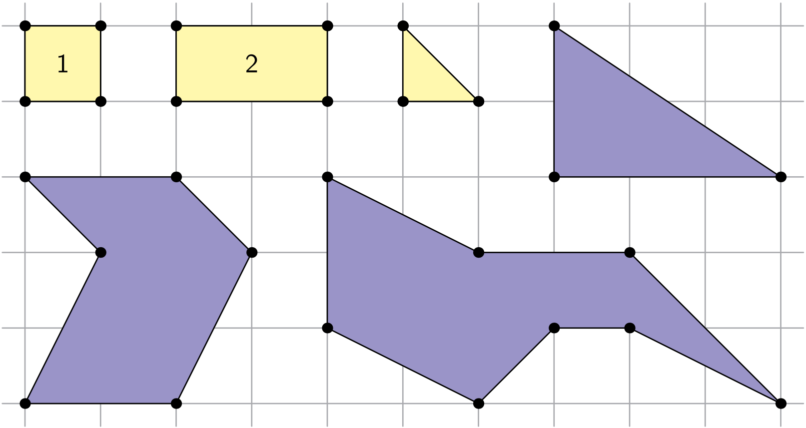
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



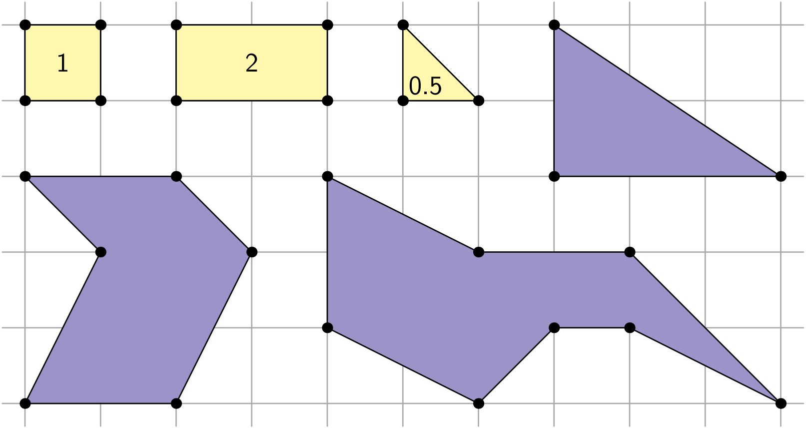
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



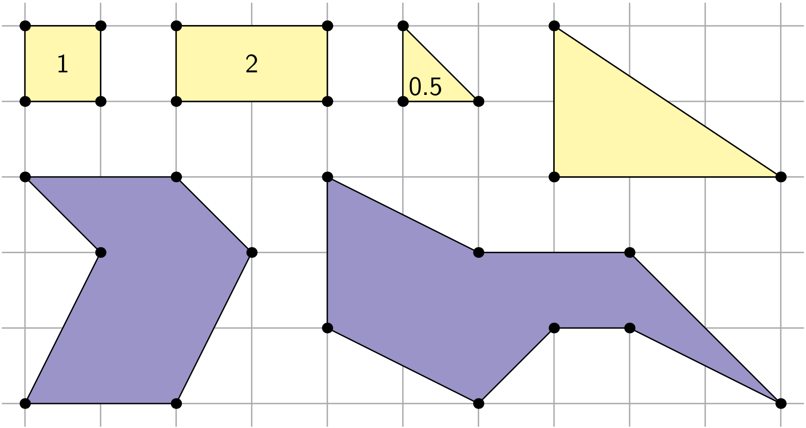
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



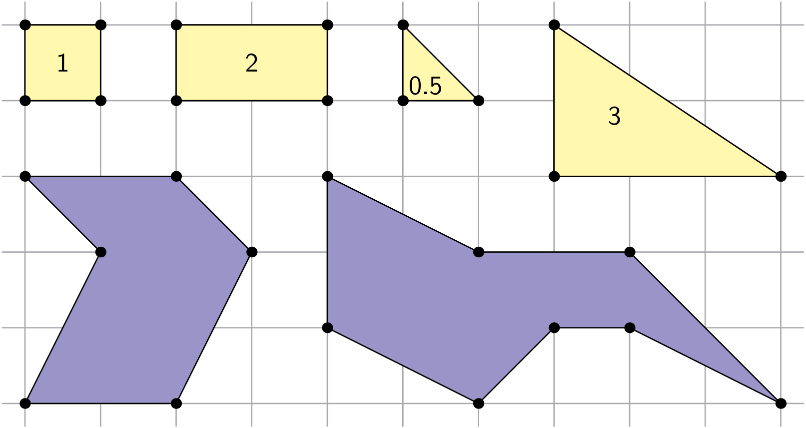
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



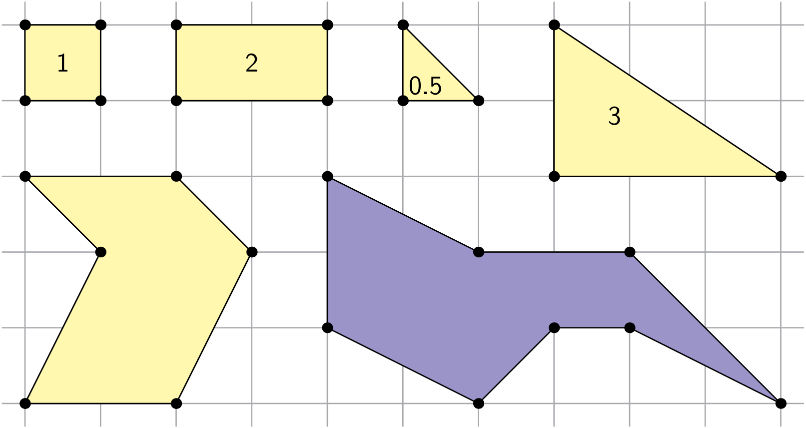
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



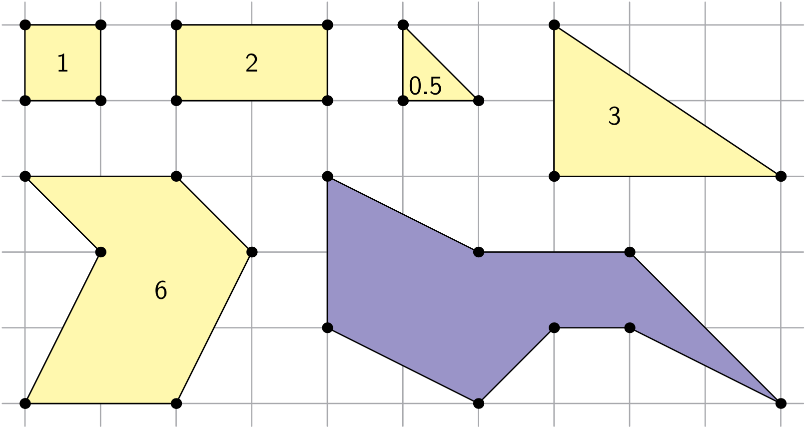
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



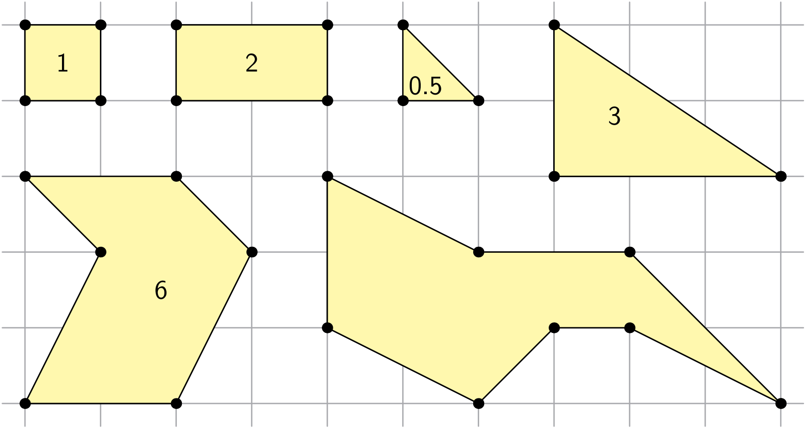
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



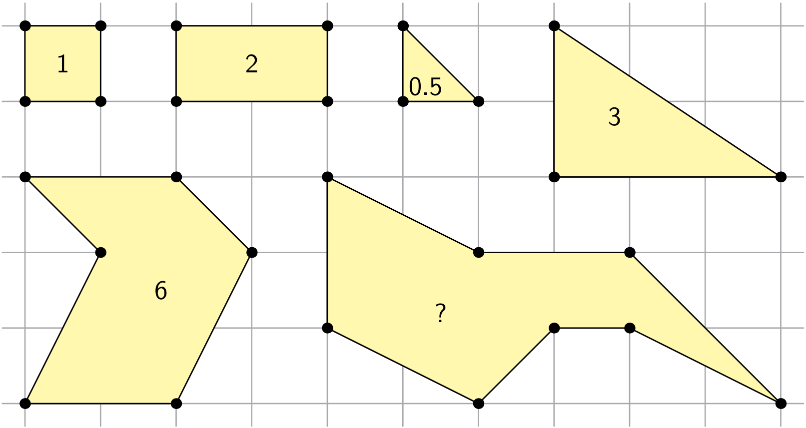
Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



Co to jest wielokąt kratowy?

Wielokąt kratowy to wielokąt, którego każdy wierzchołek jest punktem kratowym. Zastanówmy się, jakie pole ma każdy z poniższych wielokątów.



Co łatwo odczytać z rysunku?

Co łatwo odczytać z rysunku?

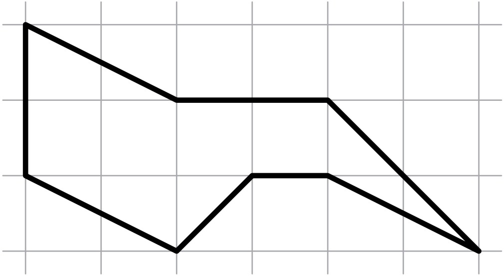
Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe...

Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe. . . Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.

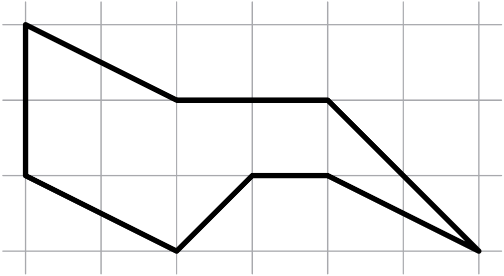
Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



Co łatwo odczytać z rysunku?

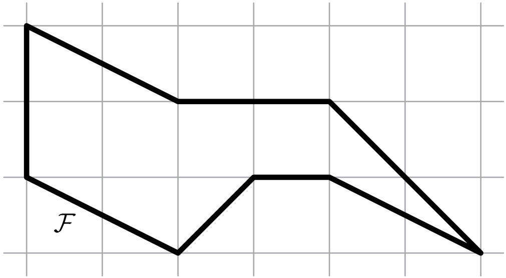
Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym.

Co łatwo odczytać z rysunku?

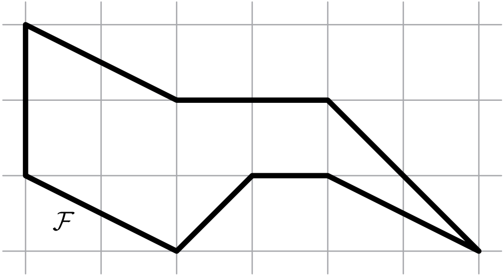
Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym.

Co łatwo odczytać z rysunku?

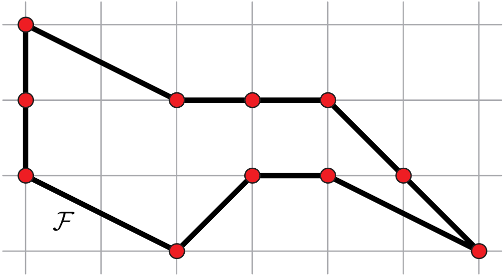
Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe… Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$

Co łatwo odczytać z rysunku?

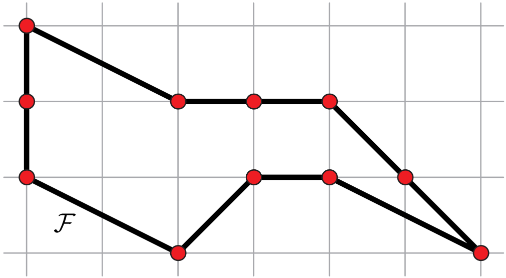
Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$

Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe. . . Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.

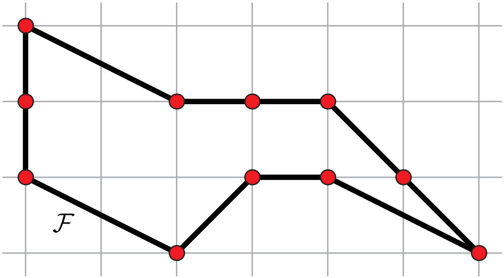


$B = 11$

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$

Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.

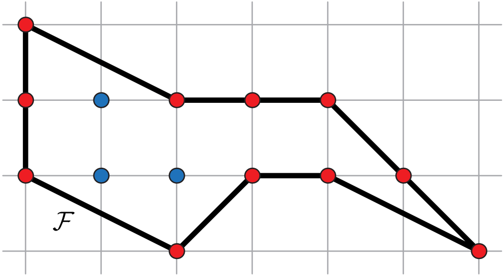


$B = 11$

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe... Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.

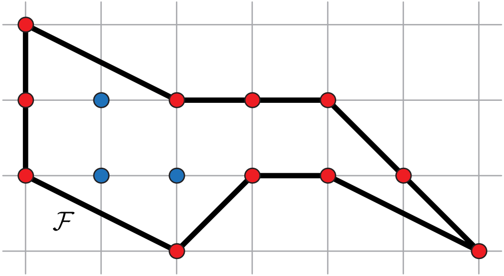


$B = 11$

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

Co łatwo odczytać z rysunku?

Jak widać, wyznaczanie pól pewnych wielokątów kratowych może być uciążliwe… Na rysunku wielokąta kratowego są jednak wielkości, które można bezpośrednio policzyć.



$B = 11$

$I = 3$

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

Wzór Picka

Wzór Picka

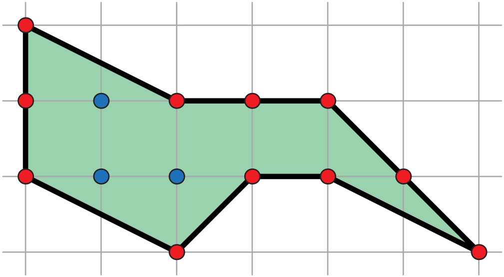
Okazuje się, że pole P wielokąta $\mathcal{F}$ wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$

Wzór Picka

Okazuje się, że pole P wielokąta $\mathcal{F}$ wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$



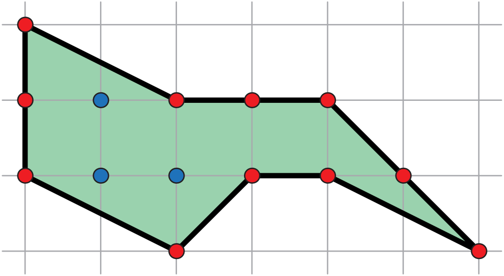
Na przykład dla powyższego wielokąta mamy $B = 11$ oraz $I = 3$, więc

$$P = 3 + 11/2 - 1.$$

Wzór Picka

Okazuje się, że pole P wielokąta $\mathcal{F}$ wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$

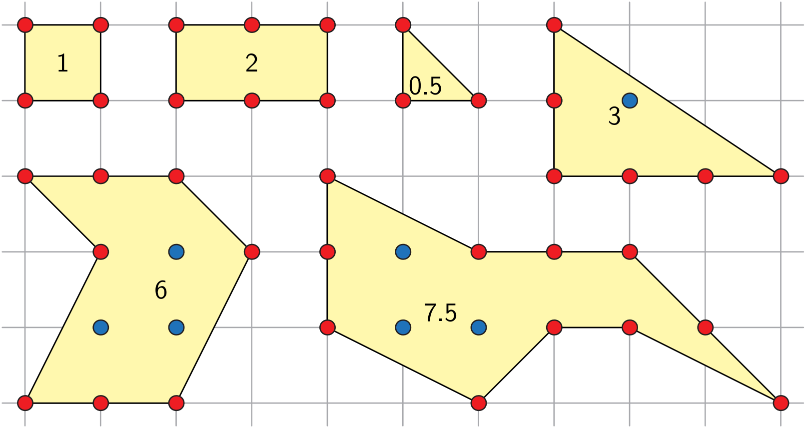


Na przykład dla powyższego wielokąta mamy $B = 11$ oraz $I = 3$, więc

$$P = 7.5.$$

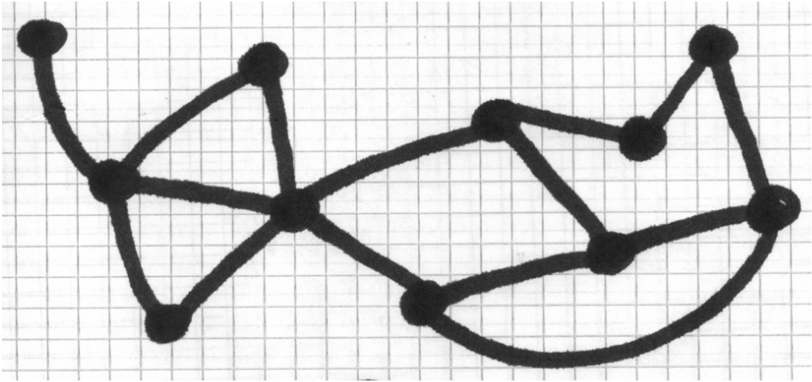
Wzór Picka

$$\color{green}{P} = \color{blue}{I} + \color{red}{B}/2 - 1$$



Część II

Kropki, kreski i co z tego wynika. . .



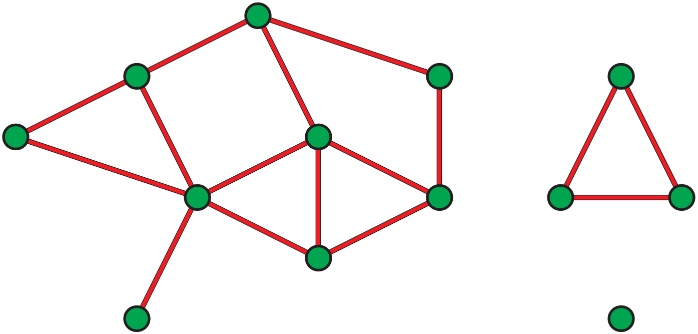
Co to jest graf?

Co to jest graf?

Mówiąc obrazowo, graf to kropki (wierzchołki), których niektóre pary są połączone kreskami (krawędziami).

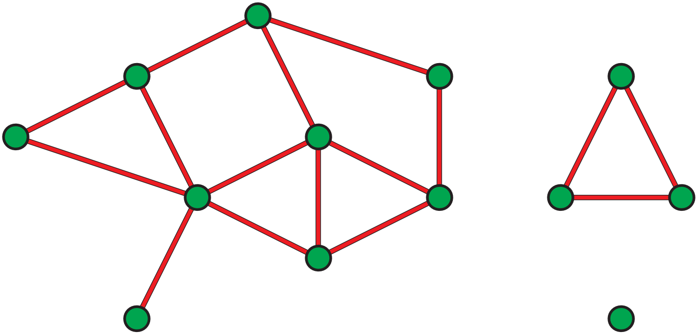
Co to jest graf?

Mówiąc obrazowo, graf to kropki (wierzchołki), których niektóre pary są połączone kreskami (krawędziami).



Co to jest graf?

Mówiąc obrazowo, graf to kropki (wierzchołki), których niektóre pary są połączone kreskami (krawędziami).



Zakładamy przy tym, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą, ani żadna para wierzchołków nie jest połączona więcej niż jedną krawędzią.

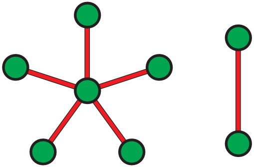
Co to jest graf płaski? Co to jest graf spójny?

Co to jest graf płaski? Co to jest graf spójny?

Graf płaski to graf tak narysowany, że jego krawędzie się nie przecinają.

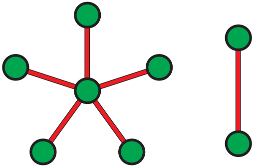
Co to jest graf płaski? Co to jest graf spójny?

Graf płaski to graf tak narysowany, że jego krawędzie się nie przecinają.



Co to jest graf płaski? Co to jest graf spójny?

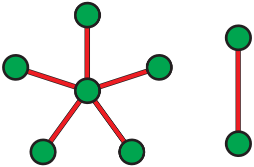
Graf płaski to graf tak narysowany, że jego krawędzie się nie przecinają.



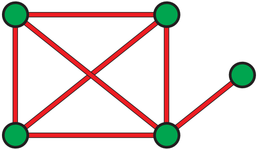
Graf spójny to graf, który jest w jednym kawałku, to znaczy z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego.

Co to jest graf płaski? Co to jest graf spójny?

Graf płaski to graf tak narysowany, że jego krawędzie się nie przecinają.



Graf spójny to graf, który jest w jednym kawałku, to znaczy z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego.



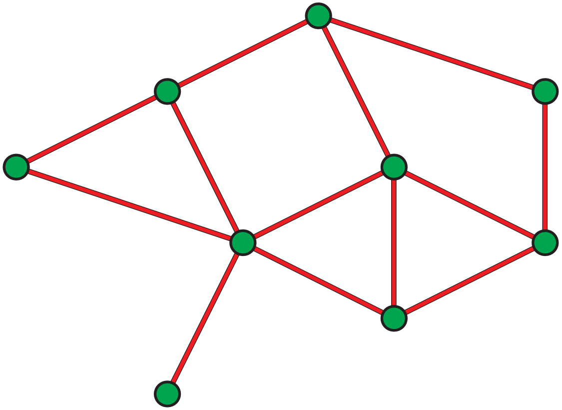
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).

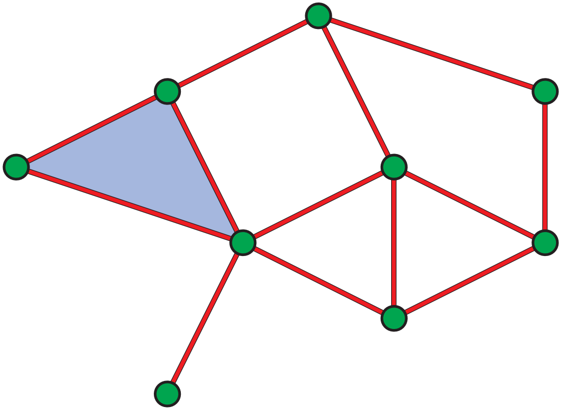
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



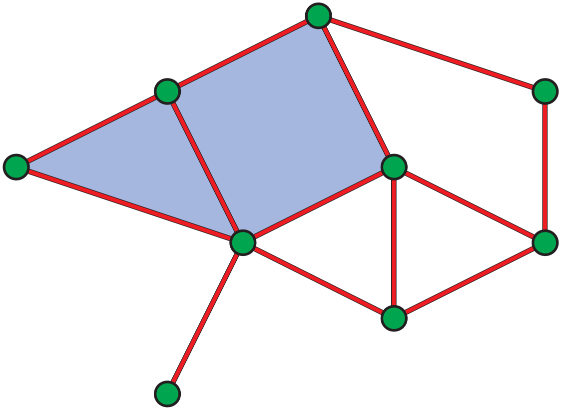
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



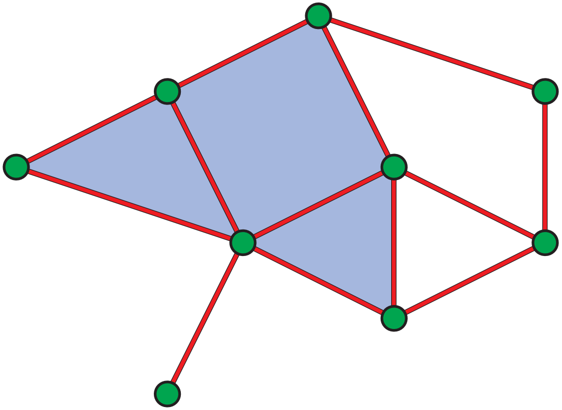
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



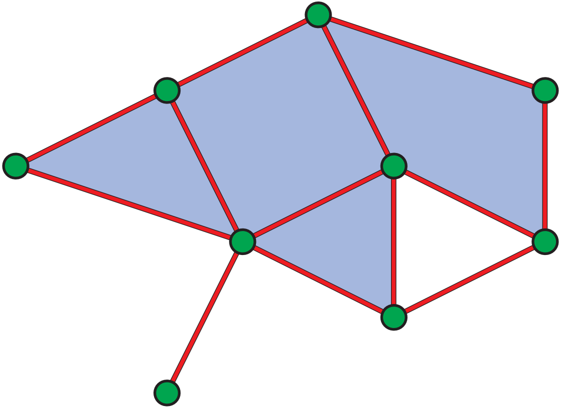
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



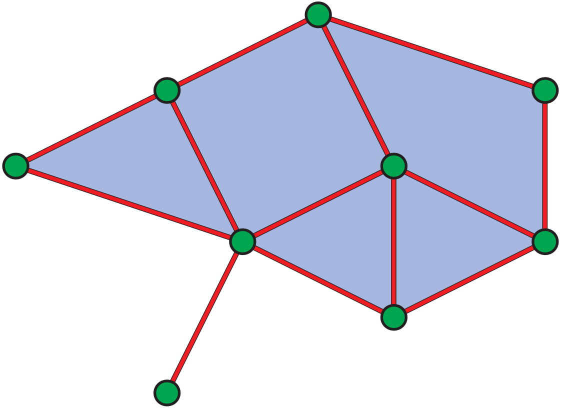
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



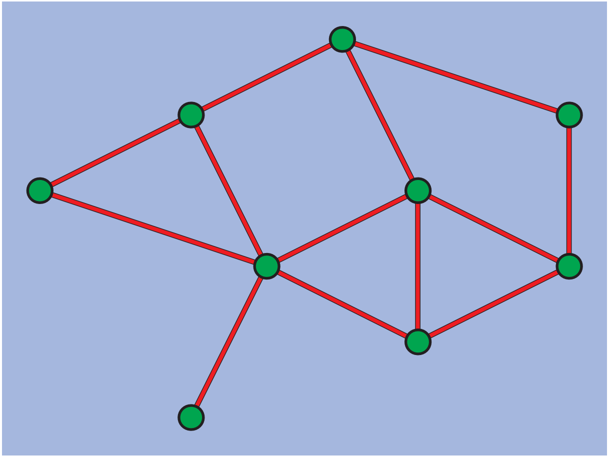
Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



Czym jest ściana w spójnym grafie płaskim?

Jeżeli graf jest spójny i płaski, to jego krawędzie dzielą płaszczyznę na obszary, które nazywamy ścianami (jeden z nich jest nieograniczony).



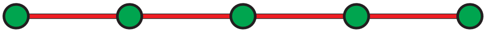
Liczby W, K, S

Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.

Liczby W, K, S

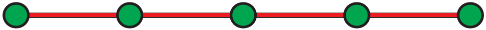
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W =$ $K =$ $S =$

Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 5$ $K =$ $S =$

Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.

$W = 5$ $K = 4$ $S =$

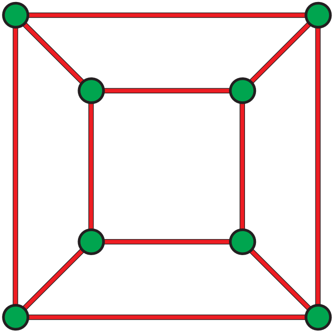
Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.

$W = 5$ $K = 4$ $S = 1$

Liczby W, K, S

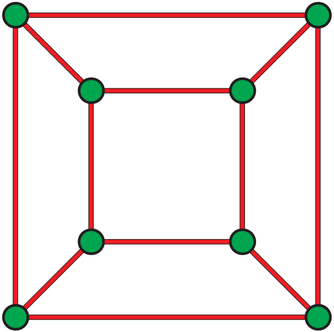
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W =$ $K =$ $S =$

Liczby W, K, S

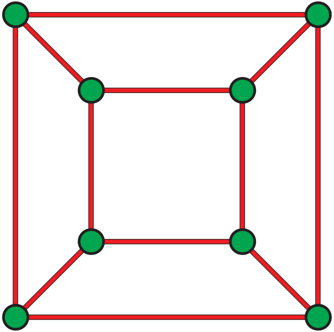
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 8$ $K =$ $S =$

Liczby W, K, S

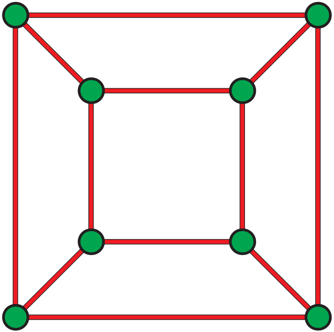
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 8$ $K = 12$ $S =$

Liczby W, K, S

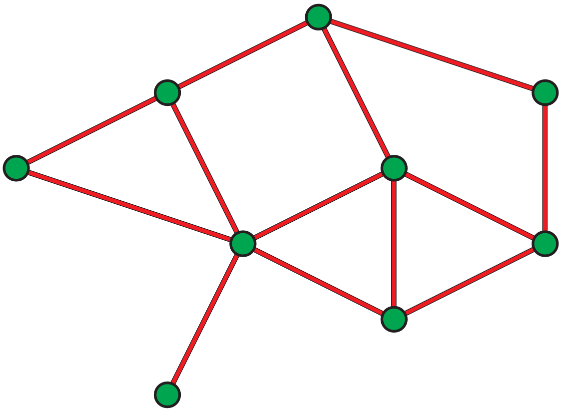
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 8$ $K = 12$ $S = 6$

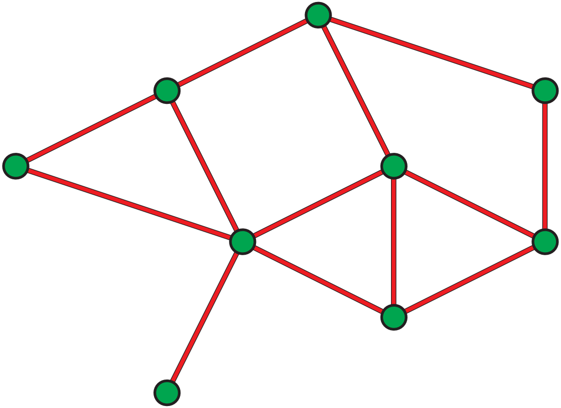
Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W =$ $K =$ $S =$

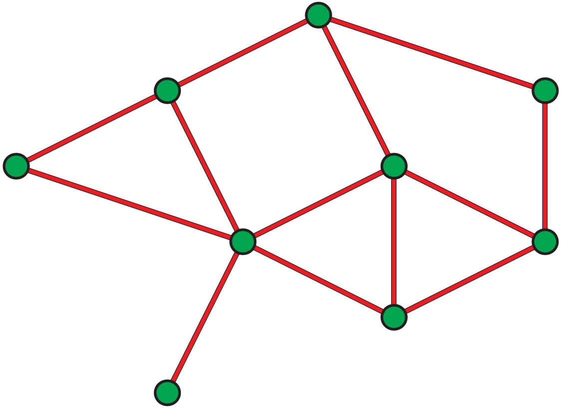
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 9$ $K =$ $S =$

Liczby W, K, S

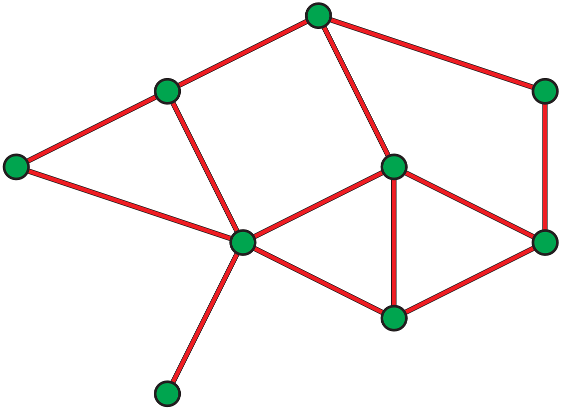
Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 9$ $K = 13$ $S =$

Liczby W, K, S

Niech W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.



$W = 9$ $K = 13$ $S = 6$

Wzór Eulera

Wzór Eulera

Jeżeli spójny graf płaski ma W wierzchołków, K krawędzi i S ścian, to

$$W - K + S = 2.$$

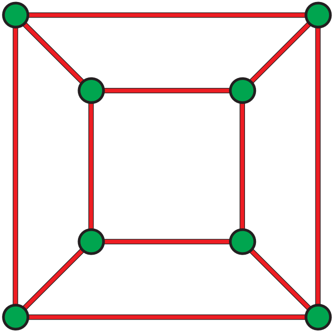
Wzór Eulera

$$W - K + S = 2$$

$W = 5$ $K = 4$ $S = 1$

Wzór Eulera

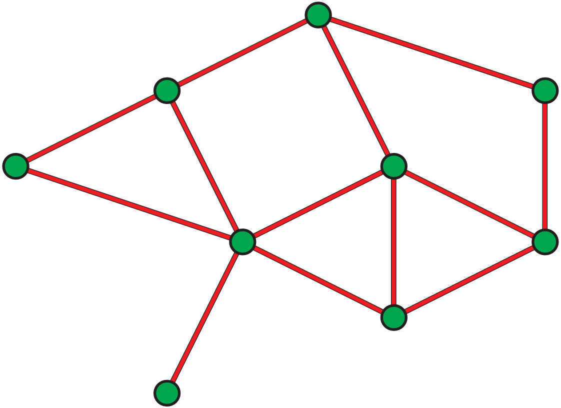
$$W - K + S = 2$$



$W = 8$ $K = 12$ $S = 6$

Wzór Eulera

$$W - K + S = 2$$



$W = 9$ $K = 13$ $S = 6$

Część III

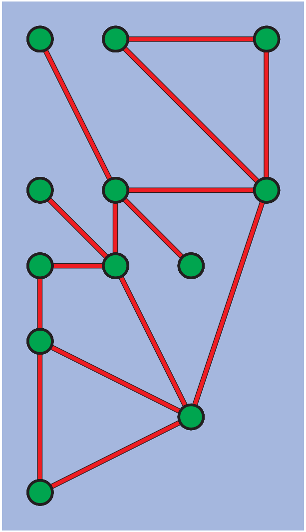
Totalna destrukcja — dowód wzoru Eulera

Atomowy archipelag

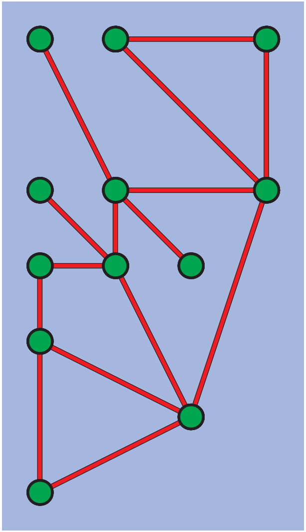
Atomowy archipelag

1) Rozważmy dowolny spójny graf płaski.

Atomowy archipelag

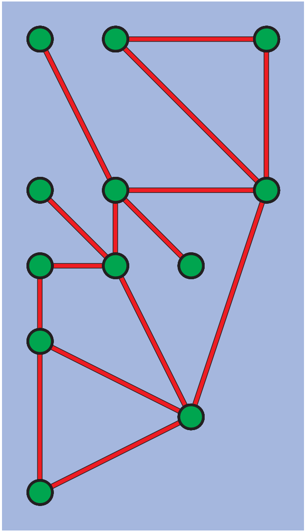


1) Rozważmy dowolny spójny graf płaski.



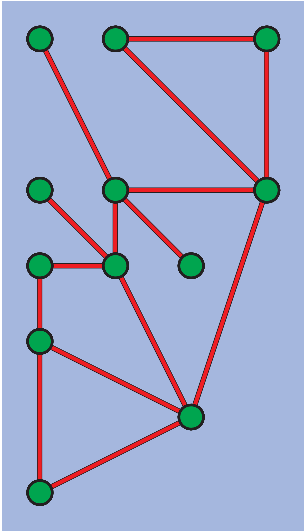
1) Rozważmy dowolny spójny graf płaski. Potraktujmy go jako mapę archipelagu: wierzchołki to wyspy, krawędzie to mosty, ściany zaś to akweny (ocean też się liczy).

Atomowy archipelag



1) Rozważmy dowolny spójny graf płaski. Potraktujmy go jako mapę archipelagu: wierzchołki to wyspy, krawędzie to mosty, ściany zaś to akweny (ocean też się liczy).
2) Przypuśćmy, że początkowo $W - K + S = X$ (chcemy udowodnić, że $X = 2$).

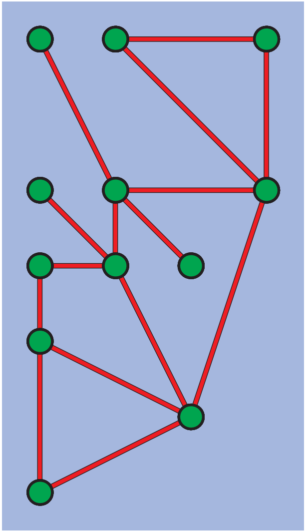
Atomowy archipelag



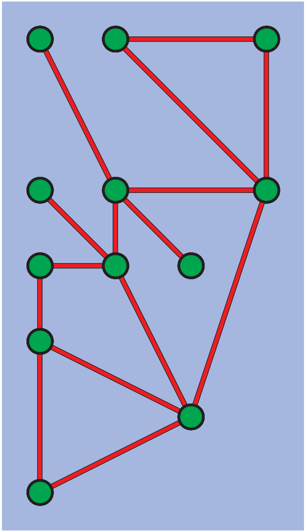
1) Rozważmy dowolny spójny graf płaski. Potraktujmy go jako mapę archipelagu: wierzchołki to wyspy, krawędzie to mosty, ściany zaś to akweny (ocean też się liczy).
2) Przypuśćmy, że początkowo $W - K + S = X$ (chcemy udowodnić, że $X = 2$).

Będziemy wykonywać takie modyfikacje sieci mostów, żeby wartość $W - K + S$ nie ulegała zmianie.

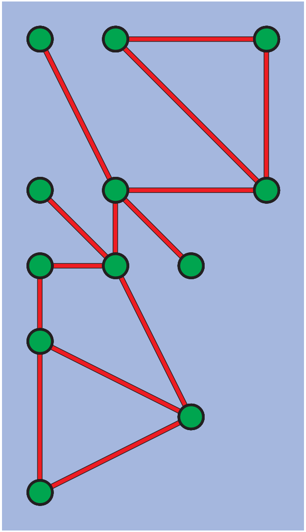
Krok 1: niszczymy most



Krok 1: niszczymy most

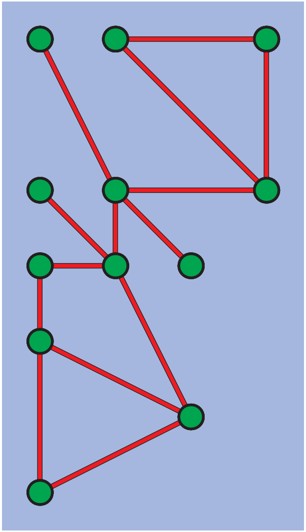


3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje).



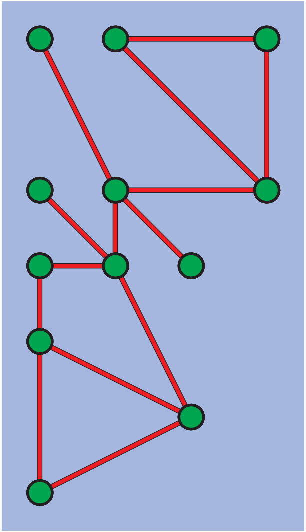
3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje).

Krok 1: niszczymy most



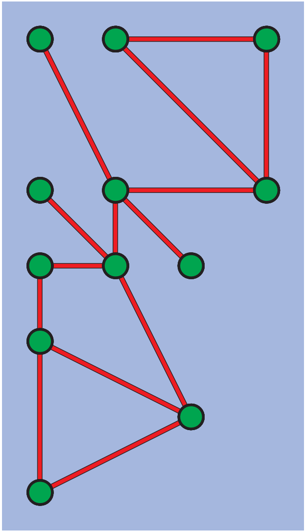
3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży),

Krok 1: niszczymy most



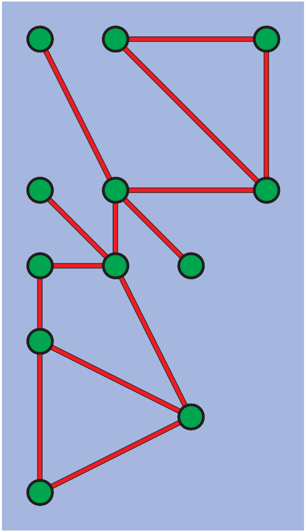
3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1.

Krok 1: niszczymy most



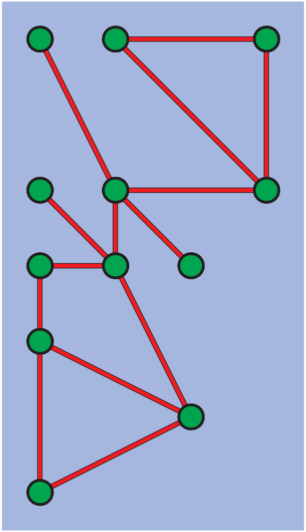
3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

Krok 1: niszczymy most



3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

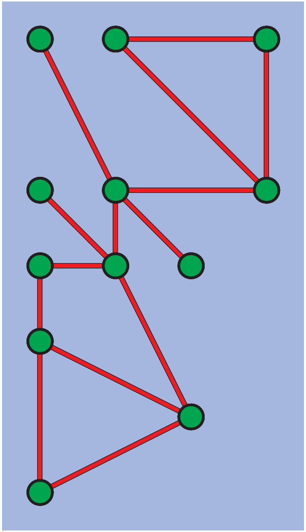
$$W - (K - 1) + (S - 1).$$



3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$W - K + 1 + S - 1.$$

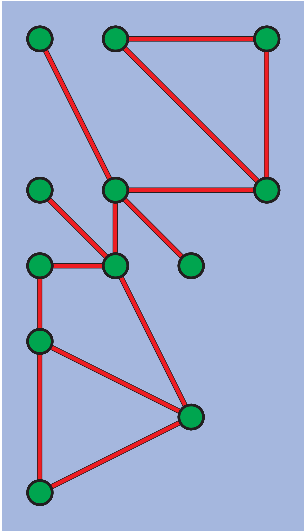
Krok 1: niszczymy most



3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$W - K + S.$$

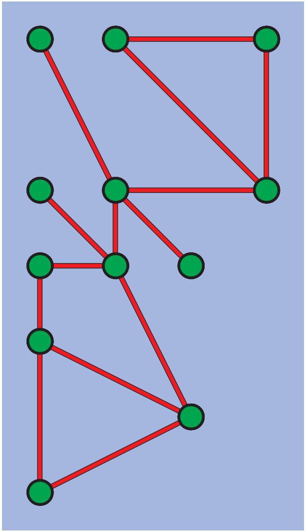
Krok 1: niszczymy most



3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

Krok 1: niszczymy most

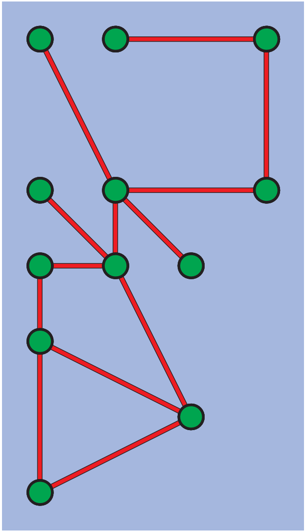


3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

4) Powyższą operację wykonujemy tak długo, jak długo istnieją mosty oddzielające różne akweny.

Krok 1: niszczymy most

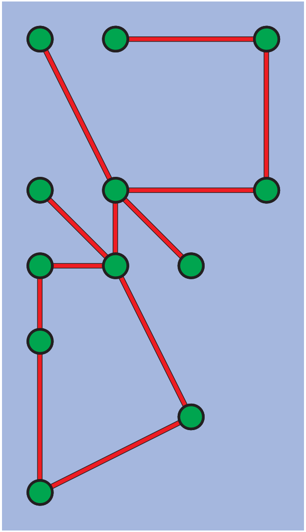


3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

4) Powyższą operację wykonujemy tak długo, jak długo istnieją mosty oddzielające różne akweny.

Krok 1: niszczymy most

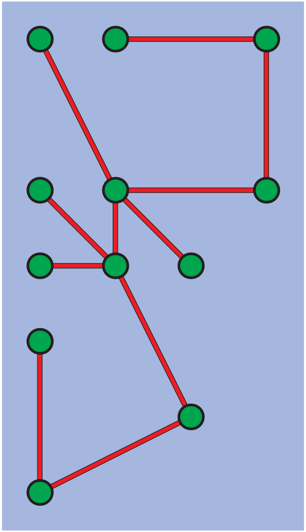


3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

4) Powyższą operację wykonujemy tak długo, jak długo istnieją mosty oddzielające różne akweny.

Krok 1: niszczymy most

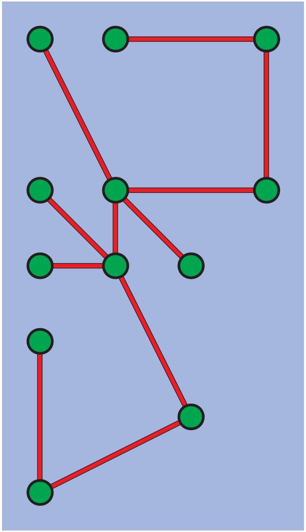


3) Usuńmy dowolny most, który oddziela *różne* akweny (jeżeli taki istnieje). Zauważmy, że w wyniku tej operacji liczba akwenów zmniejszyła się o 1 (bo dwa zlały się w jeden duży), a także liczba mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

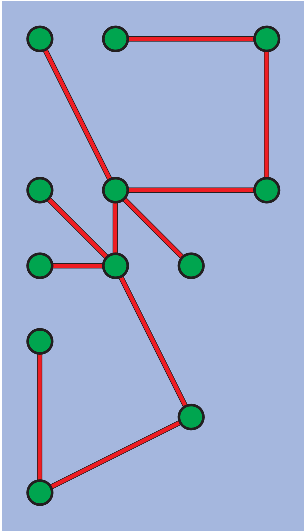
$$X.$$

4) Powyższą operację wykonujemy tak długo, jak długo istnieją mosty oddzielające różne akweny.

Krok 2: niszczymy molo

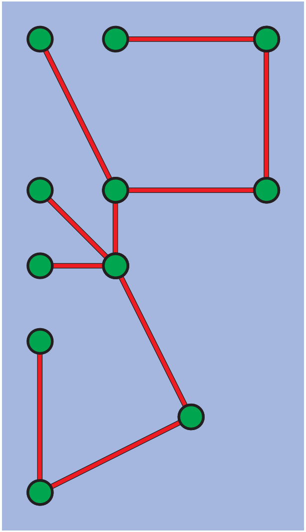


Krok 2: niszczymy molo

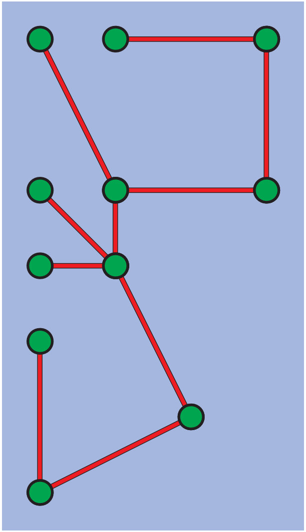


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem.

Krok 2: niszczymy molo

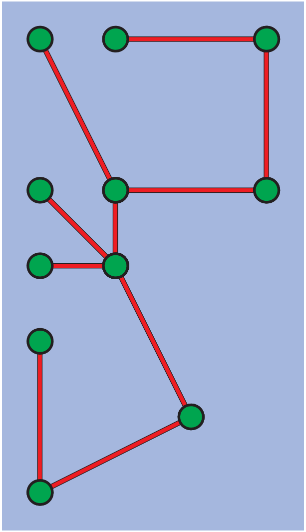


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem.



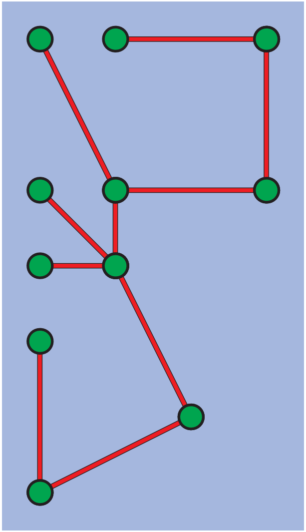
5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1.

Krok 2: niszczymy molo



5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

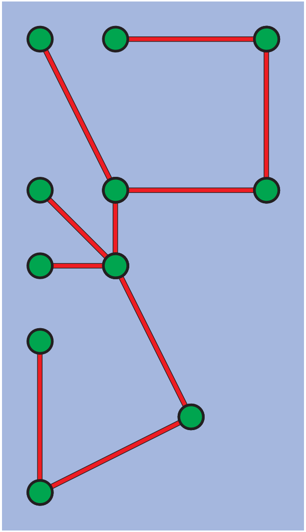
Krok 2: niszczymy molo



5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$(W - 1) - (K - 1) + S.$$

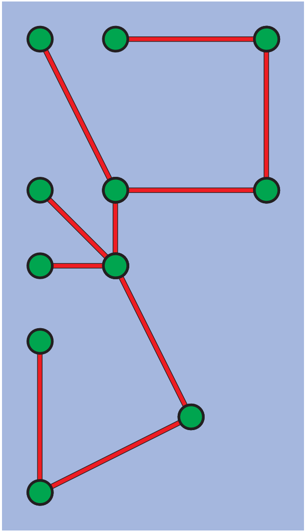
Krok 2: niszczymy molo



5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$W - 1 - K + 1 + S.$$

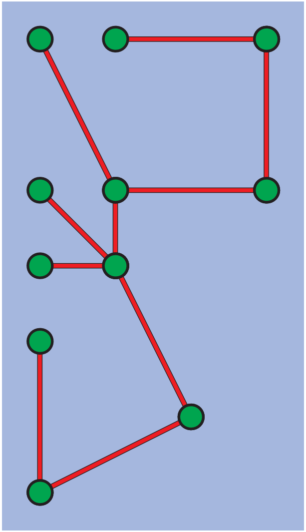
Krok 2: niszczymy molo



5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$W - K + S.$$

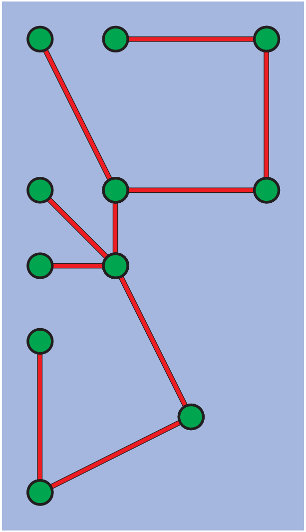
Krok 2: niszczymy molo



5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

Krok 2: niszczymy molo

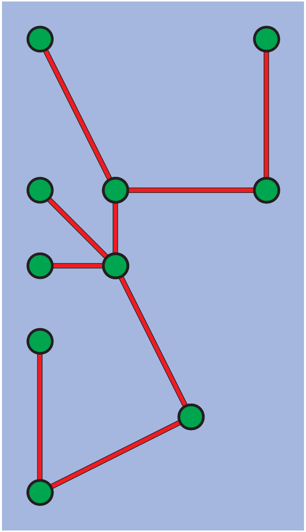


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

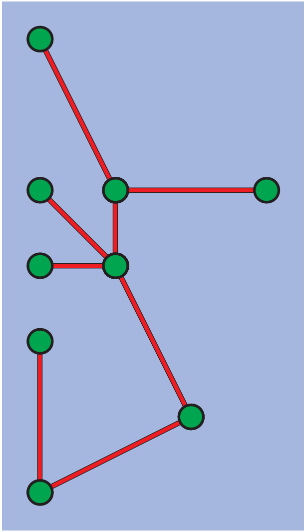


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

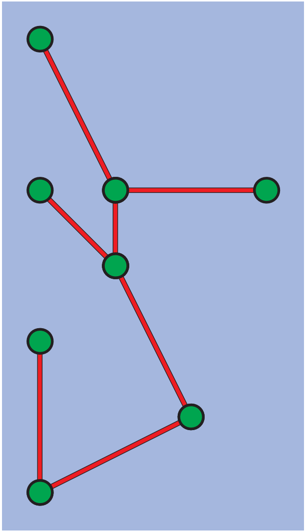


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

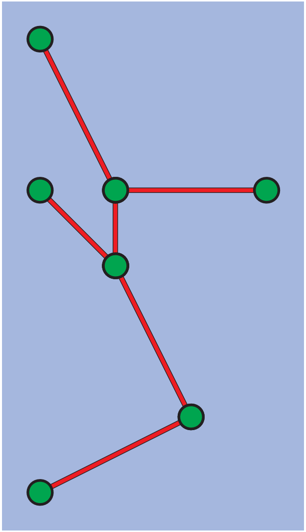


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

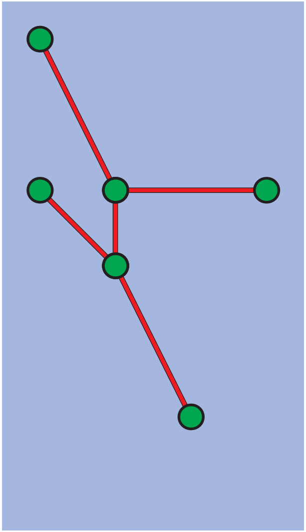


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

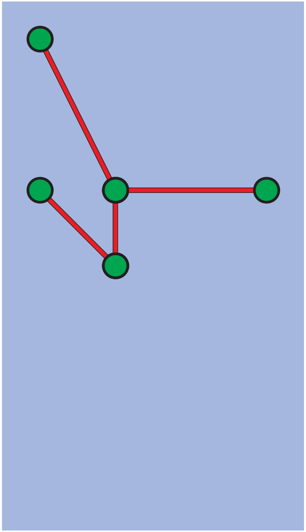


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

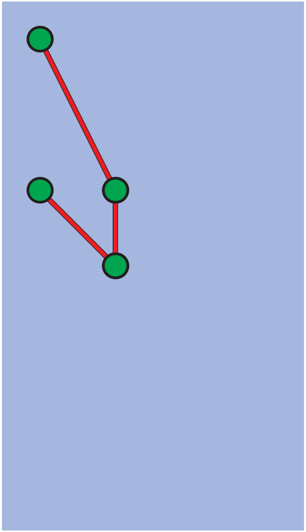


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

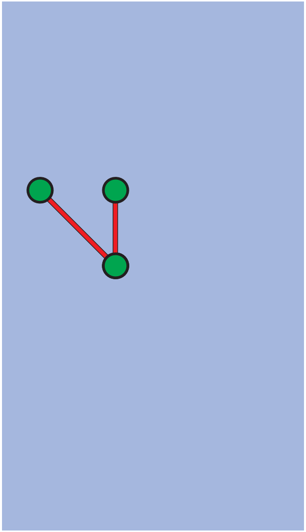


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

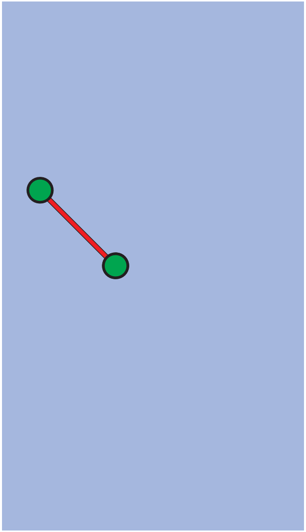


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

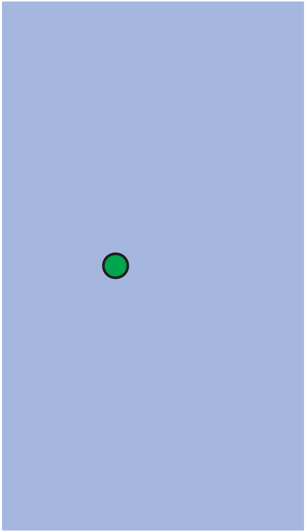


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa" wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 2: niszczymy molo

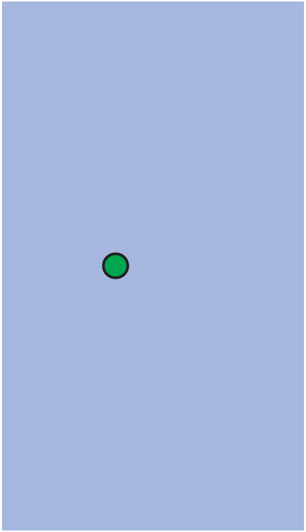


5) Usuńmy dowolną wyspę, na którą prowadzi *dokładnie jeden* most razem z tym mostem. Zauważmy, że w wyniku tej operacji zarówno liczba wysp, jak i mostów zmniejszyła się o 1. Wobec tego „nowa” wartość wyrażenia $W - K + S$ jest równa

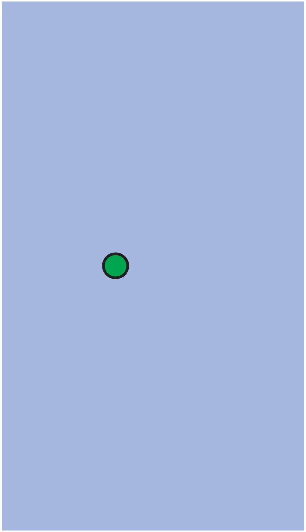
$$X.$$

6) Powyższą operację wykonujemy dopóki nie zniszczymy wszystkich mostów.

Krok 3: samotna wyspa

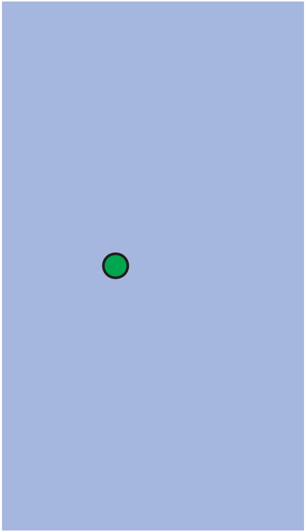


Krok 3: samotna wyspa



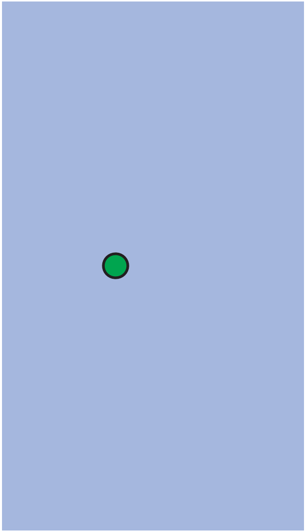
6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$).

Krok 3: samotna wyspa



6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$). Podczas bombardowań wartość wyrażenia $W - K + S$ nie zmieniała się i była stale równa X.

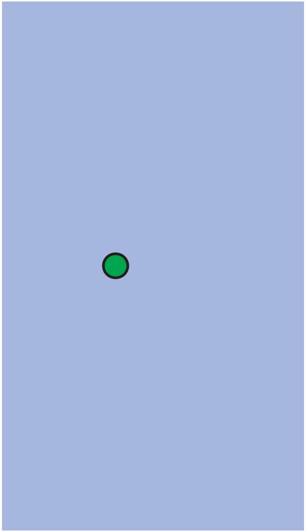
Krok 3: samotna wyspa



6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$). Podczas bombardowań wartość wyrażenia $W - K + S$ nie zmieniała się i była stale równa X. To oznacza, że

$$X = W - K + S,$$

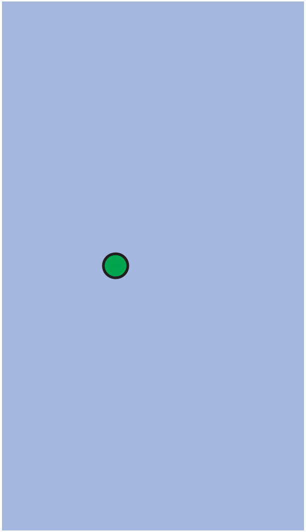
Krok 3: samotna wyspa



6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$). Podczas bombardowań wartość wyrażenia $W - K + S$ nie zmieniała się i była stale równa X. To oznacza, że

$$X = 1 - 0 + 1,$$

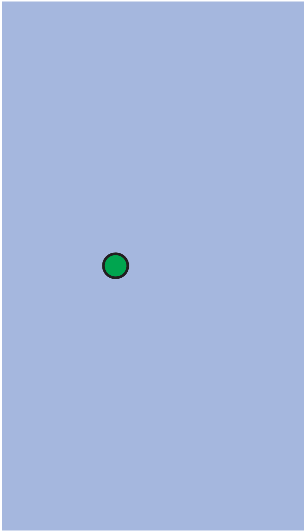
Krok 3: samotna wyspa



6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$). Podczas bombardowań wartość wyrażenia $W - K + S$ nie zmieniała się i była stale równa X. To oznacza, że

$$X = 2,$$

Krok 3: samotna wyspa



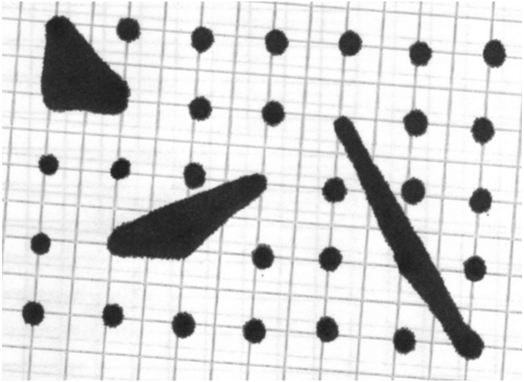
6) Na naszym archipelagu pozostała jedna wyspa ($W = 1$), jeden akwen ($S = 1$) i nie ma mostów ($K = 0$). Podczas bombardowań wartość wyrażenia $W - K + S$ nie zmieniała się i była stale równa X. To oznacza, że

$$X = 2,$$

a to właśnie chcieliśmy udowodnić!

Część IV

Mały trójkąt — duży problem



Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Jaki trójkąt nazwiemy małym?

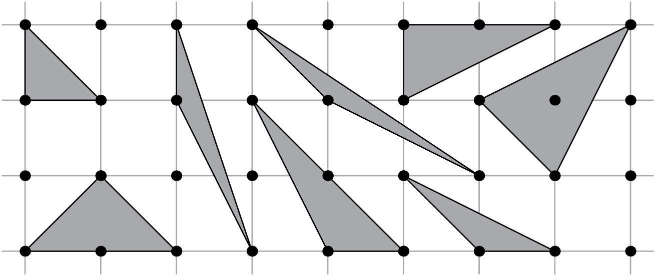
Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$.

Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).

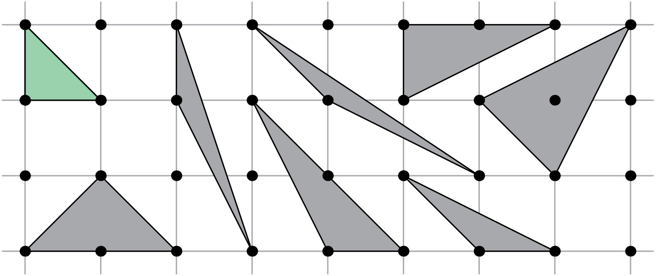
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



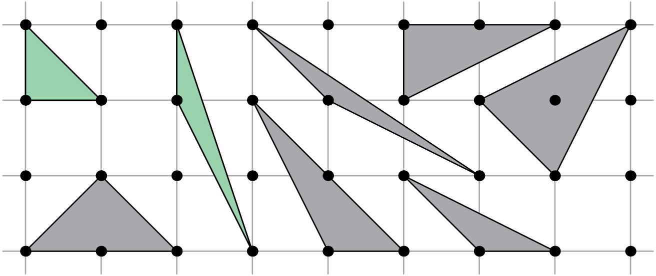
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



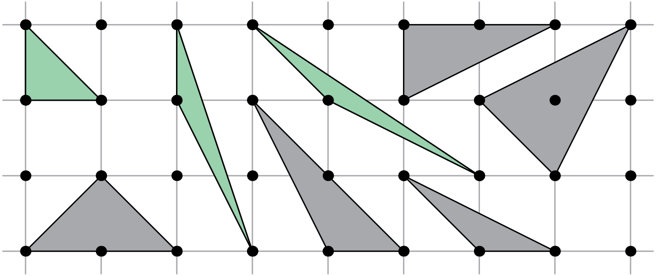
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



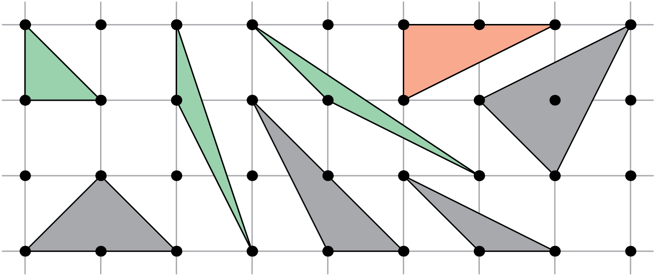
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



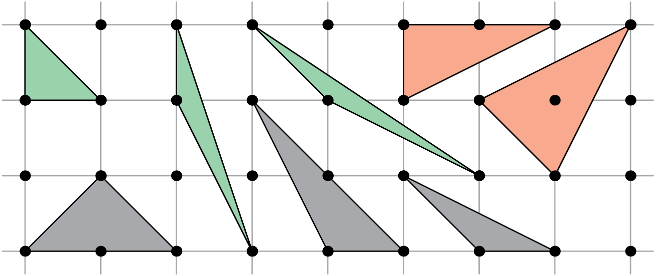
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



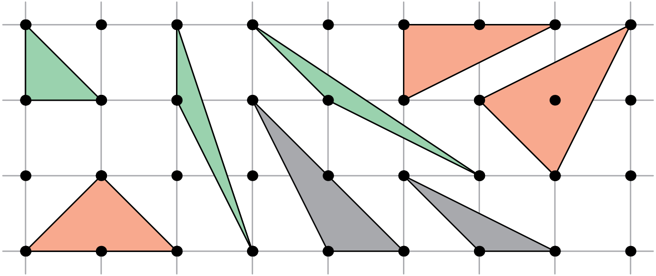
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



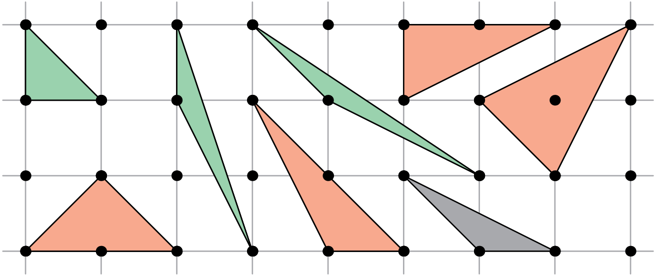
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



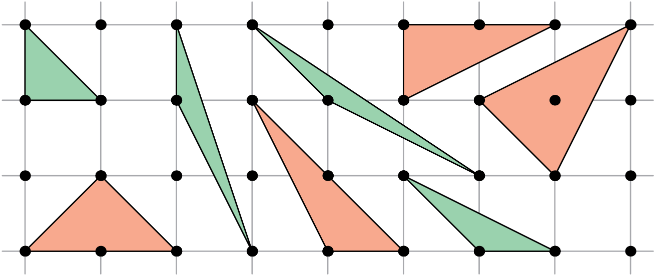
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



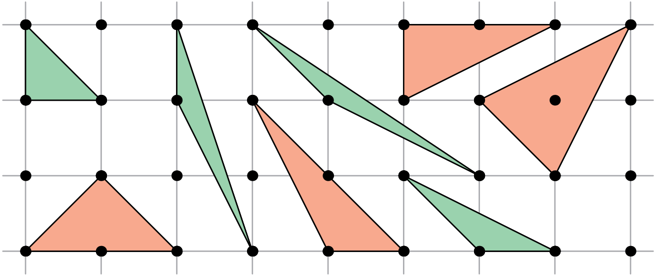
Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



Jaki trójkąt nazwiemy małym?

Trójkąt nazwiemy *małym*, jeżeli ma wierzchołki w punktach kratowych oraz $B = 3$, $I = 0$. Innymi słowy: ani na bokach, ani we wnętrzu małego trójkąta nie ma punktów kratowych (są tylko w wierzchołkach).



Udowodnimy (oczywiście nie posługując się wzorem Picka!), że każdy mały trójkąt ma pole 0.5.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

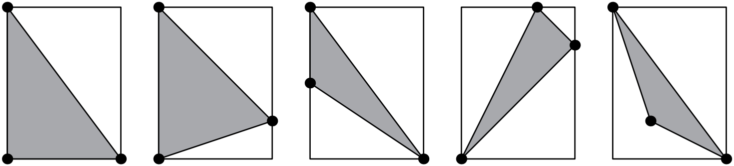
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

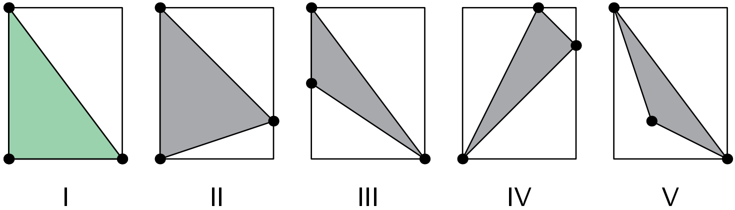
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



I II III IV V

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

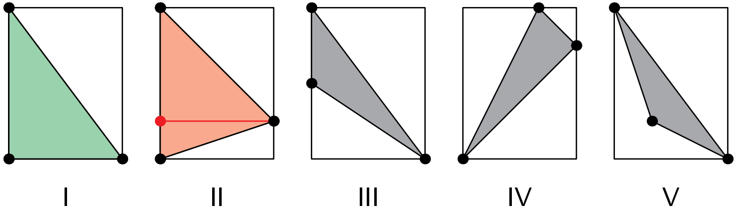
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



Sytuacja I może mieć miejsce tylko dla połówki kwadratu i wtedy pole rzeczywiście wynosi 0.5.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

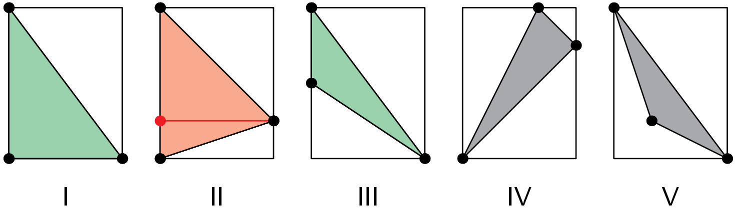
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



Sytuacja II nie może mieć miejsca — trójkąt nie byłby wówczas mały, gdyż miałby punkt kratowy na boku.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

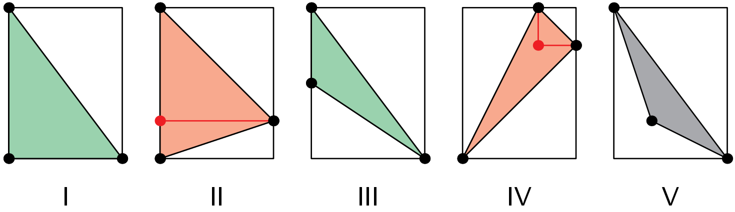
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



Sytuacja III jest — jak się okaże — szczególnym przypadkiem sytuacji V.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

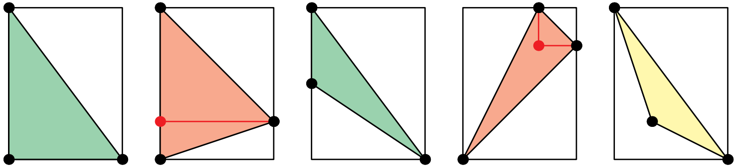
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



Sytuacja IV nie może mieć miejsca — trójkąt nie byłby wówczas mały, gdyż miałby punkt kratowy we wnętrzu.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

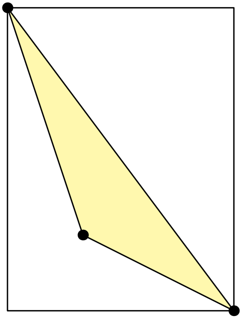
Rozważmy dowolny mały trójkąt i umieśćmy go w *najmniejszym* prostokącie o bokach równoległych do linii kratkowania. Otrzymamy konfigurację, która odpowiada jednemu z następujących schematów:



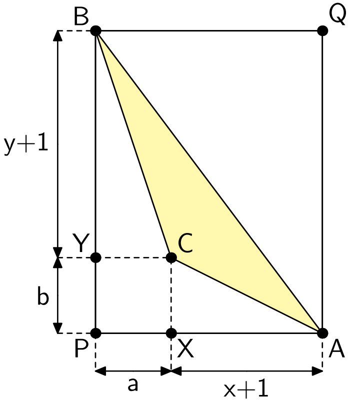
I II III IV V

Do rozważenia pozostaje tylko sytuacja V.

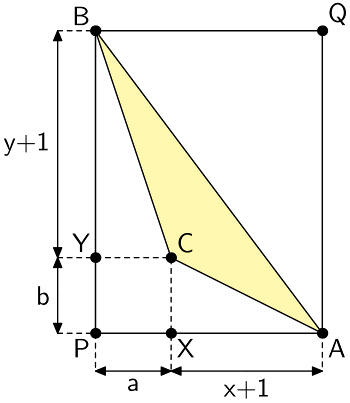
Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?



Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok.

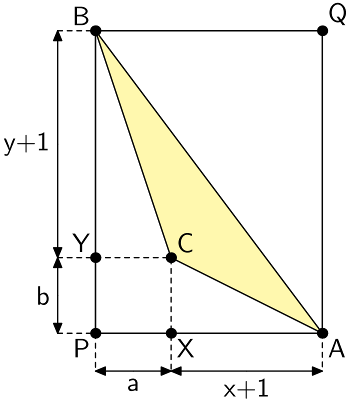


Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok.



Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok. Wówczas a, b, x, y to pewne liczby całkowite nieujemne.

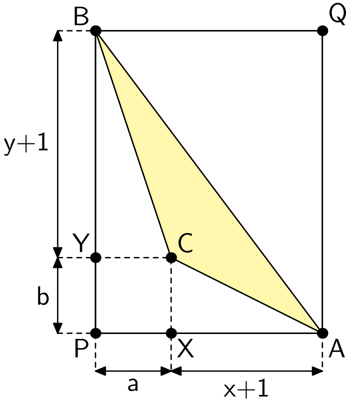
Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?



Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok. Wówczas a, b, x, y to pewne liczby całkowite nieujemne.

Aby przekonać się, ile jest równe pole trójkąta ABC, wyrazimy liczbę punktów kratowych wewnątrz prostokąta $APBQ$ na dwa sposoby.

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?

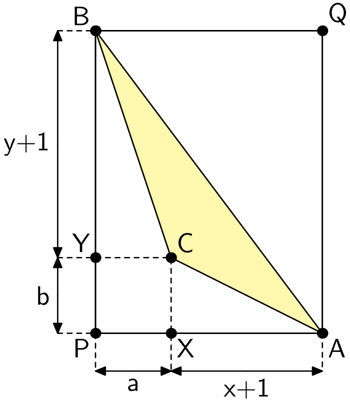


Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok. Wówczas a, b, x, y to pewne liczby całkowite nieujemne.

Aby przekonać się, ile jest równe pole trójkąta ABC, wyrazimy liczbę punktów kratowych wewnątrz prostokąta $APBQ$ na dwa sposoby.

Z jednej strony, prostokąt ma wymiary $(a + x + 1) \times (b + y + 1)$, więc punktów kratowych wewnątrz jest

Najmniejszy prostokąt — jak to wygląda?



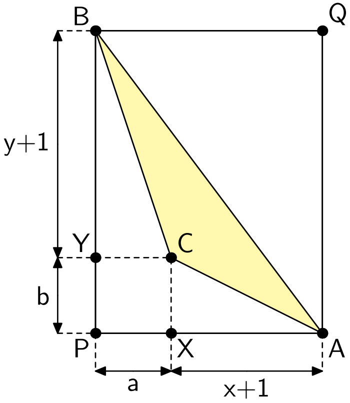
Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku obok. Wówczas a, b, x, y to pewne liczby całkowite nieujemne.

Aby przekonać się, ile jest równe pole trójkąta ABC, wyrazimy liczbę punktów kratowych wewnątrz prostokąta $APBQ$ na dwa sposoby.

Z jednej strony, prostokąt ma wymiary $(a + x + 1) \times (b + y + 1)$, więc punktów kratowych wewnątrz jest

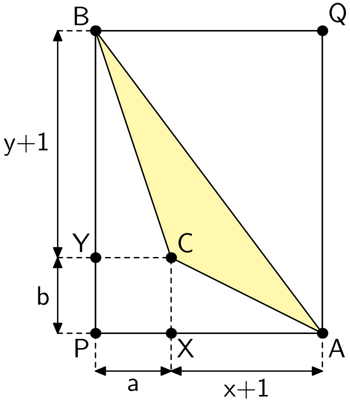
$$(a + x)(b + y).$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?



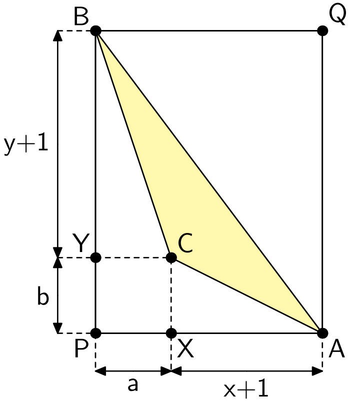
Z drugiej strony, możemy policzyć osobno liczby punktów kratowych wewnątrz poszczególnych figur.

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?



Z drugiej strony, możemy policzyć osobno liczby punktów kratowych wewnątrz poszczególnych figur. Trójkąt ABC jest mały, więc w jego wnętrzu ani na żadnym z odcinków AB, AC, BC nie ma punktów kratowych.

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

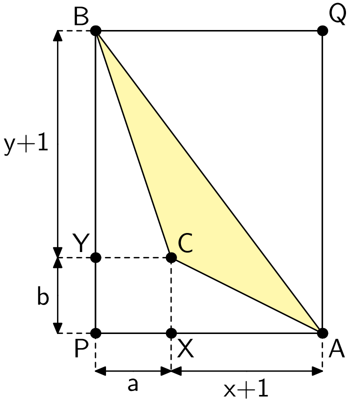


Z drugiej strony, możemy policzyć osobno liczby punktów kratowych wewnątrz poszczególnych figur. Trójkąt ABC jest mały, więc w jego wnętrzu ani na żadnym z odcinków AB, AC, BC nie ma punktów kratowych. Wobec tego wewnątrz trójkątów ABQ, ACX, BCY jest odpowiednio

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2}, \quad \frac{x(b-1)}{2}, \quad \frac{y(a-1)}{2}$$

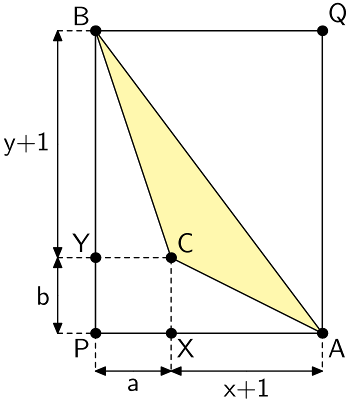
punktów kratowych.

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?



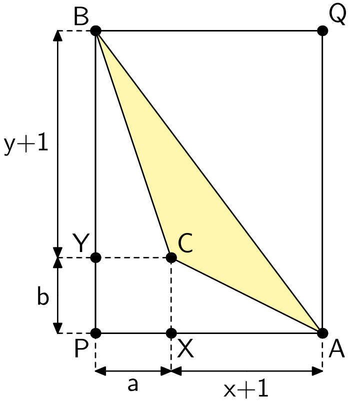
Do policzenia zostały punkty kratowe wewnątrz prostokąta $XCYP$, na jego bokach CX i CY oraz punkt C.

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?



Do policzenia zostały punkty kratowe wewnątrz prostokąta $XCYP$, na jego bokach CX i CY oraz punkt C. Tych punktów jest łącznie

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?



Do policzenia zostały punkty kratowe wewnątrz prostokąta $XCYP$, na jego bokach CX i CY oraz punkt C. Tych punktów jest łącznie ab.

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$(a+x)(b+y) = x(b-1) + y(a-1) + 2ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$(a+x)(b+y) = x(b-1) + y(a-1) + 2ab,$$

$$ab + ay + bx + xy = bx - x + ay - y + 2ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$(a+x)(b+y) = x(b-1) + y(a-1) + 2ab,$$

$$ab + ay + bx + xy = bx - x + ay - y + 2ab,$$

$$ay + bx + xy = bx - x + ay - y + ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$(a+x)(b+y) = x(b-1) + y(a-1) + 2ab,$$

$$ab + ay + bx + xy = bx - x + ay - y + 2ab,$$

$$ay + bx + xy = bx - x + ay - y + ab,$$

$$xy = -x - y + ab,$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$(a+x)(b+y) = \frac{(a+x)(b+y)}{2} + \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$\frac{(a+x)(b+y)}{2} = \frac{x(b-1)}{2} + \frac{y(a-1)}{2} + ab,$$

$$(a+x)(b+y) = x(b-1) + y(a-1) + 2ab,$$

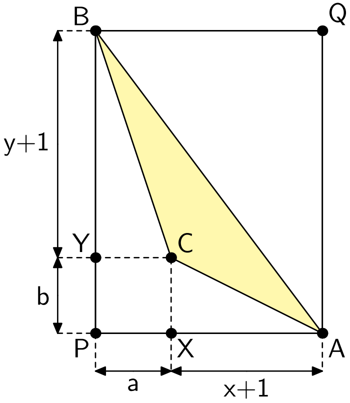
$$ab + ay + bx + xy = bx - x + ay - y + 2ab,$$

$$ay + bx + xy = bx - x + ay - y + ab,$$

$$xy = -x - y + ab,$$

$$xy + x + y = ab.$$

Ile punktów kratowych jest wewnątrz?

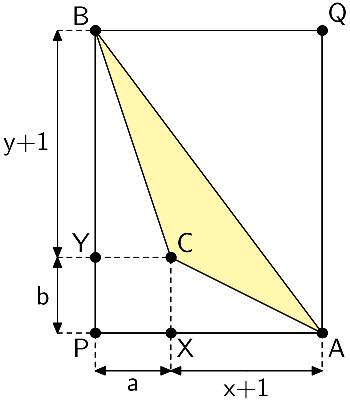


Do policzenia zostały punkty kratowe wewnątrz prostokąta $XCYP$, na jego bokach CX i CY oraz punkt C. Tych punktów jest łącznie ab.

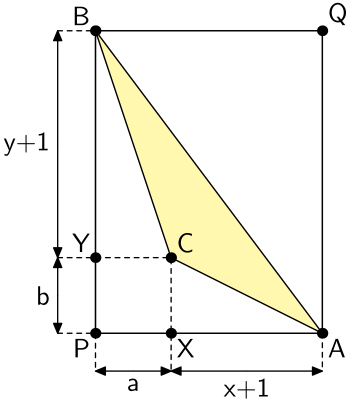
Porównując uzyskane wyniki, otrzymujemy:

$$xy + x + y = ab.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

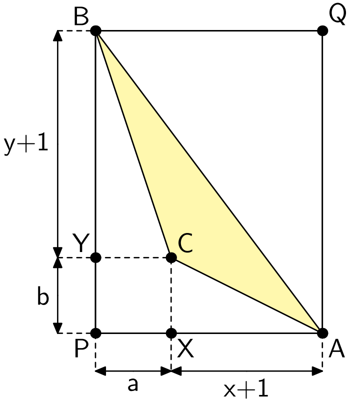


Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$.

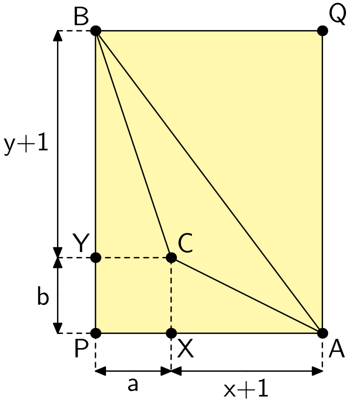
Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

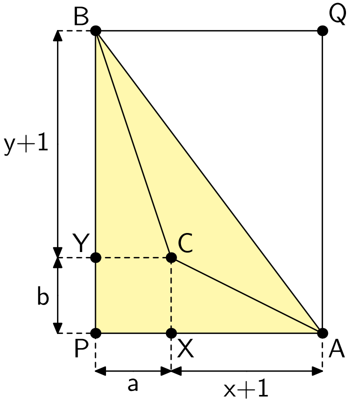
$$[ABC] =$$

Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

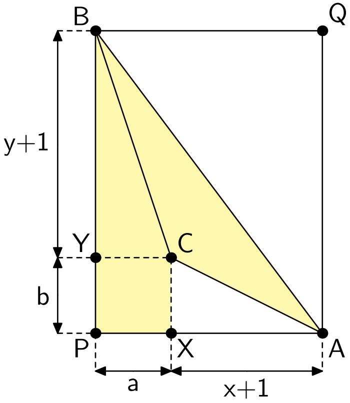
$$[ABC] = \quad [APBQ]$$



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

$$[ABC] = [APBQ] - [ABQ]$$

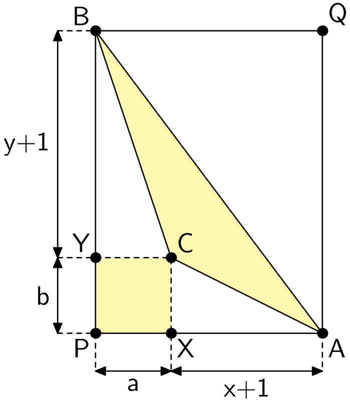
Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
[ABC] = \quad & [APBQ] \\
& -[ABQ] \\
& -[ACX]
\end{aligned}
$$

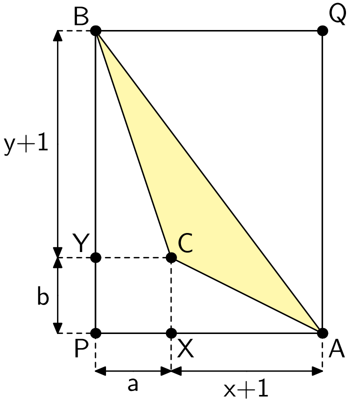
Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

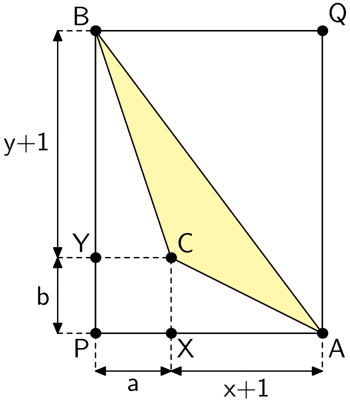
$$
\begin{aligned}
[ABC] = \; & [APBQ] \\
& -[ABQ] \\
& -[ACX] \\
& -[BCY]
\end{aligned}
$$

Jakie jest pole małego trójkąta?



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
[ABC] = \ & [APBQ] \\
& -[ABQ] \\
& -[ACX] \\
& -[BCY] \\
& -[XPYC].
\end{aligned}
$$



Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Wówczas

$$[ABC] = [APBQ] - [ABQ] - [ACX] - [BCY] - [XPYC].$$

Ponadto zachodzą równości:
$[APBQ] = (a + x + 1)(b + y + 1)$,
$[ABQ] = (a + x + 1)(b + y + 1)/2$,
$[ACX] = b(x + 1)/2$,
$[BCY] = a(y + 1)/2$, $[XPYC] = ab$.

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$(a+x+1)(b+y+1)-\frac{(a+x+1)(b+y+1)}{2}-\frac{b(x+1)}{2}-\frac{a(y+1)}{2}-ab.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{(a+x+1)(b+y+1)}{2} - \frac{b(x+1)}{2} - \frac{a(y+1)}{2} - ab.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{(a+x+1)(b+y+1) - b(x+1) - a(y+1) - 2ab}{2}.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{ab + ay + a + bx + xy + x + b + y + 1 - bx - b - ay - a - 2ab}{2}.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{xy + x + y + 1 - ab}{2}.$$

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{xy + x + y + 1 - ab}{2}.$$

Ale przecież doszliśmy wcześniej do wniosku, że $xy + x + y = ab$.

Jakie jest pole małego trójkąta?

Stąd wniosek, że pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{xy + x + y + 1 - ab}{2}.$$

Ale przecież doszliśmy wcześniej do wniosku, że $xy + x + y = ab$. To pozwala zapisać

$$[ABC] = \frac{1}{2},$$

a tę właśnie równość chcieliśmy udowodnić.

Część V

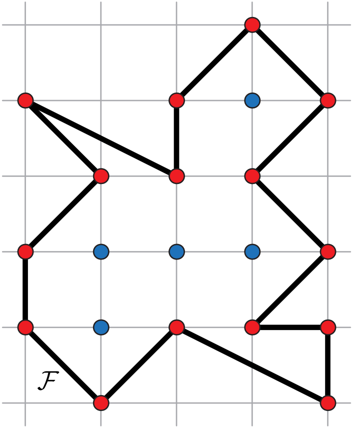
Dowód wzoru Picka

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty

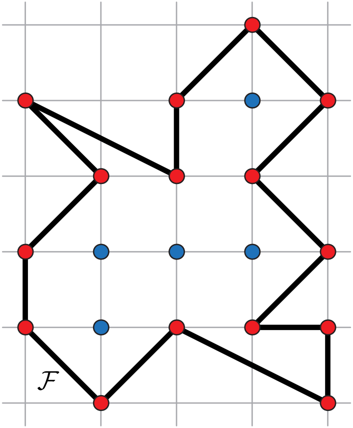
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

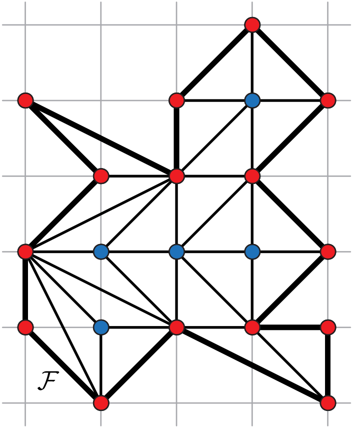
Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

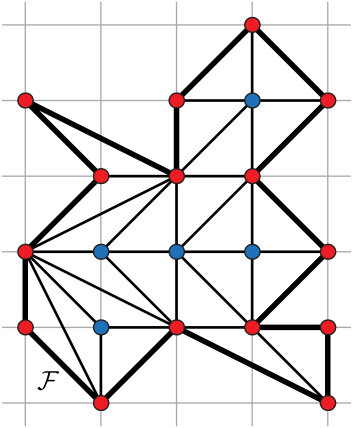
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

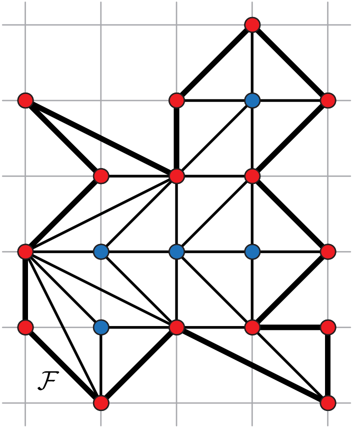
Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

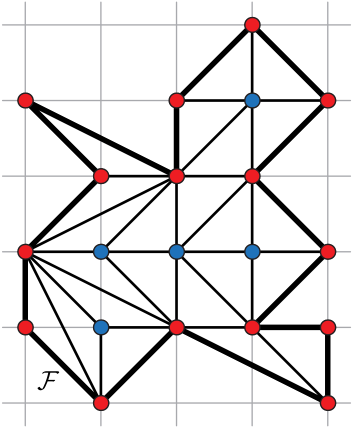
Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.
3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S =$$

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



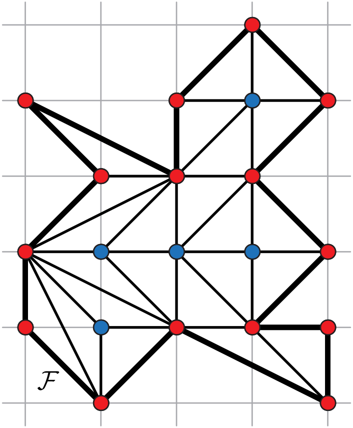
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

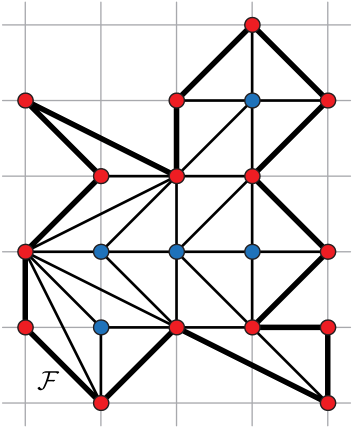
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W =$$

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

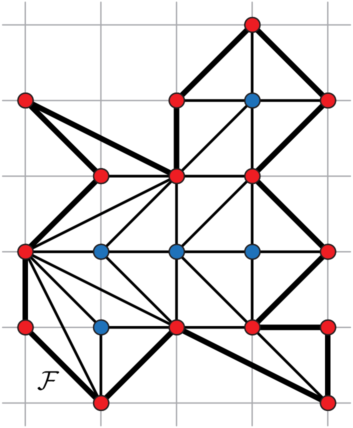
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



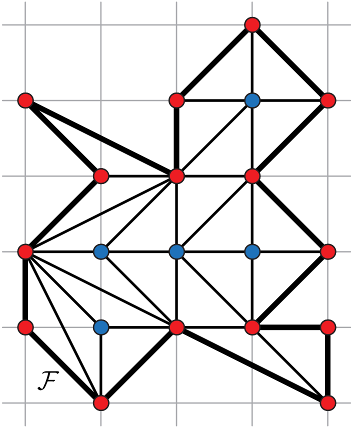
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.
3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

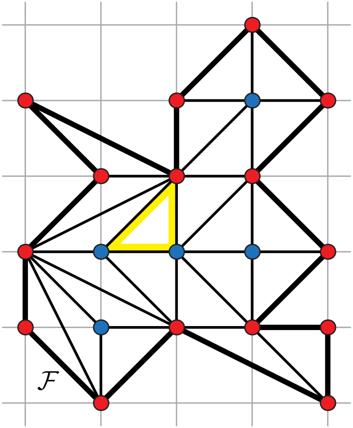
$$W = I + B.$$

Co można powiedzieć o liczbie krawędzi tego grafu?

Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów

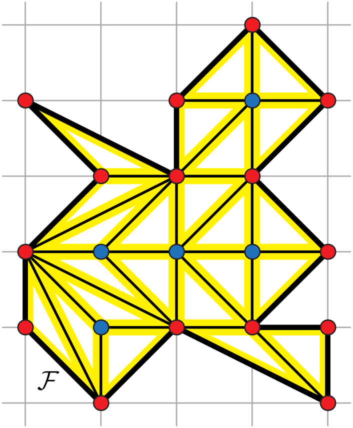


Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów

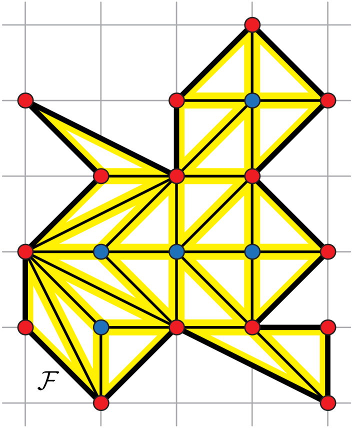


4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to

Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów

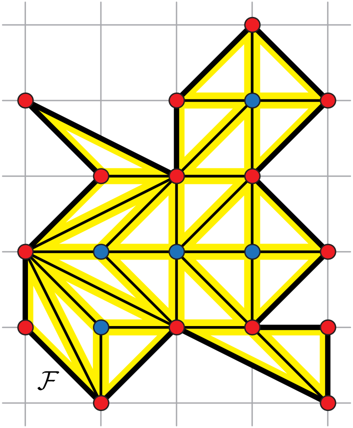


4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$



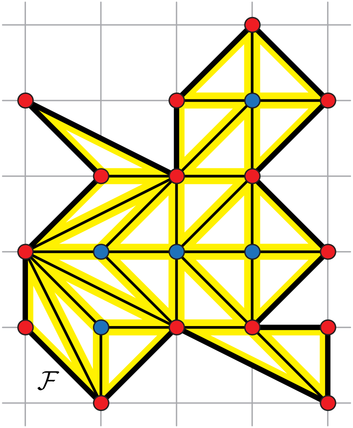
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie

Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

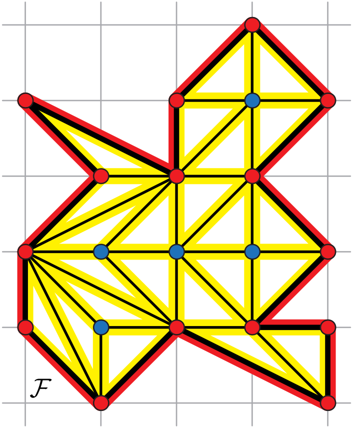
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest

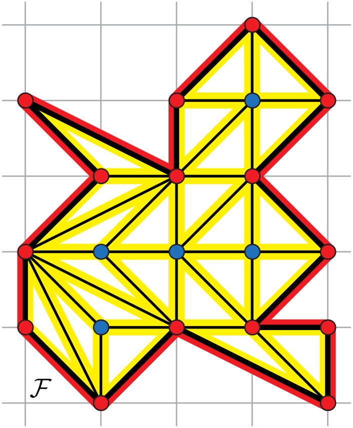
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest

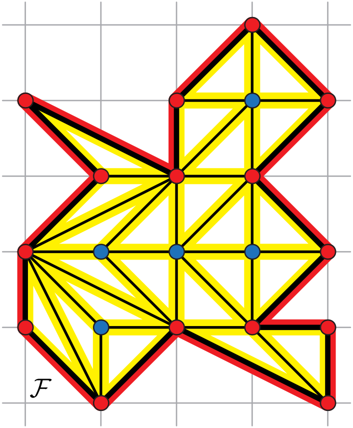
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B.

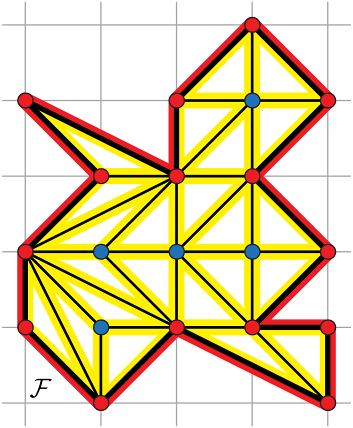
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

$$2K = 3T + B.$$

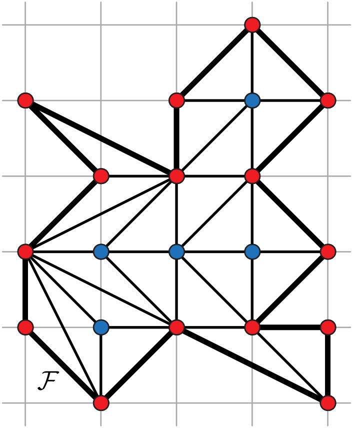


4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

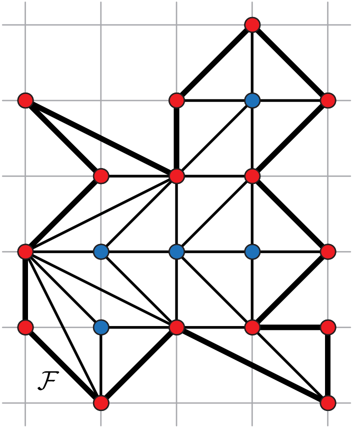
5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

$$K = \frac{3T + B}{2}.$$

Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera

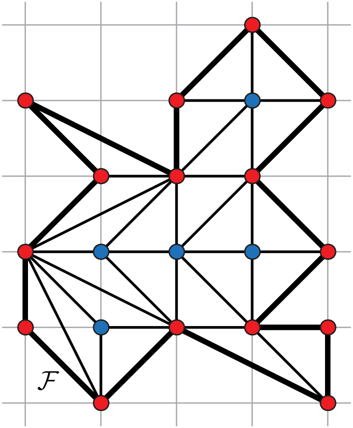


Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

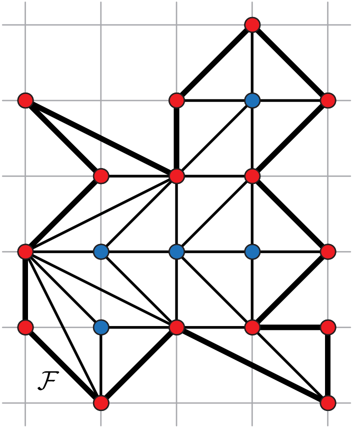
$$2 = W - K + S.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T + 1.$$

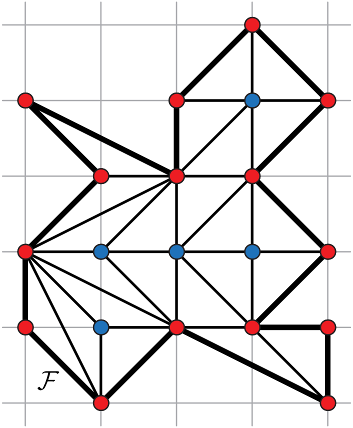
Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$0 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T - 1.$$

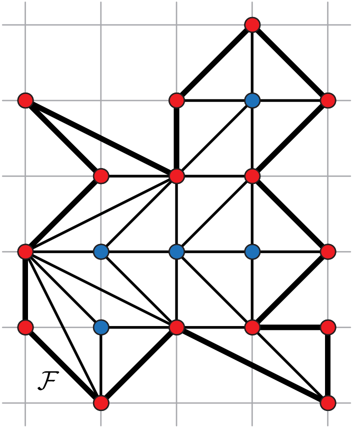
Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

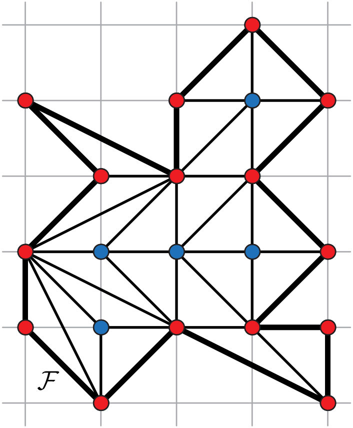
$$0 = I + B - \frac{3T}{2} - \frac{B}{2} + T - 1.$$

Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera



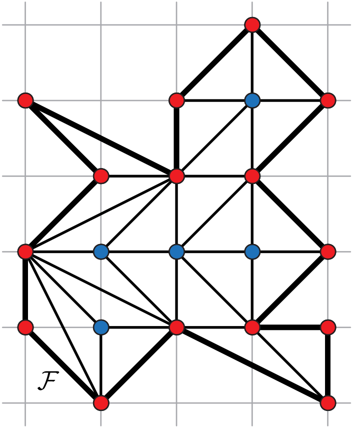
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{3T}{2} - T = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



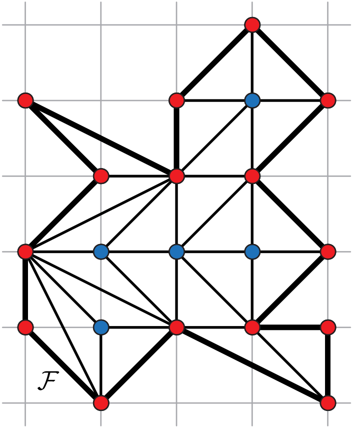
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

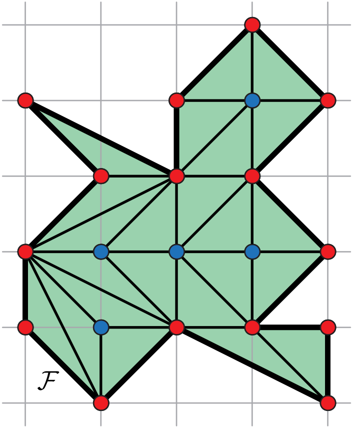
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe

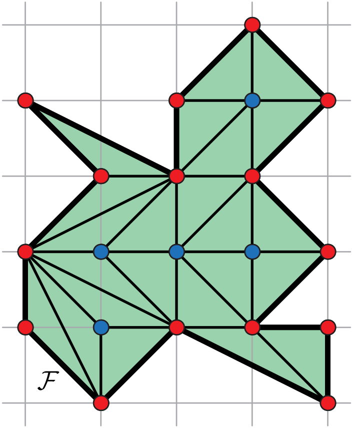


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe

Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera

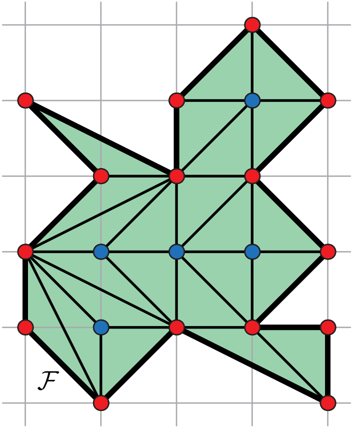


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$.

Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera



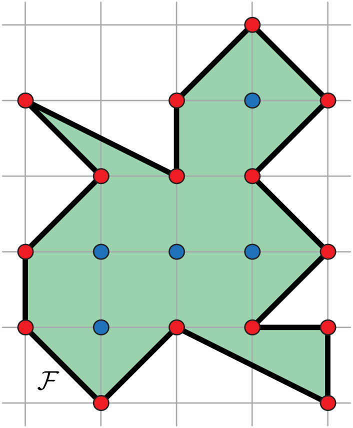
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = \frac{T}{2}$$

Krok 3: Korzystamy ze wzoru Eulera

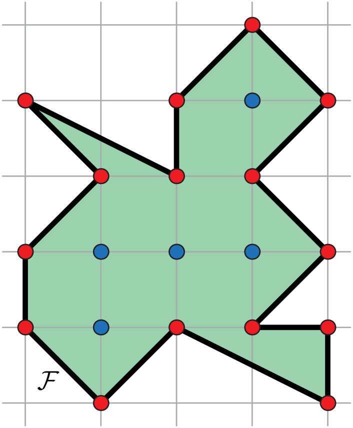


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

a to właśnie jest wzór Picka!

Wzór Picka

Wiemy *czym jest* i wiemy *skąd się wziął*!

Wzór Picka

Wiemy *czym jest* i wiemy *skąd się wziął*!

Życzę jak najwięcej wiedzy obu typów,

Wzór Picka

Wiemy *czym jest* i wiemy *skąd się wziął*!

Życzę jak najwięcej wiedzy obu typów,

a zwłaszcza — tego drugiego.

Wzór Picka

Wiemy *czym jest* i wiemy *skąd się wziął*!

Życzę jak najwięcej wiedzy obu typów,

a zwłaszcza — tego drugiego.

Dziękuję za uwagę! ☺